Semana 1

Matrizes e álgebra de matrizes

1.1 Matrizes (definições e notação)

As matrizes, desempenham relativamente à álgebra linear o mesmo papel que os números no contexto da aritmética.

Definição 1.1.— *Uma* matriz *é um quadro, A, consistindo de $m \geq 1$ linhas e $n \geq 1$ colunas (diz-se que a matriz* é do tipo $m \times n$*). A intersecção da linha i com a coluna j de A designa-se de* posição (i, j) da matriz A*. Se A é uma matriz sobre o corpo $\mathbb{K}$, cada uma das posições (i, j) de A é ocupadas por um elemento $A_{i,j} \in \mathbb{K}$ que se designa de* entrada (i, j) da matriz A.

O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ denota-se $\mathbb{K}^{m \times n}$.[1]

Matriz
Tipo de uma matriz
Posição (i, j) de A
Entrada (i, j) de A
$\mathbb{K}^{m \times n}$

[1] Mais formalmente, uma matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ pode ser vista como uma função

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}.$$

Neste caso, a entrada $A_{i,j}$ de A corresponde a $A(i, j)$ i.e. o valor da função A em (i, j).

No caso particular em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ as matrizes dizem-se matrizes reais e, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dizem-se complexas. (Como todo o número real é igualmente um número complexo tem-se que $\mathbb{R}^{m \times n} \subset \mathbb{C}^{m \times n}$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}^+$.)

Exemplos de matrizes são:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \pi \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

No que respeita a matrizes adoptam-se as seguintes convenções notacionais: as matrizes são em geral denotadas por letras maiúsculas e.g. $A, B, C, D, \ldots$, as únicas eventuais excepções a esta convenção residem nas matrizes que possuem apenas uma linha ou apenas uma coluna que são denotadas por letras minúsculas não itálicas e,g., u, v, w, x, …; se A é uma matriz, a j-ésima coluna de A denota-se $A_{*,j}$ enquanto que a sua i-ésima coluna se denota $A_{i,*}$.

As matrizes distribuem-se por algumas categorias de acordo com o seu tipo ou as suas entradas e algumas dessas categorias são relevantes para os desenvolvimentos que se seguem.

1. Uma matriz A é *quadrada* se tiver o mesmo número de linhas e colunas i.e., existe um $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$; se A é quadrada e tem n linhas (e n colunas) também se diz que tem *ordem* n.

Matriz quadrada

Ordem de uma matriz quadrada

2. Numa matriz quadrada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ a *diagonal principal* consiste nas posições

Diagonal principal

(i, i) da matriz i.e., todas as posições em que o índice de linha é igual a índice de coluna.

3. Uma matriz, A, é *triangular superior* se é quadrada e se todas as entradas abaixo da diagonal principal i.e., as entradas $A_{i,j}$ em que $i < j$, são nulas, por exemplo

Matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são matrizes triangulares superiores.

4. Uma matriz, A, é *triangular inferior* se é quadrada e se todas as entradas acima da diagonal principal i.e., as entradas $A_{i,j}$ em que $i > j$, são nulas.

Matriz triangular inferior

5. Uma matriz, A, é *diagonal* se é quadrada e todas as entradas fora da diagonal principal são nulas; de forma equivalente, se for quadrada e ao mesmo tempo triangular superior e inferior. Por exemplo

Matriz diagonal

$$\operatorname{diag}(1) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{diag}(1, 1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são diagonais. Observe-se que antecipámos em cima o uso de uma notação comum: se A é uma matriz diagonal de ordem n muitas vezes denotamo-la através do símbolo $\operatorname{diag}(A_{1,1}, \ldots, A_{n,n})$ ou seja, indicando apenas as entradas diagonais, pela respectiva ordem.

6. A *matriz identidade de ordem n* é a matriz diagonal de ordem n onde todas as entradas diagonais são 1; esta matriz denota-se por $\mathbb{1}_n$.

Matriz identidade de ordem n

7. A *matriz nula do tipo $m \times n$* é a matriz que se denota por $\mathbb{0}_{m,n}$, que é do tipo $m \times n$ e possui todas as entradas nulas.

Matriz nula do tipo $m \times n$

8. Um *matriz linha* ou *vector linha* é uma matriz que possui uma única linha i.e., uma matriz $\mathrm{u} \in \mathbb{K}^{1 \times n}$.

Matriz linha ou vector linha

9. Um *matriz coluna* ou *vector coluna* é uma matriz que possui uma única coluna i.e., uma matriz $\mathrm{u} \in \mathbb{K}^{n \times 1}$.

Matriz coluna ou vector coluna

Definição 1.2 (igualdade de matrizes).— *Duas matrizes A e B são iguais quando são do mesmo tipo e quando as entradas correspondentes são iguais i.e. $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ e $(\forall 1 \leq i \leq m)(\forall 1 \leq j \leq n)\, A_{i,j} = B_{i,j}$.*[2]

Igualdade de matrizes

[2] Vistas as matrizes A e B como funções, a igualdade de matrizes corresponde à igualdade de funções: duas funções são iguais se têm o mesmo domínio e o mesmo valor em cada elemento do domínio.

1.2 Álgebra de matrizes

À semelhança do que acontece com os números também as matrizes possuem uma álgebra. De resto é essa álgebra que as torna fundamentais na codificação de múltiplas noções em álgebra linear.

