AL–Teste 2–11MAI—Versão A

1. Classifique como *verdadeira* ou *falsa* cada uma das afirmações seguintes:

   (a) Se $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$ é uma base de U e $T : U \to V$ é uma transformação linear tal que $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \notin \mathrm{Nuc}(T)$ então, T é necessariamente injectiva.

   (b) Se $\dim(V) = 5$ não pode existir uma transformação linear $T : V \to V$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Nuc}(T)$.

   (c) Se $T : U \to V$ é linear e $\dim(U) < \dim(V)$ então T não é sobrejectiva.

   (d) Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e W é um subconjunto não vazio de V tal que $(\forall \alpha \in \mathbb{K})(\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W)\alpha \mathrm{x} + \mathrm{y} \in W$ então W é subespaço de V.

   (e) Se V é um espaço linear e $\emptyset \neq X, Y \subset V$. Se Y tem mais elementos que X e $L_V(X) = L_V(Y)$ então Y é linearmente dependente.

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Sejam $U = \mathrm{Nuc}(A)$ e $W = \mathrm{EC}(B)$.

   (a) Determine uma base de U.

   (b) Determine um conjunto gerador de $U \cap W$.

   (c) **Justifique** que $U + W = \mathbb{R}^4$ mas que a soma não é directa.

   (d) Indique **justificadamente** um subespaço $S \leqslant \mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus S = \mathbb{R}^4$.

3. Sejam, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, uma transformação linear,

$$\boldsymbol{\beta} = ((1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

   uma base de $\mathbb{R}^3$ e,

$$A = [T]_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   a matriz que representa T relativamente à base $\boldsymbol{\beta}$.

   (a) Determine $T(1, 1, 0)$.

   (b) A transformação T é sobrejectiva? **Justifique!**

   (c) Determine $\mathrm{Nuc}(T)$.

   (d) Sendo $\boldsymbol{\beta}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ determine $B = [T]_{\boldsymbol{\beta}_c}$ e use esta matriz para calcular $T(x, y, z)$.

Resolução da versão A

1.

(a) *Falsa*. Uma transformação linear injectiva preserva a independência linear. Assim, a transformação $T : U \to V$ definida pelas condições $T(\mathrm{e}_1) = \mathrm{x}, T(\mathrm{e}_2) = -\mathrm{x}$, onde $\mathrm{x} \neq \mathbb{0}$ é um elemento de V, satisfaz as condições do enunciado mas não pode ser injectiva.

(b) *Verdadeira*. Se tal fosse possível ter-se-ia:

$$5\dim(V) = \dim(\mathrm{Nuc}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2\dim(\mathrm{Nuc}(T))$$

e 5 seria um número par (absurdo!).

(c) *Verdadeira*. Tem-se que $\dim(\mathrm{Im}(T)) < \dim(U) < \dim(V)$ pelo que não se pode ter $\mathrm{Im}(T) = V$ e assim, T não é sobrejectiva.

(d) *Verdadeira*. Repare-se que W é fechado para a adição de vectores: $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 1\mathrm{x} + \mathrm{y} \in W$ se $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in W$. Por outro lado, também é fechado para a multiplicação por escalar: $\alpha\mathrm{x} = \alpha\mathrm{x} + \mathbb{0} \in W$ se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\mathrm{x} \in W$. Assim, como W não é vazio, é necessariamente um subespaço de V.

(e) *Verdadeira*. Se X tem m elementos e Y tem $n > m$ elementos e se, Y fosse linearmente independente então $\dim(L_V(Y)) = n > m$ e este espaço não poderia ser gerado por X (que tem menos de n elementos).

2.

(a) Tem-se que,

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}(A) &= \{(x, y, z, w) \mid x - z + w = 0\} = \\ &= \{(x, y, z, -x + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}).\end{aligned}$$

Como aquele conjunto gerador é obtido por separação de variáveis é também uma base de $\mathrm{Nuc}(A)$.

(b) Considerando a mtriz

$$\left[U \mid -W\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se que $\mathrm{Nuc}([U|-W]) = L_{\mathbb{R}^5}(\{(-1, 2, 0, 1, 2)\})$. Assim, $U \cap W = L_{\mathbb{R}^4}(\{\mathrm{x}\})$, onde

$$\mathrm{x} = [U]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Como se constata por simples observação as colunas de B são linearmente independentes. Resulta assim da relação:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

que $\dim(U \cap W) = 4$. Assim $U + W = \mathbb{R}^4$. No entanto, a intersecção $U \cap W$ não é trivial pelo que a soma não é directa.

