DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Álgebra Linear (Recuperação)

21.06.2021, 11:30 **Anfiteatro 2**

Duração [(T1+T2) ou T3]: 90 minutos
Duração [T1+T2+T3]: 180 minutos

Reservado ao docente

T1+T2

01.(a)	1.0	
01.(b)	0.5	
01.(c)	1.0	
01.(d)	0.5	
02.	0.5	
03.(a)	1.0	
03.(b)	1.0	
03.(c)	0.5	
03.(d)	0.5	
04.(a)	1.0	
04.(b)	1.0	
04.(c)	0.5	
04.(d)	0.5	
04.(e)	0.5	

T3

01	1.0	
02.(a)	1.0	
02.(b)	0.5	
02.(c)	1.0	
02.(d)	0.5	
02.(e)	0.5	
03.(a)	1.0	
03.(b)	0.5	
03.(c)	1.0	
03.(d)	1.0	
03.(e)	0.5	
03.(f)	0.5	
04.(a)	0.5	
04.(a)	0.5	

A preencher pelo aluno

Nome

Número

Tenta recuperar (escolha a opção correcta):

T1+T2 **T3** **T1+T2+T3**

INSTRUÇÕES.
Não é permitida a consulta nem a utilização de quaisquer meios electrónicos (em particular os telemóveis têm que estar desligados ou em modo de vôo e fora do alcance dos alunos. A não observância desta regras bem como qualquer tentativa de fraude de outro tipo têm como consequência imediata a anulação da prova (o que não invalida a comunicação do incidente a instâncias superiores, com eventuais consequências disciplinares). **Passados 90 minutos do início da prova** os alunos que tentam melhorar T1+T2 ou T3 têm que entregar as suas respostas e terão que abandonar a sala. **Todos aqueles que permanecerem para além desse momento estarão obrigatoriamente a tentar recuperar T1+T2+T3.**

T1+T2

Álgebra Linear

Exame

21.06.2021, 11:30,
Anfiteatro 2

Duração
T1+T2: 90 minutos
T3: 90 minutos
T1+T2+T3: 180 minutos

01. Considere

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{bmatrix}.$$

(a) Considere $\alpha = 0$ e resolva o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ (exprima a solução em função de β.)

(b) Determine, ou mostre que não pode existir, um par (α, β) tal que o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ seja indeterminado com grau de indeterminação 1.

(c) Considere $\alpha = -1$ e determine a inversa de A.

(d) Continuando a considerar $\alpha = -1$, e usando o resultado da alínea anterior, determine, em função de β a solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$.

02. Resolva em ordem a X a equação matricial $(AXA^{-1} + \mathbb{1})^{\top} = A$. (Exprima a solução em função de A.)

03. Seja $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,-1,0,1)(0,1,1,0),(-1,2,1,-1),(1,0,1,1)\})$.

(a) Determine uma base de U.

(b) Ter-se-á que $(1,1,1,1) \in U$? **Justifique!**

(c) Indique uma matriz A tal que $(x,y,z,w) \in U$ se e só se $(x,y,z,w) \in \mathrm{Nuc}(A)$.

(d) Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim(U \cap W) = 1$. Indique uma condição suficiente para que $U + W = \mathbb{R}^4$. **Justifique!**

04. Considere o espaço $\mathbb{R}_2[t]$ dos polinómios de grau ≤ 2 em t e as bases $\boldsymbol{\beta} = (1, 1+t, 1+t^2)$ e a base canónica $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{can}} = (1, t, t^2)$. Seja ainda $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine as matrizes $M_{\beta,\beta_{\mathrm{can}}}$ e $M_{\beta_{\mathrm{can}},\beta}$, de mudança da base canónica para a base $\boldsymbol{\beta}$ e da base $\boldsymbol{\beta}$ para a base canónica, respectivamente.

(b) Determine $[T]_{\beta_{\mathrm{can}}}$.

(c) Determine uma base da imagem de T.

(d) A transformação T é injectiva? **Justifique!**

(e) Indique uma transformação linear $S : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ tal que $(1,0,1) \in \mathrm{Im}(ST)$.

T3 no verso ⟶

T3

01. Calcule

$$\begin{vmatrix} x & x & a & b \\ x & x & c & d \\ e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e verifique que este determinante não depende de x.

02. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine $c_A(t)$, o polinómio característico de A.

