Versão A

1. Considere o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

   (a) **Indique** a característica de A.

   (b) **Indique** uma condição envolvendo a, b, c que caracterize os casos em que o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ é possível.

   (c) **Indique** o conjunto solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ quando $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

2. Classifique cada uma das afirmações seguintes como *verdadeira* ou *falsa*.

   (a) Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $BA = \mathbb{1}$ então $B^\top A^\top = \mathbb{1}$.

   (b) Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times r}$ $B \in \mathbb{R}^{r\times n}$. Se $AB = \mathbb{0}$ então $A = \mathbb{0}$ ou $B = \mathbb{0}$.

   (c) Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Se $\{(x, 2x, -x+1, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ então $\mathrm{car}(A) = 3$.

   (d) Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   O sistema $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$ é determinado para $a \neq 0$.

   (e) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se A^2 é invertível então A é invertível.

3. Sejam $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e

$$\mathrm{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Sabendo que $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3$ são soluções dos sistemas $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_1$, $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_2$ e $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_3$, respectivamente, determine a matriz A.

4. Suponha que $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e:

$$E_{3,1}(-1)E_{2,3}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E_{3,1}(-1)E_{2,3}B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   onde $E_{3,1}(-1)$ e $E_{2,3}$ são matrizes elementares.

   (a) **Indique** vectores coluna b_1 e b_2 tais que o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_1$ seja possível e o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_2$ seja impossível.

   (b) **Indique** a matriz B^2.

   (c) Sem efectuar cálculos, **indique** a inversa de B.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que se existe $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^{1\times n} \setminus \{\mathbb{0}\}$ tal que $\mathrm{y}A = \mathrm{y}$ então, também existe $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{\mathbb{0}\}$ tal que $A\mathrm{x} = \mathrm{x}$.

Resolução da versão A

1. Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a+b+c \end{array}\right],$$

concluímos que:

   (a) $\operatorname{car}(A) = 2$;

   (b) O sistema é possível sse $-a+b+c=0$;

   (c) No caso indicado tem-se que $a = 2, b = c = 1$ e assim a matriz do sistema depois da eliminação de Gauss é:

$$\left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   pelo que, considerando $\mathrm{x} = [x\ y\ z\ w]^\top$ o conjunto solução é,

$$\{(x,y,z,w) \mid y = 1-z \wedge x = 2-z\} = \\ = \{(2-z, 1-z, z, w) \mid z, w \in \mathbb{R}\}.$$

2.

   (a) *Verdadeira*: Se $BA = \mathbb{1}$ então B é a inversa de A e $B^\top$ é a inversa de $A^\top$. Neste caso $B^\top A^\top = \mathbb{1}$.

   (b) *Falsa*: como se sabe a lei do anulamento do produto não é verdadeira, em geral, no caso do produto matricial.

   (c) *Verdadeira*: o número de variáveis livres, na solução, corresponde à diferença entre o número de colunas de A (o número de variáveis) e a característica de A. Neste caso tem-se então que $\operatorname{car}(A) = 3$ (pois apenas a variável x é livre).

   (d) *Verdadeira*: Procedendo à eliminação de Gauss,

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1-a & -a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1-a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a+1 \end{bmatrix}$$

   logo, para cada $a \neq 0$ tem-se $\operatorname{car}(A) = 3$ e, neste caso, os sistemas $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$ são possíveis e determinados.

   (e) *Verdadeira*: se A^2 é invertível então existe uma matriz B tal que $A^2B = \mathbb{1}$. Assim $A(AB) = \mathbb{1}$ pelo que AB é inversa de A.

3. Nas condições indicadas tem-se que:

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}.$$

Neste caso, denotando por $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \mathrm{c}_3$ a primeira, segunda e terceira colunas de

A, tem-se que:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 1c_1 + 0c_2 + 0c_3; \quad \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} = 1c_1 + 1c_2 + 0c_3; \quad \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} = 1c_1 + 1c_2 + 1c_3;$$

Assim:

$$c_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-2\\3\end{bmatrix}.$$

Tendo agora as colunas de A é fácil escrever a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & -2\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

4.