Definição 1.3 (adição de matrizes).— *A* adição *(ou* soma*) de matrizes é uma operação parcial (parcial, porque não está definida em todos os casos) envolvendo matrizes. Essa operação associa a matrizes $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ uma matriz $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ que se denota*

Adição (ou soma) de matrizes

$A+B$ e se define:

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}, \quad (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}.$$

Quando as matrizes não forem do mesmo tipo $A+B$ não está definida.

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b+1 \\ c+2 & d+1 \\ e & f+1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ não está definida.}$$

Multiplicação de um escalar por uma matriz

Definição 1.4 (multiplicação por escalar).— *Se $\alpha \in \mathbb{K}$ é um escalar e $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ é uma matriz, o resultado de multiplicar o escalar α por A é a matriz $\alpha A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ que se define:*

$$(\alpha_A)_{i,j} = \alpha A_{i,j}, \quad (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}.$$

Ao contrário da adição de matrizes, a operação de multiplicação de uma matriz por um escalar é total, ou seja está definida em todos os casos.

Propriedades básicas das operações de adição de matrizes e multiplicação de um escalar por uma matriz

Lema 1.5.— *Sejam, $A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

1. *$A+B = B+A$ i.e., a adição de matrizes é* comutativa.
2. *$(A+B)+C = A+(B+C)$ i.e., a adição de matrizes é* associativa.
3. *$A + \mathbb{0} = A$ (onde $\mathbb{0} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ é a matriz nula).*
4. *A* matriz simétrica *de A que se denota $-A$ é a matriz do mesmo tipo de A que satisfaz $(-A)_{i,j} = -A_{i,j}$. Tem-se que $A + (-A) = \mathbb{0}$. Além disso, $-A$ é a única matriz, C, que satisfaz $A + C = \mathbb{0}$.*

   Matriz simétrica de uma matriz
5. *$0A = \mathbb{0}$, $1A = A$ e $(-1)A = -A$.*
6. *$\alpha(A+B) = (\alpha A) + (\alpha B)$ i.e., o produto por escalar é* distributivo relativamente à adição de matrizes.
7. *$(\alpha+\beta)A = (\alpha A) + (\beta A)$ i.e., o produto por escalar é* distributivo relativamente à adição de escalares.
8. *$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.*

Demonstração.— Ver apêndice 1.A. ◪

O resultado anterior ilustra como as operações de adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar possuem propriedades análogas às suas congéneres numéricas i.e. adição e multiplicação de números. Isto significa que se pretendermos resolver uma equação matricial (em que a variável é uma matriz) e.g. a equação:

$$A + \mathbb{1} - 3X = \mathbb{0},$$

na variável X, podemos proceder usando a mesma estratégia do caso numérico i.e.,

$$A + \mathbb{1} - 3X = \mathbb{0} \Leftrightarrow -3X = -A - \mathbb{1} \Leftrightarrow X = -\frac{1}{3}(-A - \mathbb{1}) \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}(A + \mathbb{1}),$$

isto, porque as únicas operações envolvidas na equação são a adição de matrizes e a multiplicação de um escalar por uma matriz e, desta forma, podemos fazer uso das propriedades enunciadas no lema 1.5.

A próxima operação que iremos definir é a operação de multiplicação de matrizes. Depois do exemplo da definição de matrizes seria de esperar uma definição semelhante, multiplicando-se entradas correspondente. No entanto, o propósito da álgebra de matrizes é, recorde-se, o de proporcionar um meio de codificação de aspectos da álgebra linear bem como um meio que proporciona a resolução de problemas envolvendo essas noções através do cálculo. Acontece que se definíssemos o produto matricial em moldes análogos aos da adição acabaríamos com uma operação que nada serviria aqueles propósitos. Necessitamos pois de uma ideia diferente.

Definição 1.6 (produto matricial).— *À semelhança da adição de matrizes também a multiplicação de matrizes é uma operação parcial. Assim, se* $A \in \mathbb{K}^{m\times r}$ *e* $B \in \mathbb{K}^{r\times n}$ *o produto* $AB \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *é a matriz definida de acordo com o seguinte:*

Produto de matrizes

$$(AB)_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + \cdots + A_{i,r}B_{r,j}, \quad (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}.$$

O produto de matrizes só está definido quando o número de colunas d factor esquerdo igualar o número de linhas do factor direito.

Tendo em conta a definição do produto AB constata-se que as entradas que se consideram para calcular a entrada (i,j) de AB são as da linha i de A (o factor esquerdo) e as da coluna j de B (o factor direito). Para visualizar melhor o cálculo de $(AB)_{i,j}$ é conveniente considerar em primeiro lugar a definição do produto num caso muito particular. Com efeito, de acordo com a definição,

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix} = [\alpha]$$

onde $\alpha = A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_rB_r$.

Essencialmente a informação contida numa matriz 1×1 é a mesma que a sua única entrada contém e, por essa razão, muitas vezes e em termos práticos, identifica-se $[\alpha]$ com o próprio α. (Quando se deve identificar ou não é determinado pelo próprio contexto: se contexto exige uma matriz então $[\alpha]$ *é* $[\alpha]$; se o contexto exige um escalar então $[\alpha]$ *é* α.)

Tendo em conta esta última consideração e considerando de novo a definição 1.6, constata-se que:

$$(AB)_{i,j} = A_{i,*}B_{*,j}$$

ou seja $(AB)_{i,j}$ é o produto da linha i de A pela coluna j de B.

Relações igualmente importantes ocorrem entre as linhas e colunas do produto e as linhas e colunas dos factores. Antes de descrever essas relações necessitamos de uma noção nova.