(b) Qual o número mínimo de espaços próprios devemos calcular para poder decidir se A é diagonalizável? **Justifique!**

(c) Determine, se existirem, ou mostre que não existem, matrizes P, invertível, e D, diagonal, tais que $A = P^{-1}DP$.

(d) Indique o polinómio mínimo de A.

(e) Recorra ao polinómio mínimo para decidir se A é ou não invertível e em caso afirmativo exprima A^{-1} em função de A. Em alternativa, em lugar de usar o polinómio mínimo recorra ao teorema de Cayley-Hamilton.

03. Considere o espaço $\mathbb{R}_2[t]$ dos polinómios de grau ≤ 2 e a função

$$\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \rangle = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + a_2 b_2. \qquad (1)$$

Consideremos ainda $W = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1 - t, 1 + t\})$.

(a) Mostre que a função definida em (1) é um produto interno. **Nas alíneas seguintes considere o produto interno definido em (1).**

(b) Determine a norma dos vectores $1 - t$ e $1 + t$ e o ângulo entre estes dois vectores.

(c) Determine uma base ortogonal de W.

(d) Determine a distância de $1 + t$ ao vector de W mais próximo de t^2.

(e) Determine um subespaço U de $\mathbb{R}_2[t]$ tal que $\mathbb{R}_2[t] = W \oplus U$.

(f) Sabendo que o conjunto X dos vectores cuja distância a W é 1, é da forma $\{\mathrm{u}_0 + \mathrm{w} \mid \mathrm{w} \in W\} \cup \{\mathrm{u}_1 + \mathrm{w} \mid \mathrm{w} \in W\}$ para certos $\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1 \in \mathbb{R}_2[t]$, determine os vectores u_0 e u_1.

04. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Mostre que $A^2 + A + \mathbb{1} \neq \mathbb{0}$.

(b) Se as linhas de A constituem um conjunto ortonormado, mostre que $\det(A) = \pm 1$.

01. Considere

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{bmatrix}.$$

(a) Considere $\alpha = 0$ e resolva o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ (exprima a solução em função de β.)

(b) Determine, ou mostre que não pode existir, um par (α, β) tal que o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ seja indeterminado com grau de indeterminação 1.

(c) Considere $\alpha = -1$ e determine a inversa de A.

(d) Continuando a considerar $\alpha = -1$, e usando o resultado da alínea anterior, determine, em função de β a solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$.

02. Resolva em ordem a X a equação matricial $(AXA^{-1} + \mathbb{1})^{\top} = A$. (Exprima a solução em função de A.)

03. Seja $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,-1,0,1),(0,1,1,0),(-1,2,1,-1),(1,0,1,1)\})$.

(a) Determine uma base de U.

(b) Ter-se-á que $(1,1,1,1) \in U$? **Justifique!**

(c) Indique uma matriz A tal que $(x, y, z, w) \in U$ se e só se $(x, y, z, w) \in \mathrm{Nuc}(A)$.

(d) Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim(U \cap W) = 1$. Indique uma condição suficiente para que $U + W = \mathbb{R}^4$. **Justifique!**

04. Considere o espaço $\mathbb{R}_2[t]$ dos polinómios de grau ≤ 2 em t e as bases $\boldsymbol{\beta} = (1, 1+t, 1+t^2)$ e a base canónica $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{can}} = (1, t, t^2)$. Seja ainda $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine as matrizes $M_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{can}}}$ e $M_{\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{can}},\boldsymbol{\beta}}$, de mudança da base canónica para a base $\boldsymbol{\beta}$ e da base $\boldsymbol{\beta}$ para a base canónica, respectivamente.

(b) Determine $[T]_{\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{can}}}$.

(c) Determine uma base da imagem de T.

(d) A transformação T é injectiva? **Justifique!**

(e) Indique uma transformação linear $S : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ tal que $(1,0,1) \in \mathrm{Im}(ST)$.

01. Calcule

$$\begin{vmatrix} x & x & a & b \\ x & x & c & d \\ e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

e verifique que este determinante não depende de x.

02. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine $c_A(t)$, o polinómio característico de A.

(b) Qual o número mínimo de espaços próprios devemos calcular para poder decidir se A é diagonalizável? **Justifique!**

(c) Determine, se existirem, ou mostre que não existem, matrizes P, invertível, e D, diagonal, tais que $A = P^{-1}DP$.

(d) Indique o polinómio mínimo de A.