(d) É fácil constatar que a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica 4 pelo que as suas colunas são linearmente independentes. Considerando

$$S = L_{\mathbb{R}^4}(\{(0,0,0,1)\}),$$

tem-se que $\mathbb{R}^4 = U + S$. Por outro lado, $(0,0,0,1) \notin U$ e assim $U \cap S = \{\mathbb{0}\}$ pelo que $\mathbb{R}^4 = U \oplus S$.

3.

(a) Pensando em termos de coordenadas na base canónica, $\boldsymbol{\beta}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ temos que

$$\begin{aligned} U_\beta &= \{(a+b, a+2b, 2a+b, 2a+2b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \\ &= L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,2,2),(1,2,1,2)\}). \end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\begin{aligned} U &= L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}(\{(1,1,2,2)^\beta, (1,2,1,2)^\beta\}) = \\ &= L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right) \end{aligned}$$

que, como qualquer expansão linear é um subespaço.

(b) Em termos de coordenadas $A \in U$ se e só se o sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

for possível. O que se constata (facilmente) é o caso. Como U tem dimensão 2 precisamos de acrescentar a A um segundo vector de U, linearmente independente de A, para obter uma base de U contendo A. Tem-se que $A_\beta = (0,-1,1,0)$. Considerando $a = 1, b = 0$ tem-se que $(1,1,2,2) \in U_\beta$. os vectores A_β e $(1,1,2,2))$ são linearmente independentes e assim:

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

constituem uma base de U de que A é um dos elementos.

4.

(a) Como o vector $(1,1,0)$ é o segundo vector da base $\boldsymbol{\beta}$ tem-se que $T(1,1,0)_\beta = (1,-1,3)$ (a segunda coluna de A). Tem-se então que:

$$T(1,1,0) = 1(1,-1,0) + (-1)(1,1,0) + 3(0,1,1).$$

(b) T será sobrejectiva sse $\text{car}(A) = \dim(\text{Im}(T)) = 3$. Procedendo à eliminação de Gauss constata-se que a matriz tem característica 2 logo, T não pode ser sobrejectiva.

(c) Tem-se que $\text{Nuc}(A) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1,0,1)\})$. Assim,

$$\text{Nuc}(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1,0,1)^\beta\}),$$

onde $(-1,0,1)^\beta = -(1,-1,0) + (0,1,1) = (-1,2,1)$.

(d) Tem-se que

$$[T]_{\beta_c} = M_{\beta_c,\beta}[T]_\beta M_{\beta,\beta_c} = M_{\beta_c,\beta}[T]_\beta M^{-1}_{\beta_c,\beta}.$$

Ora,

$$M_{\beta_c,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$M_{\beta,\beta_c} = M^{-1}_{\beta_c,\beta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

pelo que:

$$[T]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente:

$$T(x,y,z) = T(x,y,z)_{\beta_c} = [T]_{\beta_c}(x,y,z)_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x - y + 3z \\ x + z \\ 2x + y \end{bmatrix} = (x - y + 3z, x + z, 2x + y).$$

AL–Teste 2–11MAI—Versão B

1. Classifique como *verdadeira* ou *falsa* cada uma das afirmações seguintes:

   (a) Se $\dim(V) = 5$ não pode existir uma transformação linear $T : V \to V$ tal que $\text{Im}(T) = \text{Nuc}(T)$.

   (b) Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e W é um subconjunto não vazio de V tal que $(\forall \alpha \in \mathbb{K})(\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W)\alpha\mathrm{x} + \mathrm{y} \in W$ então W é subespaço de V.

   (c) Se V é um espaço linear e $\emptyset \neq X, Y \subset V$. Se Y tem mais elementos que X e $L_V(X) = L_V(Y)$ então Y é linearmente dependente.

   (d) Sejam, V um espaço linear e $X, Y \subset V$ então $L_V(X) \cap L_V(Y) = L_V(X \cap Y)$.

   (e) Sejam, V um espaço linear, U, W subespaços de V e $\boldsymbol{\beta}_U, \boldsymbol{\beta}_W$ base de U e W, respectivamente. Neste caso $\boldsymbol{\beta}_U \cup \boldsymbol{\beta}_W$ é uma base de $U + W$.

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Sejam $U = \text{Nuc}(A)$ e $W = \text{EC}(B)$.

   (a) Determine uma base de U.

   (b) Determine um conjunto gerador de $U \cap W$.

   (c) **Justifique** que $U + W = \mathbb{R}^4$ mas que a soma não é directa.