Definição 1.7 (combinação linear).— *Suponhamos que* $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_n$ *são todos vectores linha ou todos vectores coluna. Uma* combinação linear *daqueles vectores é uma soma*

Combinação linear de linhas ou colunas

do tipo:

$$\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \alpha_2 \mathrm{u}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{u}_n \tag{1.1}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *são denominados de* coeficientes da combinação linear.

Lema 1.8.— *Sejam* $A \in \mathbb{K}^{m \times r}$ *e* $B \in \mathbb{K}^{r \times n}$. *Dado* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *tem-se que:*

$$(AB)_{i,*} = A_{i,1}B_{1,*} + A_{i,2}B_{2,*} + \cdots + A_{i,r}B_{r,*} \tag{1.2}$$

ou seja, a i*-ésima linha de* AB *é uma combinação linear das linhas de* B *cujos coeficientes são as entradas da linha* i *de* A. *Analogamente,*

$$(AB)_{*,j} = B_{1,j}A_{*,1} + B_{2,j}A_{*,2} + \cdots + B_{r,j}A_{*,r} \tag{1.3}$$

ou seja, a j*-ésima coluna de* AB *é uma combinação linear das colunas de* A *cujos coeficientes são as entradas da coluna* j *de* B.

Demonstração.— Ver apêndice 1.A. ◪

Como casos particulares do resultado anterior mencionamos:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,r} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \cdots & B_{m,r} \end{bmatrix} = A_1 B_{1,*} + A_2 B_{2,*} + \cdots + A_r B_{r,*}. \tag{1.4}$$

e,

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ B_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \cdots & A_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = B_1 \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ \vdots \\ A_{r,1} \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} A_{1,2} \\ A_{2,2} \\ \vdots \\ A_{r,2} \end{bmatrix} + \cdots + B_n \begin{bmatrix} A_{1,n} \\ A_{2,n} \\ \vdots \\ A_{r,n} \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Por outro lado, as colunas de AB podem ser descritas como os produtos de A pelas colunas de B, mais precisamente:

$$AB_{*,j} = (AB)_{*,j}. \tag{1.6}$$

De modo completamente análogo, as linhas de AB podem se descritas como produtos das linhas de A por B:

$$A_{i,*}B = (AB)_{i,*}. \tag{1.7}$$

Faremos uso destas relações adiante.

Ao contrário do que sucede com as operações de adição e multiplicação por escalar, as propriedades da multiplicação de matrizes divergem de forma significativa das da operação de multiplicação numérica. Comecemos pelas propriedades que se mantêm.

Lema 1.9.— *Sejam* A, B, C *matrizes e* $\alpha \in \mathbb{K}$.

Propriedades básicas da multiplicação de matrizes

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $A(B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B)C = AC + BC$;
4. $A\mathbb{0} = \mathbb{0}$ *e* $\mathbb{0}A = \mathbb{0}$;
5. $A\mathbb{1} = A$ *e* $\mathbb{1}A = A$;

6. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Demonstração.— Ver apêndice 1.A. ◪

Outra propriedades falham, notoriamente a comutatividade do produto de matrizes. Pode acontecer que AB esteja definido mas BA não. Por exemplo se A é do tipo 2×3 e B do tipo 3×1 então AB está definido mas BA não (o número de colinas de B é 3 e é diferente do número de linhas de A). Mesmo que AB e BA estejam definidos não têm necessariamente o mesmo tipo e, por isso, não podem ser iguais e.g., se A é 1×3 e B é 3×1 então, AB é 1×1 enquanto que BA é 3×3 logo, não podem ser iguais. Pode mesmo acontecer que AB e BA sejam do mesmo tipo mas ainda assim diferentes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Outra propriedade importante que falha no caso do produto matricial é a *lei do anulamento do produto* que, no caso matricial se poderia enunciar da seguinte forma: *se* $AB = \mathbb{0}$ *então* $A = \mathbb{0}$ *ou* $B = \mathbb{0}$. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sem que nenhum dos factores seja nulo. Uma vez que a lei do anulamento do produto não é válida em geral, o mesmo sucede com as leis de cancelamento ou seja, mesmo que se tenha $A \neq 0$, de $AB = AC$ não se conclui que $B = C$ e analogamente para $BA = CA$.

A potenciação de matrizes faz-se de acordo com regras semelhantes à potenciação numérica. Em primeiro lugar, tendo em conta as restrições nos tipos das matrizes que tornam a multiplicação bem-definida, *só se consideram potências de matrizes quadradas*. De resto a definição é uma generalização da sua congénere numérica: Potência natural de uma matriz

$$A^0 = \mathbb{1},\quad A^1 = A,\quad A^2 = AA,\quad A^3 = AAA = AA^2,\quad A^4 = AAAA = AA^3,\quad \text{etc}\ldots.$$

As regras válidas nas potências matriciais são

1. $A^{m+n} = A^m A^n$;
2. $\left(A^m\right)^n = A^{mn}$;
3. $\alpha A)^m = \alpha^m A^m$.

A regra $A^m B^n = (AB)^n$ que é válida no caso numérico *não é, em geral, válida no caso matricial*. A razão é simples:

$$(AB)^m = \underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{m \text{ vezes}}$$

e, para se poder concluir daqui que este produto coincide com $A^m B^m$ seria necessário envolver a propriedade comutativa, algo que sabemos não ser em geral válido, no caso da multiplicação de matrizes.