(e) Recorra ao polinómio mínimo para decidir se A é ou não invertível e em caso afirmativo exprima A^{-1} em função de A. Em alternativa, em lugar de usar o polinómio mínimo recorra ao teorema de Cayley-Hamilton.

03. Considere o espaço $\mathbb{R}_2[t]$ dos polinómios de grau ≤ 2 e a função

$$\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \rangle = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + a_2 b_2. \qquad (1)$$

Considere ainda $W = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1 - t, 1 + t\})$.

(a) Mostre que a função definida em (1) é um produto interno. **Nas alíneas seguintes considere o produto interno definido em (1).**

(b) Determine a norma dos vectores $1 - t$ e $1 + t$ e o ângulo entre estes dois vectores.

(c) Determine uma base ortogonal de W.

(d) Determine a distância de $1 + t$ ao vector de W mais próximo de t^2.

(e) Determine um subespaço U de $\mathbb{R}_2[t]$ tal que $\mathbb{R}_2[t] = W \oplus U$.

(f) Sabendo que o conjunto X dos vectores cuja distância a W é 1, é da forma $\{\mathrm{u}_0 + \mathrm{w} \mid \mathrm{w} \in W\} \cup \{\mathrm{u}_1 + \mathrm{w} \mid \mathrm{w} \in W\}$ para certos $\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1 \in \mathbb{R}_2[t]$, determine os vectores u_0 e u_1.

04. Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Mostre que $A^2 + A + \mathbb{1} \neq \mathbb{0}$.

(b) Se as linhas de A constituem um conjunto ortonormado, mostre que $\det(A) = \pm 1$.

Resolução de T1+T2

01. Comecemos por proceder à eliminação de Gauss da matriz aumentada. Para simplificar a eliminação de Gauss iremos trocar as colunas 1 e 3 na matriz dos coeficientes (como se sabe isso corresponde apenas a reordenar as variáveis do sistema e não altera a sua natureza):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \alpha+1 & \beta^2 \end{array}\right] \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & \beta \\ \alpha+1 & 1 & 1 & \beta^2 \end{array}\right] \end{array}$$

A primeira coluna diz agora respeito à variável z, a segunda à variável y, e a terceira à variável x. Continuando:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & \beta \\ \alpha+1 & 1 & 1 & \beta^2 \end{array}\right] \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & \beta-1 \\ 0 & -\alpha & -\alpha(\alpha+2) & \beta^2-(\alpha+1) \end{array}\right] \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & \beta-1 \\ 0 & 0 & -\alpha(\alpha+3) & \beta^2-(\alpha+1)+\beta-1 \end{array}\right] \end{array}.$$

(a) Considerando $\alpha = 0$ e usando a eliminação de Gauss anterior tem-se que

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & (\beta-1)(\beta+2) \end{array}\right]$$

Para $\beta \neq 1$ o sistema é impossível e se $\beta = 1$ tem-se que o conjunto solução do sistema é

$$\{(x,y,z) \mid z+y+x=1\} = \{(x,y,1-y-x) \mid x,y \in \mathbb{R}\}.$$

(b) A única hipótese de o sistema ter grau de indeterminação 1 é quando a matriz dos coeficientes tem característica 2 e o sistema é possível. Tendo em conta a eliminação de Gauss inicial, isso implica que $\alpha = -3$ (caso contrário a matriz dos coeficientes ou tem característica 1 ou característica 3). Fazendo $\alpha = -3$ obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2+\beta+1 \end{array}\right]$$

Mas nenhum destes sistemas é possível porque $\beta^2+\beta+1 \neq 0$ para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$. Assim não existe nenhum par (α, β) como o pretendido.

(c) Para $\alpha = -1$ obtemos a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Recorrendo ao algoritmo usual para a determinação da inversa obtem-se:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) A solução de $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, quando A é invertível obtém-se considerando que

$$A\mathrm{x} = \mathrm{b} \Leftrightarrow \mathrm{x} = A^{-1}\mathrm{b}.$$

Assim, a solução é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1+\beta+\beta^2 \\ 1-\beta+\beta^2 \\ 1+\beta-\beta^2 \end{bmatrix}.$$

02. Tem-se:

$$(AXA^{-1} + \mathbb{1})^\top = A \Leftrightarrow AXA^{-1} + \mathbb{1} = A^\top \Leftrightarrow AXA^{-1} = A^\top - \mathbb{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow XA^{-1} = A^{-1}A^\top - A^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}A^\top A - \mathbb{1}.$$