   (d) Indique **justificadamente** um subespaço $S \leqslant \mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus S = \mathbb{R}^4$.

3. Sejam, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, uma transformação linear,

$$\boldsymbol{\beta} = ((1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

   uma base de $\mathbb{R}^3$ e,

$$A = [T]_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   a matriz que representa T relativamente à base $\boldsymbol{\beta}$.

   (a) Determine $T(0, 1, 1)$.

   (b) A transformação T é injectiva? **Justifique!**

   (c) Determine $\text{Im}(T)$.

   (d) Sendo $\boldsymbol{\beta}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ determine $B = [T]_{\boldsymbol{\beta}_c}$ e use esta matriz para calcular $T(x, y, z)$.

Correcção da versão B

1.

(a) *Verdadeira.* Se $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Nuc}(T)$ então $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathrm{Nuc}(T)$. Como $5 = \dim V = \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \mathrm{Nuc}(T)$, ter-se-ia $2 \dim \mathrm{Im}(T) = 5$ ou seja 5 seria um número par, o que é absurdo.

(b) *Verdadeira.* Nas condições indicadas, $W \neq \varnothing$; considerando $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in W$ e $\alpha = 1$, concluí-se que $\mathrm{x} + \mathrm{y} \in W$; e, finalmente, considerando $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\mathrm{x} \in W$ tem-se que $\alpha\mathrm{x} = \alpha\mathrm{x} + \mathbb{0} \in W$. Assim, $W \leqslant V$.

(c) *Verdadeira.* Nas condições indicadas tem-se que, considerando $W = L_V(X) = L_V(Y)$, que $\dim W$ não é superior à quantidade de elementos de X. Se Y fosse linearmente independente então existiria em W um conjunto linearmente independente de vectores, com mais vectores que a dimensão do espaço e isso, como se sabe não pode acontecer.

(d) *Falsa.* Considerando por exemplo $X = \{(1,1)\}$ e $Y = \{(-1,-1)\}$ tem-se que $X \cap Y = \varnothing$. Tem-se assim que

$$L_{\mathbb{R}^2}(\{(1,1)\}) = L_{\mathbb{R}^2}(\{(1,1)\}) \cap L_{\mathbb{R}^2}(\{(-1,-1)\}) \neq L_{\mathbb{R}^2}(\varnothing) = \{(0,0)\}.$$

(e) *Falsa.* A união $\boldsymbol{\beta}_U \cup \boldsymbol{\beta}_W$ é seguramente um conjunto gerador de $U+W$ mas não é necessariamente linearmente independente. Por exemplo, considerando $U = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$, $\boldsymbol{\beta}_U = ((1,0,0),(0,1,0))$, $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(0,-1,0),(0,0,1)\})$ e $\boldsymbol{\beta}_W = ((0,-1,0),(0,0,1))$ é claro que $\boldsymbol{\beta}_U \cup \boldsymbol{\beta}_W$ não é linearmente independente.

2.

(a) Tem-se que,

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}(A) &= \{(x,y,z,w) \mid x - z + w = 0\} = \\ &= \{(x,y,z,-x+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \\ &= L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,0,-1),(0,1,0,0),(0,0,1,1))\}). \end{aligned}$$

Como aquele conjunto gerador é obtido por separação de variáveis é também uma base de $\mathrm{Nuc}(A)$.

(b) Considerando a mtriz

$$\begin{bmatrix} U \mid -W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se que $\mathrm{Nuc}([U|-W]) = L_{\mathbb{R}^5}(\{(-1,2,0,1,2)\})$. Assim, $U \cap W = L_{\mathbb{R}^4}(\{\mathrm{x}\})$, onde

$$\mathrm{x} = [U]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Como se constata por simples observação as colunas de $\boldsymbol{B}$ são linearmente independentes. Resulta assim da relação:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

que $\dim(U \cap W) = 4$. Assim $U + W = \mathbb{R}^4$. No entanto, a intersecção $U \cap W$ não é trivial pelo que a soma não é directa.

(d) É fácil constatar que a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica 4 pelo que as suas colunas são linearmente independentes. Considerando

$$S = L_{\mathbb{R}^4}(\{(0,0,0,1)\}),$$

tem-se que $\mathbb{R}^4 = U + S$. Por outro lado, $(0,0,0,1) \notin U$ e assim $U \cap S = \{\mathbb{0}\}$ pelo que $\mathbb{R}^4 = U \oplus S$.

3.