Definição 1.10 (inversa de uma matriz quadrada).— *Seja A uma matriz quadrada. Uma inversa de A, se existir, é uma matriz B que verifica $AB = BA = \mathbb{1}$.* Inversa de uma matriz quadrada

Nem todas as matrizes quadradas são invertíveis. Claramente a matriz nula não pode ter inversa pois o seu produto por uma qualquer matriz á a matriz nula. Por outro lado mesmo matrizes quadradas não nulas, A e B, tais que $AB = \mathbb{0}$ (como no exemplo acima) não podem ser invertíveis. De facto, supondo que $AB = \mathbb{0}$ e A tem inversa (ou, como também se diz, é invertível) então sendo C uma dessas inversas teríamos:

$$AB = \mathbb{0} \Rightarrow C(AB) = \mathbb{0} \Rightarrow (CA)B = \mathbb{0} \Rightarrow \mathbb{1}B = \mathbb{0}$$

ou seja, $B = \mathbb{0}$, contrariando a nossa hipótese inicial.

Lema 1.11 (unicidade da inversa).— *Sejam, A uma matriz quadrada e B, C inversas de A. Nestas condições $B = C$.*

Unicidade da inversa

Com efeito, nas hipóteses do enunciado, tem-se:

$$B = \mathbb{1}B = (CA)B = C(AB) = C\mathbb{1} = C.$$

Uma vez que a inversa de uma matriz A, se existir, é única ela denota-se por A^{-1}.

As propriedades básicas da inversão de matrizes resumem-se no resultado seguinte:

Lema 1.12.— *Sejam A, B matrizes quadradas.*

Propriedades básicas da inversão de matrizes

1. *Se A é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$;*
2. *Se A é invertível e $\alpha \neq 0$ então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = (1/\alpha)A^{-1}$;*
3. *Se A, B são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demonstração.— Ver apêndice 1.A. ◻

Definição 1.13 (transposta de uma matriz).— *Se $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ uma matriz. A* transposta *de A é a matriz $A^\top \in \mathbb{K}^{n\times m}$ definida por:*

Transposta de uma matriz

$$(A^\top)_{j,i} = A_{i,j}.$$

Essencialmente, a primeira linha de A é a primeira coluna de $A^\top$, a segunda linha de A é a segunda coluna de $A^\top$, etc. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}.$$

As propriedades básicas da transposição resumem-se a seguir

Lema 1.14.— *Sejam A, B matrizes e $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Propriedades básicas da transposição

1. $(A^\top)^\top = A$;
2. $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$;
3. $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$;
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
5. *se A é invertível então $A^\top$ é invertível e $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.*

Exercícios

Os exercícios assinalados com © ESD e © AL foram retirados de listas de exercícios dos professores Esmeralda Sousa Dias e Amarino Lebre, respectivamente.

Problema i.1.— Algumas das identidades abaixo são sempre verdadeiras outras nem sempre são verdadeiras e outras não fazem sentido. Classifique cada uma delas relativamente a estas três categorias.

1. $A + \alpha B = \alpha A + B$;
2. $\alpha(\beta + A) = \alpha\beta + \alpha A$
3. $\alpha(A - B) = \alpha A - \alpha B$
4. $0A = \mathbb{0}$;
5. $A - A^\top = \mathbb{0}$;
6. $\alpha(A - B) = \alpha(A + B) - \alpha B$.

Problema i.2.— Escreva as matrizes $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que satisfazem

(a) $A_{i,j} = i + j$;

(b) $A_{i,j} = \begin{cases} 1 & (\text{se } i + j \text{ é par}) \\ 0 & (\text{se } i + j \text{ é ímpar}) \end{cases}$

(c) $A_{i,j} = (-1)^{i-j}$;

(d) $A_{i,j} = \begin{cases} -1 & (\text{se } i > j) \\ 0 & (\text{se } i = j) \\ 1 & (\text{se } i < j) \end{cases}$

Problema i.3.— Escrever a matriz $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ tal que:

(a) $A_{i,j}$ é o mínimo múltiplo comum de i e j;

(b) $A_{i,j}$ é o máximo divisor comum de i e j.

Problema i.4.— Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Descreva a matriz B onde $B_{i,j} = A_{i,n+1-j}$.

Problema i.5.— Sejam $A, B, D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $E \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Determine quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas, e nesses casos, indique o tipo da matriz resultante. © ESD

(a) BA	(b) $AC + D$	(c) $AE + B$	(d) $AB + B$
(e) $E(A + B)$	(f) $E(AC)$	(g) $E^\top A$	(h) $(A^\top + E)D$.

Problema i.6.— Simplifique:

$$\begin{bmatrix} x-y & y-x & z-w \\ w-x & x-y & y-z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x-w & y-x & z-y \\ y-x & z-y & w-z \end{bmatrix}.$$

Problema i.7.— Resolva (em ordem a X), em função de A e B, a equação matricial:

$$3\left(X + \frac{1}{2}A\right) = 5\left(X - \frac{3}{4}B\right).$$

Problema i.8.— Sejam,

$$A = \mathbb{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolva (em ordem a X) a equação

$$X + A = 2(X - B).$$

Problema i.9.— Comece por calcular o produto:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Depois, exprima em notação matricial as igualdades seguintes:

(a) $x^2 + 9xy + y^2 + 8x + 5y + 2 = 0$;

(b) $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta_2} = 1$;

(c) $xy = \alpha^2$;

(d) $y^2 = 4xy$.

Problema i.10.— Calcule A^2 e A^3, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema i.11.— Mostre que $(A(B + C))^\top = B^\top A^\top + C^\top A^\top$.

Problema i.12.— Seja $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. O *traço de A* que se denota $\operatorname{tr}(A)$ é a soma dos elementos da diagonal principal i.e.,

$$\operatorname{tr}(A) = A_{1,1} + A_{2,2} + \cdots + A_{n,n}.$$

Mostre que

(a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$;

(b) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$.