03. Tendo em conta que é possível responder com uma única eliminação de Gauss às questões (a) e (b) e (c), optamos por colocar os geradores de U como colunas de uma matriz, e verificar em que condições, o sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & x \\ -1 & 1 & 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 0 & -1 & 1 & w \end{array}\right] \tag{2}$$

é possível. Procedendo à eliminação de Gauss, obtemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & x \\ -1 & 1 & 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 0 & -1 & 1 & w \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x+w \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x-y+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x+w \end{array}\right].$$

(a) Tendo em conta a eliminação de Gauss anterior, os pivôs na matriz dos coeficientes ocorrem nas colunas 1 e 2. Tendo em conta que as colunas dessa matriz são os geradores de U concluí-se que uma base de U consiste nos vectores $(1, -1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1, 0)$.

(b) Tem-se $(x, y, z, w) \in U$ se e só se (2) é possível, o que acontece se e só se $-x - y + z = 0$ e $-x + w = 0$. Como as componentes do vector $(1, 1, 1, 1)$ não satisfazem uma destas condições, concluímos que $(1, 1, 1, 1) \notin U$.

(c) Um vector $(x, y, z, w) \in U$ se e só se $-x - y + z = 0$ e $-x + w = 0$ ou seja se e só se

$$(x, y, z, w) \in \text{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\right)$$

(d) Admitindo que $\dim(U \cap W) = 1$ e sabendo que $\dim U = 2$, se se tiver que $\dim W = 3$ resulta, do teorema da dimensão que:

$$\dim(U + W) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4),$$

pelo que, neste caso, $U + W = \mathbb{R}^4$.

04.

(a) Tem-se que:

$$M_{\beta_{\text{can}},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\beta,\beta_{\text{can}}} = M^{-1}_{\beta_{\text{can}},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Temos que:

$$[T]_{\beta_{\text{can}}} = M_{\beta_{\text{can}},\beta}[T]_\beta M_{\beta,\beta_{\text{can}}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Tem-se que $\text{Im}(T) = (\text{EC}([T]_{\beta_{\text{can}}})^{\beta_{\text{can}}}$. Assim,

$$\text{Im}(T) = \left(L_{\mathbb{R}^3}(\{(2, 2, -1), (2, 0, 1)\})\right)^{\beta_{\text{can}}} = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{2 + 2t - t^2, 2 + t^2\}).$$

(d) Considerando uma das representações matriciais (por exemplo $[T]_\beta$) tem-se que a nulidade de $[T]_\beta$ é pelo menos 1, assim a transformação não pode ser injectiva pois possui um núcleo não trivial.

(e) Não é difícil estender a base de $\text{Im}(T)$ para obter uma base de $\mathbb{R}_2[t]$. Por exemplo, $\{1, 2 + 2t - t^2, 2 + t^2\}$ é uma base de $\mathbb{R}_2[t]$. A transformação S pode, por exemplo, ser aquela que é caracterizada pelas condições:

$$S(1) = S(2 + 2t - t^2) = (0, 0, 0) \quad \text{e} \quad S(2 + t^2) = (1, 0, 1).$$

(Usamos aqui o facto de ser possível definir uma transformação linear (de forma unívoca) definido as imagens dos vectores de uma base do espaço de partida.)

Resolução de T3

01. Tem-se:

$$\begin{vmatrix} x & x & a & b \\ x & x & c & d \\ e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \end{vmatrix} = -g \begin{vmatrix} x & a & b \\ x & c & d \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} x & a & b \\ x & c & d \\ e & 0 & 0 \end{vmatrix} = -gf \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + he \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

que não depende de x.

02.

(a) Tem-se que $c_A(t) = \det(A - t\mathbb{1})$. Assim:

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 1 & 2-t & 0 \\ 1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = -(t-1) \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = -(t-1)^2(t-3).$$

(b) Basta calcular $E_A(1)$ que pode ter dimensão 1 ou 2. Se tiver dimensão 1, a matriz A não é diagonalizável, se tiver dimensão 2 então A será diagonalizável.

(c) Calculando os espaços próprios temos:

$$E_A(1) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1,1,0),(0,0,1)\})$$

enquanto que

$$E_A(3) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,1)\}).$$

Desta forma tem-se que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) As duas possibilidades para o polinómio mínimo são $(t-1)^2(t-3)$ e $(t-1)(t-3)$. Visto que a matriz A é diagonalizável tem que se ter $m_A(t) = (t-1)(t-3) = t^2 - 4t + 3$.