(a) Tem-se que $(0,1,1)$ é o terceiro vector de $\boldsymbol{\beta}$ pelo que, considerando a terceira coluna de $[T]_\beta$ concluímos que $T(0,1,1)_\beta = (1,1,1)$. Assim,

$$T(0,1,1) = (1,-1,0) + (1,1,0) + (0,1,1) = (2,1,1).$$

(b) Tem-se que $\dim(\text{Nuc}(T)) = \dim(\text{Nuc}(A))$. A transformação será injectiva se e só se $\dim(\text{Nuc}(A)) = \text{nul}(A) = 0$. Procedendo à eliminação de Gauss, cocluímos que $\text{car}(A) = 2$ pelo que $\text{nul}(A) = 1$ e assim T não é injectiva.

(c) Tem-se que $\text{Im}(T) = \text{EC}(A)^\beta$. Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Concluímos então que $\text{Im}(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,1)^\beta, (1,-1,3)^\beta\})$. Já vimos anteriormente que $(1,1,1)^\beta = (2,1,1)$, por outro lado, $(1,-1,3)^\beta = (1,-1,0) - (1,1,0) + 3(0,1,1) = (0,1,3)$. Assim: $\text{Im}(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(2,1,1),(0,1,3)\})$.

(d) Tem-se que

$$[T]_{\beta_c} = M_{\beta_c,\beta}[T]_\beta M_{\beta,\beta_c} = M_{\beta_c,\beta}[T]_\beta M^{-1}_{\beta_c,\beta}.$$

Ora,

$$M_{\beta_c,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$M_{\beta,\beta_c} = M^{-1}_{\beta_c,\beta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

pelo que:

$$[T]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente:

$$T(x, y, z) = T(x, y, z)_{\beta_c} = [T]_{\beta_c}(x, y, z)_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x - y + 3z \\ x + z \\ 2x + y \end{bmatrix} = (x - y + 3z, x + z, 2x + y).$$

AL–TESTE 2–11MAI—VERSÃO C

1. Classifique como *verdadeira* ou *falsa* cada uma das afirmações seguintes:

   (a) Se $\dim(V) = 5$ não pode existir uma transformação linear $T : V \to V$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Nuc}(T)$.

   (b) Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e W é um subconjunto não vazio de V tal que $(\forall \alpha \in \mathbb{K})(\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W)\alpha \mathrm{x} + \mathrm{y} \in W$ então W é subespaço de V.

   (c) Sejam, V um espaço linear, U, W subespaços de V e $\boldsymbol{\beta}_U, \boldsymbol{\beta}_W$ base de U e W, respectivamente. Neste caso $\boldsymbol{\beta}_U \cup \boldsymbol{\beta}_W$ é uma base de $U + W$.

   (d) Sendo V é um espaço linear, se U e W são subespaços de V tais que $\dim(U) \leq \dim(W)$ então $U \subset W$.

   (e) Se V é um espaço linear e U_1, U_2 são subespaços de V para os quais se tem $V = U_1 \cup U_2$ então, ou $V = U_1$ ou $V = U_2$.

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Sejam $U = \mathrm{Nuc}(A)$ e $W = \mathrm{EC}(B)$.

   (a) Determine uma base de U.

   (b) Determine um conjunto gerador de $U \cap W$.

   (c) **Justifique** que $U + W = \mathbb{R}^4$ mas que a soma não é directa.

   (d) Indique **justificadamente** um subespaço $S \leqslant \mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus S = \mathbb{R}^4$.

3. Sejam, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, uma transformação linear,

$$\boldsymbol{\beta} = ((1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

   uma base de $\mathbb{R}^3$ e,

$$A = [T]_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   a matriz que representa T relativamente à base $\boldsymbol{\beta}$.

   (a) Determine $T(1, 1, 0)$.

   (b) A transformação T é sobrejectiva? **Justifique!**

   (c) Determine $\mathrm{Nuc}(T)$.

   (d) Sendo $\boldsymbol{\beta}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ determine $B = [T]_{\boldsymbol{\beta}_c}$ e use esta matriz para calcular $T(x, y, z)$.

Correcção da versão C

1.

(a) *Verdadeira.* Se $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Nuc}(T)$ então $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathrm{Nuc}(T)$. Como $5 = \dim V = \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \mathrm{Nuc}(T)$, ter-se-ia $2 \dim \mathrm{Im}(T) = 5$ ou seja 5 seria um número par, o que é absurdo.