Problema i.13.— Duas matrizes A, B anti-comutam se $AB = -BA$. Mostre que as *matrizes de Pauli*:

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

onde $i^2 = -1$, anti-comutam entre si.

Problema i.14.— Consideremos matrizes $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Mostre que se tem $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Problema 1.15.— Consideremos a matriz complexa,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^2, A^3, A^4 e obtenha uma exprssão geral para A^n, onde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Problema 1.16.— Sejam $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ matrizes quadradas da mesma ordem tais que A e $AB - BA$ comutam. Mostre que para cada natural $n \geq 1$ se tem:

$$A^n B - BA^n = n(AB - BA)A^{n-1}.$$

Problema 1.17.— Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e B a matriz cujas colunas são, respetivamente, os vectores:

$$\mathrm{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que

$$A\mathrm{b}_1 = \mathrm{b}_4, \quad A(\mathrm{b}_2 - \mathrm{b}_3) = \mathrm{b}_1, \quad A(\mathrm{b}_2 + \mathrm{b}_3) = \mathrm{b}_4, \quad A\mathrm{b}_4 = \mathrm{b}_3.$$

Determine a matriz AB.

Problema 1.18.— Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

mas,

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

Problema 1.19.— Duas matrizes A, B comutam se $AB = BA$ (neste caso A e B têm que ser quadradas da mesma ordem).

(a) Mostre que se A e B comutam então, para quaisquer naturais m, n as matrizes A^m e B^n também comutam.

(b) Mostre que se A e B comutam então a fórmula do binómio de Newton é verdadeira para A e B i.e.,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

(Use indução em n.)

Problema 1.20.— Mostre que para cada $\lambda \neq 0$ se tem que $A_\lambda^2 = \mathbb{1}$, onde

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

(Este facto mostra que uma matriz pode possuir uma infinidade de *raízes quadradas*.)

Problema 1.21.— Sejam $\mathrm{x} = [a\ b\ c]$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix},$$

onde $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(a) Mostre que $A^2 = \mathrm{x}^\top \mathrm{x} - \mathbb{1}$.

(b) Prove que $A^3 = -A$.

(c) Determine A^4 em função de x.

Problema 1.22.— Seja $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\operatorname{tr}(E) = 0$.

(a) Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $E^2 = \lambda \mathbb{1}$.

(b) Use (a) para mostrar que, dadas matrizes $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ se tem:

$$(AB - BA)^2 C = C(AB - BA)^2.$$

Problema 1.23.— Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja B a matriz definida por:

$$B = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \cdots$$

(a soma é infinita). Mostre que apenas um número finito de parcelas na soma acima é diferente de $\mathbb{0}$ e determine B. Mostre ainda que a soma

$$B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \frac{1}{4!}B^4 + \cdots$$

tem apenas um número finito de parcelas diferentes da matriz nula e que a soma em causa é A.

Problema 1.24.— Consideremos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que

$$AB = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix}.$$

(b) Prove que

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

(Use indução.)

Problema 1.25.— Se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denotamos por $[AB]$ o denominado *produto de Lie* das matrizes A e B que se define através de $[A, B] = AB - BA$. Estabeleça as seguintes identidades:

(a) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = \mathbb{0}$;

(b) $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$;

(c) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$;

(d) $[\alpha A, B] = [A, \alpha B] = \alpha[A, B]$.

Apêndices

1.A Demonstrações

Teorema 1.5.—*Sejam,* $A, B, C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*.*

1. $A + B = B + A$ *i.e., a adição de matrizes é* comutativa.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *i.e., a adição de matrizes é* associativa.
3. $A + \mathbb{0} = A$ *(onde* $\mathbb{0} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *é a matriz nula).*
4. A matriz simétrica de A *que se denota* $-A$ *é a matriz do mesmo tipo de* A *que satisfaz* $(-A)_{i,j} = -A_{i,j}$*. Tem-se que* $A + (-A) = \mathbb{0}$*. Além disso,* $-A$ *é a única matriz,* C*, que satisfaz* $A + C = \mathbb{0}$*.*
5. $0A = \mathbb{0}$*,* $1A = A$ *e* $(-1)A = -A$*.*
6. $\alpha(A + B) = (\alpha A) + (\alpha B)$ *i.e., o produto por escalar é* distributivo relativamente à adição de matrizes.
7. $(\alpha + \beta)A = (\alpha A) + (\beta A)$ *i.e., o produto por escalar é* distributivo relativamente à adição de escalares.
8. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$*.*

Demonstração.—
1. Como $A + B$ e $B + A$ são do mesmo tipo, basta mostrar que as entradas correspondentes são iguais. Tem-se então,

$$(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} = B_{i,j} + A_{i,j} = (B * A)_{i,j}.$$

(Observe-se que $A_{i,j} + B_{i,j} = B_{i,j} + A_{i,j}$ porque neste caso estamos a considerar a adição numérica que, como sabemos, é comutativa.)
2. Analogo ao anterior:

$$\begin{aligned}((A + B) + C)_{i,j} &= (A + B)_{i,j} + C_{i,j} = (A_{i,j} + B_{i,j}) + C_{i,j} = \\ &= A_{i,j} + (B_{i,j} + C_{i,j}) = A_{i,j} + (B + C)_{i,j} = (A + (B + C))_{i,j}.\end{aligned}$$