(a) Uma vez que os sistemas homogéneos são sempre possíveis, podemos escolher $b_1 = \mathbb{0}$. Quanto a b_2 podemos escolhê-lo de modo que:

$$E_{3,1}(-1)E_{2,3}[A|b_2] = \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Neste caso

$$E_{3,1}(-1)E_{2,3}b_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

ou seja,

$$b_1 = E_{2,3}^{-1}E_{3,1}^{-1}(-1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = E_{2,3}E_{3,1}(1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = E_{2,3}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Em alternativa, da relação

$$E_{3,1}(-1)E_{2,3}A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

resulta que

$$A = E_{2,3}^{-1}E_{3,1}^{-1}(-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = E_{2,3}E_{3,1}(1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = E_{2,3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Podemos então considerar $b = [a\ b\ c]^\top$ e investigar em que condições o sistema $Ax = b$ é possível ou impossível:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & a\\1 & 0 & 1 & b\\0 & 1 & -1 & c\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & a\\0 & 1 & -1 & c\\0 & 0 & 0 & b-a\end{array}\right]$$

pelo que se escolher-mos $b = [a\ b\ c]^\top$ com $a = b$ o sistema é possível, enquanto que se escolhermos $b = [a\ b\ c]^\top$ com $a \neq b$, o sistema é impossível.

(b) Tem-se que

$$B^2 = E_{2,3}^{-1}E_{3,1}^{-1}(-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = E_{2,3}E_{3,1}(1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = E_{2,3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

(c) Tem-se que $E_{3,1}(-1)E_{2,3}B^2 = \mathbb{1}$. Assim $(E_{3,1}(-1)E_{2,3}B)B = \mathbb{1}$ ou seja, $B^{-1} = E_{3,1}(-1)E_{2,3}B$.

5. Consideremos um vector linha $\mathrm{y} \neq \mathbb{0}$ para o qual se tenha $\mathrm{y}A = \mathrm{y}$. Tem-se então que $\mathrm{y}-\mathrm{y}A = \mathbb{0}$ i.e., $\mathrm{y}(\mathbb{1}-A) = \mathbb{0}$. Transpondo obtemos $(\mathbb{1}-A)^\top\mathrm{y}^\top = \mathbb{0}$. Ou seja o sistema homogéneo $(\mathbb{1}-A)^\top\mathrm{x} = \mathbb{0}$ tem soluções não triviais. Isto significa que $\mathrm{car}((\mathbb{1}-A)^\top) = \mathrm{car}(\mathbb{1}-A) < n$. Assim também o sistema $(\mathbb{1}-A)\mathrm{x} = \mathbb{0}$ tem soluções não triviais i.e., existe $\mathrm{x} \neq \mathbb{0}$ tal que $(\mathbb{1}-A)\mathrm{x} = \mathbb{0}$, ou seja, $A\mathrm{x} = \mathrm{x}$.

Versão B

1. Considere o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

   (a) **Indique** a característica de A.
   (b) **Indique** uma condição envolvendo a, b, c que caracterize os casos em que o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ é possível.
   (c) **Indique** o conjunto solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ quando $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^\top$.

2. Classifique cada uma das afirmações seguintes como *verdadeira* ou *falsa*.

   (a) Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $BA = \mathbb{1}$ então $B^\top A^\top = \mathbb{1}$.
   (b) Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times r}$ $B \in \mathbb{R}^{r\times n}$. Se $AB = \mathbb{0}$ então $A = \mathbb{0}$ ou $B = \mathbb{0}$.
   (c) Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Se $\{(1 - y - z, y, z, 0) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ então $\mathrm{car}(A) = 3$.
   (d) Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   O sistema $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$ é determinado para $a \neq 0$.
   (e) Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se AB é invertível então A é invertível.

3. Sejam $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e

$$\mathrm{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Sabendo que $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3$ são soluções dos sistemas $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_1$, $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_2$ e $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_3$, respectivamente, determine a matriz A.

4. Suponha que $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e:

$$E_{3,1}(-1)E_{2,3}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E_{3,1}(-1)E_{2,3}B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   onde $E_{3,1}(-1)$ e $E_{2,3}$ são matrizes elementares.

   (a) **Indique** vectores coluna b_1 e b_2 tais que o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_1$ seja possível e o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_2$ seja impossível.
   (b) **Indique** a matriz B^2.
   (c) Sem efectuar cálculos, **indique** a inversa de B.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que se existe $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^{1\times n} \setminus \{\mathbb{0}\}$ tal que $\mathrm{y}A = \mathrm{y}$ então, também existe $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{\mathbb{0}\}$ tal que $A\mathrm{x} = \mathrm{x}$.

Resolução da versão B

1. Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & -1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right],$$

concluímos que:

(a) $\operatorname{car}(A) = 2$;

(b) O sistema é possível sse $c - b - a = 0$;

(c) No caso indicado tem-se que $a = b = 1$ e $c = 2$ e assim a matriz do sistema depois da eliminação de Gauss é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pelo que, considerando $\mathrm{x} = [x\ y\ z\ w]^\top$ o conjunto solução é,

$$\begin{aligned} &\{(x, y, z, w) \mid y = 1 - w \wedge x = 1 + y - w\} = \\ &\quad = \{(2 - z - w, 1 - w, z, w) \mid z, w \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

2.