(b) *Verdadeira.* Nas condições indicadas, $W \neq \emptyset$; considerando $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in W$ e $\alpha = 1$, concluí-se que $\mathrm{x} + \mathrm{y} \in W$; e, finalmente, considerando $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\mathrm{x} \in W$ tem-se que $\alpha\mathrm{x} = \alpha\mathrm{x} + \mathbb{0} \in W$. Assim, $W \leqslant V$.

(c) *Falsa.* A união $\boldsymbol{\beta}_U \cup \boldsymbol{\beta}_W$ é seguramente um conjunto gerador de $U + W$ mas não é necessariamente linearmente independente. Por exemplo, considerando $U = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$, $\boldsymbol{\beta}_U = ((1,0,0),(0,1,0))$, $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(0,-1,0),(0,0,1)\})$ e $\boldsymbol{\beta}_W = ((0,-1,0),(0,0,1))$ é claro que $\boldsymbol{\beta}_U \cup \boldsymbol{\beta}_W$ não é linearmente independente.

(d) *Falsa.* Em $\mathbb{R}^3$ a recta $U = L_{\mathbb{R}^3}(\{(0,0,1)\})$ tem dimensão inferior à do plano $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$. Mas a recta não está contida no plano.

(e) *Verdadeira.* A única circunstância em que a união de dois subespaços resulta num subespaço é quando um dos subespaços está contido no outro.

2.

(a) Tem-se que,

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}(A) &= \{(x,y,z,w) \mid x - z + w = 0\} = \\ &= \{(x,y,z,-x+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \\ &= L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,0,-1),(0,1,0,0),(0,0,1,1))\}).\end{aligned}$$

Como aquele conjunto gerador é obtido por separação de variáveis é também uma base de $\mathrm{Nuc}(A)$.

(b) Considerando a mtriz

$$\begin{bmatrix} U \mid -W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se que $\mathrm{Nuc}([U|-W]) = L_{\mathbb{R}^5}(\{(-1,2,0,1,2)\})$. Assim, $U \cap W = L_{\mathbb{R}^4}(\{\mathrm{x}\})$, onde

$$\mathrm{x} = [U]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Como se constata por simples observação as colunas de B são linearmente independentes. Resulta assim da relação:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

que $\dim(U \cap W) = 4$. Assim $U + W = \mathbb{R}^4$. No entanto, a intersecção $U \cap W$ não é trivial pelo que a soma não é directa.

(d) É fácil constatar que a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica 4 pelo que as suas colunas são linearmente independentes. Considerando

$$S = L_{\mathbb{R}^4}(\{(0,0,0,1)\}),$$

tem-se que $\mathbb{R}^4 = U + S$. Por outro lado, $(0,0,0,1) \notin U$ e assim $U \cap S = \{\mathbb{0}\}$ pelo que $\mathbb{R}^4 = U \oplus S$.

3.

(a) Tem-se que $(1,1,0)$ é o segundo vector da base β, pelo que consultando a segunda coluna de A, concluímos que $T(1,1,0)_\beta = (1,-1,0)$, pelo que $T(1,1,0) = (1,-1,0) - (1,1,0) = (0,-2,0)$.

(b) A transformação é sobrejectiva se e só se

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{car}(A).$$

Procedendo à eliminação de Gauss constata-se facilmente que a matriz tem característica 2 pelo que T não é sobrejectiva.

(c) Tem-se que $\mathrm{Nuc}(T) = \mathrm{Nuc}(A)^\beta$. Procedendo à eliminação de Gauss obtém-se:

$$\mathrm{Nuc}(A) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1,0,1)\}).$$

Assim $\mathrm{Nuc}(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1,0,1)^\beta\})$ e, como

$$(-1,0,1)^\beta = -(1,-1,0) + (0,1,1) = (-1,2,1)$$

tem-se finalmente que $\mathrm{Nuc}(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1,2,1)\})$.

(d) Tem-se que

$$[T]_{\beta_c} = M_{\beta_c,\beta}[T]_\beta M_{\beta,\beta_c} = M_{\beta_c,\beta}[T]_\beta M^{-1}_{\beta_c,\beta}.$$

Ora,

$$M_{\beta_c,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$M_{\beta,\beta_c} = M^{-1}_{\beta_c,\beta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

pelo que:

$$[T]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente:

$$T(x,y,z) = T(x,y,z)_{\beta_c} = [T]_{\beta_c}(x,y,z)_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x - y + 3z \\ -2y + 4z \\ x - y + 3z \end{bmatrix} = (x - y + 3z, -2y + 4z, x - y + 3z).$$