3. Tem-se:

$$(A + \mathbb{0})_{i,j} = A_{i,j} + i, j = A_{i,j} + 0 = A_{i,j}.$$

4. Tem-se:

$$(A + (-A))_{i,j} = A_{i,j} + (-A)_{i,j} = A_{i,j} - A_{i,j} = 0.$$

Quanto à unicidade suponhamos que $A+C = \mathbb{0}$, ou seja, para quaisquer i, j tem-se $(A+C)_{i,j} = 0$. Tem-se então, para todo o i, j, que $A_{i,j}+C_{i,j} = 0$, ou seja $C_{i,j} = -Ai, j$. Mas, isto significa precisamente que $C = -A$.
5. Tem-se $(0A)_{i,j} = 0A_{i,j} = 0$, para quaisquer i, j, ou seja $0A = \mathbb{0}$. Tem-se $(1A)_{i,j} = 1A_{i,j} = A_{i,j}$, para quaisquer i, j, ou seja $1A = A$. Basta constatar que para quaisquer i, j se tem $((-1)A)_{i,j} = (-1)A_{i,j} = -A_{i,j} = (-A)_{i,j}$.
6. Tem-se:

$$\begin{aligned}(\alpha(A + B))_{i,j} &= \alpha(A + B)_{i,j} = \alpha(A_{i,j} + B_{i,j}) = \alpha A_{i,j} + \alpha B_{i,j} = \\ &= (\alpha A)_{i,j} + (\alpha B)_{i,j} = (\alpha A + \alpha B)_{i,j}.\end{aligned}$$

7. Tem-se:

$$((\alpha+\beta)A)_{i,j} = (\alpha+\beta)A_{i,j} = \alpha A_{i,j} + \beta A_{i,j} = (\alpha A)_{i,j} + (\beta A)_{i,j} = (\alpha A + \beta A)_{i,j}.$$

8. Tem-se:

$$(\alpha(\beta A))_{i,j} = \alpha(\beta A)_{i,j} = \alpha(\beta A_{i,j}) = (\alpha\beta)A_{i,j} = ((\alpha\beta)A)_{i,j}.$$

O que conclui a demonstração. ◻

Teorema 1.8.— *Sejam $A \in \mathbb{K}^{m\times r}$ e $B \in \mathbb{K}^{r\times n}$. Dado $i \in \{1,\dots,m\}$ tem-se que:*

$$(AB)_{i,*} = A_{i,1}B_{1,*} + A_{i,2}B_{2,*} + \cdots + A_{i,r}B_{r,*} \tag{1.8}$$

ou seja, a i-ésima linha de AB é uma combinação linear das linhas de B cujos coeficientes são as entradas da linha i de A. Analogamente,

$$(AB)_{*,j} = B_{1,j}A_{*,1} + B_{2,j}A_{*,2} + \cdots + B_{r,j}A_{*,r} \tag{1.9}$$

ou seja, a j-ésima coluna de AB é uma combinação linear das colunas de A cujos coeficientes são as entradas da coluna j de B.

Demonstração.— Consideremos $A \in \mathbb{K}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{K}^{k\times n}$. Temos:

$$\begin{aligned}(AB)_{i,*} &= \begin{bmatrix}A_{i,1}B_{1,1} + \cdots + A_{i,k}B_{k,1} & \cdots\cdots & A_{i,1}B_{1,n} + \cdots + A_{i,k}B_{k,n}\end{bmatrix} = \\ &= A_{i,1}\begin{bmatrix}B_{1,1} & \cdots\cdots & B_{1,n}\end{bmatrix} + \cdots + A_{i,k}\begin{bmatrix}B_{k,1} & \cdots\cdots & B_{k,n}\end{bmatrix} = \\ &= A_{i,1}B_{1,*} + \cdots + A_{i,k}B_{k,*}.\end{aligned}$$

confirmando que a i-ésima linha de AB é uma combinação linear das linhas de B usando como coeficientes os as entradas da i-ésima linha de A.

No caso das colunas tem-se:

$$\begin{aligned}(AB)_{*,j} &= \begin{bmatrix}A_{1,1}B_{1,j} + \cdots + A_{1,k}B_{k,j} \\ \vdots \\ A_{m,1}B_{1,j} + \cdots + A_{m,k}B_{k,j}\end{bmatrix} = B_{1,j}\begin{bmatrix}B_{1,1} \\ \vdots \\ B_{k,1}\end{bmatrix} + \cdots + B_{k,j}\begin{bmatrix}A_{1,k} \\ \vdots \\ A_{m,k}\end{bmatrix} = \\ &= B_{1,j}A_{*,1} + \cdots + B_{k,j}A_{*,k},\end{aligned}$$

confirmando-se que a j-ésima coluna de AB é uma combinação linear das colunas de A que usa como coeficientes as entradas da j-ésima coluna de B. ◻

Lema 1.9.—*Sejam A, B, C matrizes e $\alpha \in \mathbb{K}$.*

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $A(B+C) = AB + AC$;
3. $(A+B)C = AC + BC$;
4. $A\mathbb{0} = \mathbb{0}$ *e* $\mathbb{0}A = \mathbb{0}$;
5. $A\mathbb{1} = A$ *e* $\mathbb{1}A = A$;
6. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Demonstração.—

1. Tem-se que:

$$((AB)C)_{i,j} = (AB)_{i,*}C_{*,j} = (A_{i,1}B_{1,*} + \cdots + A_{i,s}B_{s,*})C_{*,j} =$$

$$= A_{i,1}B_{1,*}C_{*,j} + \cdots + A_{i,s}B_{s,*}C_{*,j} = A_{i,1}(BC)_{1,j} + \cdots + A_{i,s}(BC)_{s,j} =$$

$$= (A(BC))_{i,j}.$$

(Na passagem da primeira para a segunda linha na sequência das igualdades acima usámos a propriedade 3. que ainda não demonstrámos. Não há nada de irregular nisto uma vez que a demonstração de 3. que faremos a seguir não depende de 1.)

