DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Álgebra Linear (Teste 3)

Duração: 90 minutos

05.06.2021, 09:30, Anfiteatro 1

Reservado ao docente

1.(a)	0.5	
1.(b)	0.5	
2.(a)	1.0	
2.(b)	1.0	
2.(c)	0.5	
2.(d)	0.5	
3.(a)	0.5	
3.(b)	0.5	
3.(c)	0.5	
3.(d)	0.5	
4.(a)	0.5	
4.(b)	0.5	
4.(c)	0.5	
4.(d)	0.5	
4.(e)	0,5	
5.(a)	0.5	
5.(b)	0.5	
5.(c)	0,5	
Total		

A preencher pelo aluno

Nome

Número

Instruções

O teste tem a duração de 90 minutos e durante a sua realização não será possível abandonar a sala excepto entregando a resolução (não havendo a possibilidade de retomar a resolução posteriormente).

Não é permitida a consulta nem a utilização de quaisquer meios electrónicos (em particular os telemóveis têm que estar desligados ou em modo de vôo e fora do alcance dos alunos.

A não observância desta regras bem como qualquer tentativa de fraude de outro tipo têm como consequência imediata a anulação da prova (o que não invalida a comunicação do incidente a instâncias superiores, com eventuais consequências disciplinares).

Enunciado

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{bmatrix}.$$

   (a) Sem calcular os determinantes mostre que:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

   (b) Determine os valores de x para os quais $A^\top$ é singular.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que o conjunto dos valores próprios de A é $\{0, 2\}$.

   (b) Indique, justificando, as multiplicidades algébricas e geométricas de cada um dos valores próprios de A.

   (c) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ consistindo apenas de vectores próprios de A.

   (d) Indique matrizes D (diagonal) e P (invertível) tais que $D = P^{-1}AP$.

3. Relativamente a uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sabe-se que é diagonalizável, o conjunto dos valores próprios é $\{-1, 1\}$ e a multiplicidade geométrica do valor próprio -1 é 1. Indique (**sem justificar**):

   (a) $c_A(t)$ (o polinómio característico de A);

   (b) $m_{\text{geo}}(1)$ (a multiplicidade geométrica do valor próprio 1);

   (c) o polinómio mínimo de A;

   (d) A^{-1} expressa em função de A.

4. Considere o espaço $\mathbb{R}^4$ equipado com o produto interno canónico. Considere $\mathrm{x} = (1, 1, 1, 1)$ e $\boldsymbol{U}$ o espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine uma base ortogonal de $\boldsymbol{U}$.

   (b) Determine uma base de $\boldsymbol{U}^\perp$ (o complemento ortogonal de $\boldsymbol{U}$).

   (c) O vector $(1, 1, 1, 0) \in \boldsymbol{U}$ é o elemento de $\boldsymbol{U}$ mais próximo de x? Justifique!

   (d) Determine $d(\mathrm{x}, \boldsymbol{U}^\perp)$ (a distância de x a $\boldsymbol{U}^\perp$).

   (e) Indique vectores $\mathrm{u} \in \boldsymbol{U}$ e $\mathrm{w} \in \boldsymbol{U}^\perp$ tais que $\mathrm{x} = \mathrm{u} + \mathrm{w}$.

5. Considere o espaço $\mathbb{R}^{2\times 2}$ da matrizes reais 2×2. Considere ainda a matriz

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Seja $\boldsymbol{\beta}$ a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (a) Mostre que $\langle A, B \rangle = A_{\boldsymbol{\beta}}^\top G B_{\boldsymbol{\beta}}$ define um produto interno em $\mathbb{R}^{2\times 2}$. (Recorde que $A_{\boldsymbol{\beta}}$ é o vector de coordenadas de A na base $\boldsymbol{\beta}$.)

   (b) Relativamente ao produto interno definido na alínea (a) os vectores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   são ortogonais? Justifique!

   (c) Considerando as matrizes A, B da alínea anterior e o produto interno definido na alínea (a), determine o complemento ortogonal de $L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}(\{A, B\})$.

Resolução

1.(a) Somando a segunda linha à primeira e depois disso a terceira linha à primeira tem-se:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & 4 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix}$$

por fim, subtraindo a primeira coluna às colunas 2 e 3, obtém-se:

$$(x+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

1.(b) A matriz $A^\top$ é singular precisamente quando $|A^\top) = |A| = 0$. Da alínea (a) resulta que $|A| = (x+4)(x-1)(x-3)$ que se anula quando $x \in \{-4, 1, 3\}$.

2.(a) Temos que

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & -1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -(t.2) \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = -(t-2)^2 t.$$

Conclui-se assim que os valores próprios de A são 0 e 2.

2.(b) Considerando a factorização irredutível de $c_A(t)$ tem-se que $m_{\text{alg}}(0) = 1$ e $m_{\text{alg}}(2) = 2$. Determinando os espaços próprios associados a cada um dos valores próprios obtemos:

$$E_A(0) = \text{Nuc}(A) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,1)\})$$

e

$$E_A(0) = \text{Nuc}(A - 2\mathbb{1}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1,0,1),(0,1,0)\}).$$

Concluímos então que $m_{\text{geo}}(0) = 1$ e $m_{\text{geo}}(2) = 2$.