(a) *Verdadeira*: Se $BA = \mathbb{1}$ então B é a inversa de A e $B^\top$ é a inversa de $A^\top$. Neste caso $B^\top A^\top = \mathbb{1}$.

(b) *Falsa*: como se sabe a lei do anulamento do produto não é verdadeira, em geral, no caso do produto matricial.

(c) *Falsa*: o número de variáveis livres, na solução, é dois, como a característica corresponde ao número de colunas menos o número de variáveis livres, tem-se $\operatorname{car}(A) = 2$.

(d) *Falsa*: Procedendo à eliminação de Gauss,

$$\begin{bmatrix} a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

pelo que, mesmo sem completar a eliminação de Gauss se verifica que a característica de A para $a = 1$ é menor que 3. Assim, neste caso, o sistema correspondente não pode ser determinado.

(e) *Verdadeira*: AB é invertível então existe uma matriz C tal que $(AB)C = \mathbb{1}$. Assim $A(BC) = \mathbb{1}$ pelo que BC é inversa de A.

As restantes questões são iguais às correspondentes na versão A.

Versão C

1. Considere o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ onde
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

   (a) **Indique** a característica de A.

   (b) **Indique** uma condição envolvendo a, b, c que caracterize os casos em que o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ é possível.

   (c) **Indique** o conjunto solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ quando $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

2. Classifique cada uma das afirmações seguintes como *verdadeira* ou *falsa*.

   (a) Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $BA = \mathbb{1}$ então $AB = \mathbb{1}$.

   (b) Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times r}$ $B \in \mathbb{R}^{r\times n}$. Se $AB = \mathbb{0}$ então $A = \mathbb{0}$ ou $B = \mathbb{0}$.

   (c) Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Se $\{(1+z, w, z, w) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ então $\mathrm{car}(A) = 3$.

   (d) Seja
$$A = \begin{bmatrix} a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   O sistema $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$ é determinado para $a \neq 1$.

   (e) Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se AB é invertível então B é invertível.

3. Sejam $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e
$$\mathrm{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   Sabendo que $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3$ são soluções dos sistemas $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_1$, $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_2$ e $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_3$, respectivamente, determine a matriz A.

4. Suponha que $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e:
$$E_{3,1}(2)E_{2,3}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E_{3,1}(1)E_{2,3}B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   onde $E_{3,1}(2)$, $E_{3,1}(1)$ e $E_{2,3}$ são matrizes elementares.

   (a) **Indique** vectores coluna b_1 e b_2 tais que o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_1$ seja possível e o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_2$ seja impossível.

   (b) **Indique** a matriz B^2.

   (c) Sem efectuar cálculos, **indique** a inversa de B.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que se existe $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^{1\times n} \setminus \{\mathbb{0}\}$ tal que $\mathrm{y}A = \mathrm{y}$ então, também existe $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{\mathbb{0}\}$ tal que $A\mathrm{x} = \mathrm{x}$.

Resolução da versão C

1. Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right],$$

concluímos que:

(a) $\operatorname{car}(A) = 2$;

(b) O sistema é possível sse $c - b - a = 0$;

(c) No caso indicado tem-se que $a = 2, b = c = 1$ e assim a matriz do sistema depois da eliminação de Gauss é:

$$\left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

pelo que o sistema é impossível i.e., o conjunto solução é $\emptyset$.

2.

(a) *Verdadeira*: Se $BA = \mathbb{1}$ então B é a inversa de A e $B^\top$ é a inversa de $A^\top$. Neste caso $B^\top A^\top = \mathbb{1}$.

(b) *Falsa*: como se sabe a lei do anulamento do produto não é verdadeira, em geral, no caso do produto matricial.

(c) *Falsa*: o número de variáveis livres, na solução, é dois, como a característica corresponde ao número de colunas menos o número de variáveis livres, tem-se $\operatorname{car}(A) = 2$.

(d) *Falsa*: Procedendo à eliminação de Gauss,

$$\begin{bmatrix} a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \end{bmatrix} \to \cdots$$

pelo que, mesmo sem completar a eliminação de Gauss se verifica que a característica de A para $a = 1$ é menor que 3. Assim, neste caso, o sistema correspondente não pode ser determinado.

(e) *Verdadeira*: AB é invertível então existe uma matriz C tal que $C(AB) = \mathbb{1}$. Assim $(CA)B = \mathbb{1}$ pelo que CA é inversa de B.

As restantes questões são iguais às correspondentes na versão B.