2. Tem-se:

$$(A(B+C))_{i,j} =$$

$$= A_{i,*}(B+C)_{*,j} = A_{i,*}(B_{*,j} + C_{*,j}) = A_{i,1}(B_{1,j} + C_{1,j}) + \cdots + A_{i,s}(B_{s,j} + C_{s,j}) =$$

$$= A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,1}C_{1,j} + \cdots + A_{i,s}B_{s,j} + A_{i,s}C_{s,j} =$$

$$= (A_{i,1}B_{1,j} + \cdots + A_{i,s}B_{s,j}) + (A_{i,1}C_{1,j} + \cdots + A_{i,s}C_{s,j}) =$$

$$= (AB)_{i,j} + (AC)_{i,j}.$$

3. Totalmente análogo ao anterior.

4. Para quaisquer i, j temos que

$$(A\mathbb{0})_{i,j} = \sum_{s=1}^{k} A_{i,s}\mathbb{0}_{s,j} = \sum_{s=1}^{k} A_{i,s}0 = 0.$$

Concluímos assim que $A\mathbb{0} = \mathbb{0}$. Analogamente para $0A$.

5. Análogo ao anterior.

6. Temos que:

$$(\alpha(AB))_{i,j} = \alpha(AB)_{i,j} = \alpha(A_{i,1}B_{1,j} + \cdots + A_{i,s}B_{s,j}) =$$

$$= (\alpha A_{i,1})B_{1,j} + \cdots + (\alpha A_{i,s})B_{s,j} = (\alpha A)_{i,1})B_{1,j} + \cdots + (\alpha A)_{i,s}B_{s,j} =$$

$$= ((\alpha A)B)_{i,j}.$$

Por outro lado,

$$(\alpha(AB))_{i,j} = \alpha(AB)_{i,j} = \alpha(A_{i,1}B_{1,j} + \cdots + A_{i,s}B_{s,j}) =$$

$$= A_{i,1})(\alpha B_{1,j}) + \cdots + A_{i,s})(\alpha B_{s,j}) = A_{i,1})(\alpha B)_{1,j} + \cdots + A_{i,s}(\alpha B)_{s,j} =$$

$$= (A(\alpha B))_{i,j}.$$

Concluímos assim a demonstração. ☒

Lema-1.12.—*Sejam A, B matrizes quadradas.*

1. *Se A é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$;*
2. *Se A é invertível e $\alpha \neq 0$ então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = (1/\alpha)A^{-1}$;*
3. *Se A, B são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demonstração.—

1. Trivial.

2. Tem-se que:

$$(\frac{1}{\alpha}A^{-1})(\alpha A) = \frac{1}{\alpha}\alpha A^{-1}A = 1\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

e, analogamente, $(\alpha A)((1/\alpha)A^{-1}) = \mathbb{1}$.

3. Temos que:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathbb{1}A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{1}.$$

Da mesma forma se constata que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = \mathbb{1}$. Tendo em conta a unicidade da inversa, concluímos que $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. ▨

Lema .—*Sejam A, B matrizes e $\alpha \in \mathbb{K}$.*

1. $(A^\top)^\top = A$;
2. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$;
3. $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$;
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
5. *se A é invertível então $A^\top$ é invertível e $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.*

Demonstração.—
1. Tem-se:

$$((A^\top)^\top)_{i,j} = (A^\top)_{j,i} = A_{i,j}.$$

Assim, $(A^\top)^\top = A$.
2. Temos que:

$$((A+B)^\top)_{i,j} = (A+B)_{i,j} = (A+B)_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i} = (A^\top)_{i,j} + (B^\top)_{i,j}.$$

Pelo que $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.
3. Análogo ao anterior.
4. Temos

$$((AB)^\top)_{i,j} = (AB)_{j,i} = A_{j,1}B_{1,i} + \cdots + A_{j,s}B_{s,i} =$$

$$= (A^\top)_{1,j}(B^\top)_{i,1} + \cdots + (A^\top)_{s,j}(B^\top)_{i,s} = (B^\top)_{i,1}(A^\top)_{1,j} + \cdots + (B^\top)_{i,s}(A^\top)_{s,j} =$$

$$= (B^\top A^\top)_{i,j}.$$

Concluímos assim que $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
5. Tem-se que

$$(A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = \mathbb{1}^\top = \mathbb{1}.$$

De modo inteiramente análogo também se verifica que $A^\top (A^{-1})^\top = \mathbb{1}$ pelo que se tem $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$. ▨

1.B Soluções dos exercícios

Solução (do problema 1.2).—

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} (-1)^0 & (-1)^{-1} & (-1)^{-2} \\ (-1)^1 & (-1)^0 & (-1)^1 \\ (-1)^2 & (-1)^1 & (-1)^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução (do problema 1.3).— Análogo ao anterior. ▨

Solução (do problema i.4).— Tendo em conta que $B_{i,j} = A_{i,n+1-j}$ tem-se que:

$$B = \begin{bmatrix} A_{1,n} & A_{1,n-1} & \cdots & A_{1,2} & A_{1,1} \\ A_{2,n} & A_{2,n-1} & \cdots & A_{2,2} & A_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n,n} & A_{n,n-1} & \cdots & A_{n,2} & A_{n,1} \end{bmatrix}.$$