2.(c) Unido as bases dos espaços próprios obtemos um conjunto linearmente independente, $\{(1,0,1),(-1,0,1),(0,1,0)\}$ que, tendo 3 vectores é necessariamente uma base de $\mathbb{R}^3$.

2.(d) Podemos considerar:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.(a) O polinómio característico tem que ser $c_A(t) = -(t-1)^2(t+1)$.

3.(b) Tem-se que $m_{\text{geo}}(1) = 2$.

3.(c) Uma vez que A é diagonalizável, o polinómio mínimo de A é

$$m_A(t) = (t-1)(t+1) = t_1^2.$$

3.(d) Como $m_A(A) = \mathbb{0}$ tem-se que $A^2 - \mathbb{1} = \mathbb{0}$ ou seja $A^2 = \mathbb{1}$. Assim, $A^{-1} = A$.

4.(a) Podemos usar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, consideraremos a lista inicial $\mathrm{u}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\mathrm{u}_2 = (1, 1, 1, 0)$ e $\mathrm{u}_3 = (0, 1, 0, 1)$. Note-se que $\mathrm{u}_1 \perp \mathrm{u}_2$ pelo que $\mathrm{u}_1^* = \mathrm{u}_1$ e $\mathrm{u}_2^* = \mathrm{u}_2$. Por fim,

$$\mathrm{u}_3^* = (0,1,0,1) - (\mathrm{Proj}_{(1,-1,0,0)}(0,1,0,1) + \mathrm{Proj}_{(1,1,1,0)}(0,1,0,1)) =$$
$$= (0,1,0,1) - \left(-\frac{1}{2}(1,-1,0,0) + \frac{1}{3}(1,1,1,0) \right) =$$
$$= (0,1,0,1) - (-1/6, 5/6, 2/6, 0) = (1/6, 1/6, -2/6, 1).$$

Assim, uma base ortogonal para $\mathrm{EC}(A)$ pode ser

$$\{(1,-1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,-2,6)\}.$$

4.(b) Uma vez que estamos a lidar com o produto interno canónico em $\mathbb{R}^4$, tem-se que $U^\perp = \mathrm{Nuc}(A^\top)$. Ou seja,

$$U^\perp = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L_{\mathbb{R}^4}(\{(-1,-1,2,1)\}).$$

Uma base de $U^\perp$ consiste assim do vector $(-1,-1,2,1)$.

4.(c) O elemento de U mais próximo de $\mathrm{x} = (1,1,1,1)$ é a sua projecção sobre U. Tem-se, portanto, que $(1,1,1,0)$ é em U o elemento mais próximo de $(1,1,1,1)$ se e só se

$$(1,1,1,0) = \mathrm{Proj}_U(1,1,1,1) = (1,1,1,1) - \mathrm{Proj}_{U^\perp}(1,1,1,1) =$$
$$(1,1,1,1) - \mathrm{Proj}_{(-1,-1,2,1)}(1,1,1,1) = (1,1,1,1) - \frac{1}{7}(-1,-1,2,1) =$$
$$= (8/7, 8/7, 5/7, 6/7),$$

pelo que a resposta à questão é negativa.

4.(d) Tem-se que

$$d(\mathrm{x}, U^\perp) = \|\mathrm{Proj}_U \mathrm{x}\| = \|\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_{U^\perp}\mathrm{x}\|.$$

Basta agora usar os cálculos da alínea precedente, onde calculámos $\mathrm{Proj}_{U^\perp}\mathrm{x}$.

4.(e) Como se sabe $\mathrm{u} = \mathrm{Proj}_U \mathrm{x}$ e $\mathrm{w} = \mathrm{Proj}_{U^\perp}\mathrm{x}$. Assim,

$$\mathrm{x} = (\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_{U^\perp}\mathrm{x}) + \mathrm{Proj}_{U^\perp}\mathrm{x}.$$

5.(a) Para que a expressão indicada determine um produto interno em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é condição necessária e suficiente que G seja simétrica i.e., $G = G^\top$(o que obviamente acontece) e que os seu valores próprios sejam todos positivos. Tem-se:

$$c_G(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} =$$

$$= (t-1)^2 \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = (t-1)^2(t^2-4t+2).$$

que só tem raízes positivas.

5.(b) Tem-se:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0,$$

pelo que as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são ortogonais.

4.(c) Trabalhando no espaço de coordenadas procuramos vectores (x, y, z, w) tais que, do ponto de vista do produto interno determinado por $\boldsymbol{G}$ se tenha que (x, y, z, w) seja ortogonal a $(1, 0, 1, 1)$ e a $(1, 0, 0, -1)$. Ou seja,

$$0 = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3x + z + 3w,$$

$$0 = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = x - w,$$

Ou seja, os vectores de coordenadas dos elementos em $\boldsymbol{L}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}(\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\})^{\perp}$ são os vectores (x, y, z, w) que satisfazem as condições $3x+z+3w = 0$ e $x-w = 0$ ou seja $w = x$ e $z = -4x$. São portanto os vectores da forma $(x, y, -4x, x)$ vectores estes que constituem um subespaço de $\mathbb{R}^4$ que tem como base o conjunto $\{(1, 0, -4, 1), (0, 1, 0, 0)\}$. Concluímos então que:

$$\boldsymbol{L}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}(\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\})^{\perp} = \boldsymbol{L}_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$