(c) O polinómio mínimo tem A como raiz. Assim, $\mathbb{0} = m_A(A) = A^2 - 4A + 3\mathbb{1}$. Daqui resulta que $A(A - 4\mathbb{1}) = -3\mathbb{1}$ ou seja,

$$A\left(-\frac{1}{3}(A - 4\mathbb{1})\right) = \mathbb{1}.$$

Assim A é invertível e $A^{-1} = -3^{-1}(A - 4\mathbb{1})$.

03.

(a) Fixando a base canónica de $\mathbb{R}_2[t]$, a matriz de Gram associada à função dada é:

$$G = \begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,t\rangle & \langle 1,t^2\rangle \\ \langle t,1\rangle & \langle t,t\rangle & \langle t,t^2\rangle \\ \langle t^2,1\rangle & \langle t^2.t\rangle & \langle t^2.t^2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que:

$$\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2\rangle = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix};$$

por outro lado, a matriz G é simétrica e os seu valores próprios são todos positivos (1 e 2). Assim a função dada é um produto interno.

(b) Tem-se:

$$\|1-t\| = \sqrt{1^2 + 2(-1)^2} = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \|1+t\| = \sqrt{1^2 + 2\cdot 1^2} = \sqrt{3}.$$

Quanto ao ângulo entre os dois vectores:

$$\theta_{1-t,1+t} = \arccos\left(\frac{\langle 1-t, 1+t\rangle}{\|1-t\|\|1+t\|}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

(c) Recorrendo ao método de Gram-Schmidt podemos considerar os vectores $1+t$ e $(1-t) - \mathrm{Proj}_{1+t}(1-t)$. Tem-se que:

$$(1-t) - \mathrm{Proj}_{1+t}(1-t)) = (1-t) - \frac{\langle 1-t, 1+t\rangle}{\langle 1+t, 1+t\rangle}(1+t) = 1 - \frac{2}{3}t.$$

Uma base ortogonal de W pode então ser $\{1+t, 3-2t\}$.

(d) O vector de W mais próximo de t^2 é $\mathrm{Proj}_W t^2$. Tem-se,

$$\mathrm{Proj}_W t^2 = \mathrm{Proj}_{1+t} t^2 + \mathrm{Proj}_{3-2t} t^2,$$

usando a base ortogonal de W que determinámos anteriormente.
Tem-se então,

$$\mathrm{Proj}_W t^2 = \frac{\langle t^2, 1+t\rangle}{\langle 1+t, 1+t\rangle}(1+t) + \frac{\langle t^2, 3-2t\rangle}{\langle 3-2t, 3-2t\rangle}(3-2t) = 0$$

Assim $d(1+t, 0) = \|1+t-0\| = \|1+t\| = \sqrt{3}$.

(e) Basta considerar $U = W^\perp$. Tem-se que:

$$W^\perp = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid \langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, 1+t\rangle = 0 \wedge \langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, 3-2t\rangle = 0\} =$$

$$= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0 + 2a_1 = 0 \wedge 3a_0 - 4a_1 = 0\} =$$

$$= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0 = a_1 = 0\} = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{t^2\}).$$

(f) Os vectores u_0 e u_1 têm que ser os vectores de $W^\perp$ que têm norma 1. Como $\|t^2\| = 1$ e t^2 é um gerador de $W^\perp$, concluímos que $\mathrm{u}_0 = t^2$ e $\mathrm{u}_1 = -t^2$ (ou vice-versa).

04.

(a) Se se tivesse $A^2 + A + 1 = \mathbb{0}$ o polinómio mínimo de A seria um divisor $t^2 + t + 1$. Como este polinómio é real e não tem raízes, a única possibilidade é ter-se $m_A(t) = t^2 + t + 1$. No entanto, o polinómio característico tem pelo menos uma raiz real, porque é um polinómio de grau ímpar e assim, eta teria também que ser uma raiz de $t^2 + t + 1$, o que é impossível.

(b) Nas condições indicadas tendo em conta como se multiplicam matrizes e como se calcula o produto interno canónico, resulta que $AA^\top = \mathbb{1}$. Assim, $1 = |AA^\top| = |A||A^\top| = |A|^2$, pelo que as únicas possibilidades são $|A| = \pm 1$.