Solução (do problema i.5).— (a) BA corresponderia um produto do tipo $(3 \times x) \cdot (3 \times 2)$ que não se encontra definido.
(b) $AC + D$ (tendo em conta que o produto tem precedência sobre a soma) é da forma $(3\times2)\cdot(2\times2)+(3\times2)$. O produto está definido e resulta numa matriz (3×2) pelo que a soma se encontra igualmente definida.
(c) $AE \in \mathbb{K}^{3\times3}$ e B não é deste tipo, logo a soma não está definida.
(d) O produto AB não está definido pelo que $AB + B$ também não.
(e) $E(A + B)$ está definida e é do tipo 2×2.
(f) $E(AC)$ está bem definida e é do tipo 2×2.
(g) $E^\top A$ não está definida.
(h) $(A^\top + E)D$ está definida e é do tipo 2×2. ⧄

Solução (do problema i.6).—

$$\begin{bmatrix} w-y & 0 & 0 \\ w-y & x-z & y-w \end{bmatrix}.$$

Solução (do problema i.7).— As leis a que obedecem as operações de adição de matrizes e multiplicação por escalar são aquelas que satisfazem as operações numéricas. Assim, quando estas são as únicas operações envolvidas podemos proceder como se estivéssemos a lidar com números:

$$\begin{aligned} 3\big(X + \tfrac{1}{2}A\big) = 5\big(X - \tfrac{3}{4}B\big) &\Leftrightarrow 3X - 5X = -\frac{3}{2}A - \frac{15}{4}B \\ &\Leftrightarrow X = \frac{3}{4}A + \frac{15}{8}B. \end{aligned}$$

Solução (do problema i.8).— Tem-se:

$$\begin{aligned} X + A = 2(X - B) &\Leftrightarrow -X = -A - 2B \\ &\Leftrightarrow X = A + 2B. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução (do problema i.9).— Tem-se que:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + hy + g \\ hx + by + f \\ gx + fy + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + 2hxy + c \end{bmatrix}.$$

Tem-se agora:

(a)

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9/2 & 4 \\ 9/2 & 1 & 5/2 \\ 4 & 5/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Solução (do problema i.10).— Tem-se:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{0}.$$

Observe-se que se $n \geq 3$ se tem $A^n = \mathbb{0}$ porque

$$A^n = A^{(n-3)+3} = A^{n-3}A^3 = A^{n-3}\mathbb{0} = \mathbb{0}.$$

Solução (do problema i.11).— Tem-se que:

$$(A(B+C)^\top)^\top = (B+C)^\top A^\top = (B^\top + C^\top)A^\top = B^\top A^\top + C^\top A^\top,$$

onde a primeira igualdade se justifica através do uso da propriedade $(XY)^\top = Y^\top X^\top$; e a segunda se justifica pelo emprego da propriedade de distributividade à direita. ⊠

Solução (do problema i.12).— (a) Tem-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A+B) &= (A+B)_{1,1} + (A+B)_{2,2} + \cdots + (A+B)_{n,n} = \\ &= (A_{1,1} + B_{1,1}) + (A_{2,2} + B_{2,2}) + \cdots + (A_{n,n} + B_{n,n}) = \\ &= (A_{1,1} + A_{2,2} + \cdots + A_{n,n}) + (B_{1,1} + B_{2,2} + \cdots + B_{n,n}) = \\ &= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B). \end{aligned}$$

(b) Tem-se que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\alpha A) &= (\alpha A)_{1,1} + (\alpha A)_{2,2} + \cdots + (\alpha A)_{n,n} = \\ &= \alpha A_{1,1} + \alpha A_{2,2} + \cdots + \alpha A_{n,n} = \\ &= \alpha(A_{1,1} + A_{2,2} + \cdots + A_{n,n}) = \\ &= \alpha \operatorname{tr}(A). \end{aligned}$$

Note-se que em geral não se tem $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$. Isso pode confirmar-se facilmente através do seguinte contra-exemplo: se $\mathbb{1}$ é a matriz identidade de ordem 2 então $\operatorname{tr}(\mathbb{1}) = 2$.

Considerando $A = B = \mathbb{1}$ tem-se $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(\mathbb{1}) = 2$. No entanto $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = 2 \cdot 2 = 4$ logo, neste caso, $\mathrm{tr}(AB) \neq \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$. ▨

Solução (do problema i.13).— Verificamos apenas um dos casos os outros são análogos.

$$S_y S_z = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

e,

$$S_z S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, $S_y S_z = -S_z S_y$, como se pretendia. ▨

Solução (do problema i.14).— Tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= (AB)_{1,1} + (AB)_{2,2} + \cdots + (AB)_{n,n} = \\ &= (A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + \cdots + A_{1,n}B_{n,1}) + \\ &\quad (A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} + \cdots + A_{2,n}B_{n,2}) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad (A_{n,1}B_{1,n} + A_{n,2}B_{2,n} + \cdots + A_{n,n}B_{n,n}) \end{aligned}$$

que, somando coluna a coluna, é igual a

$$\begin{aligned} &= (A_{1,1}B_{1,1} + A_{2,1}B_{1,2} + \cdots + A_{n,1}B_{1,n}) + \\ &\quad (A_{1,2}B_{2,1} + A_{2,2}B_{2,2} + \cdots + A_{n,2}B_{2,n}) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad (A_{1,n}B_{n,1} + A_{2,n}B_{n,2} + \cdots + A_{n,n}B_{n,n}) \\ &= (B_{1,1}A_{1,1} + B_{1,2}A_{2,1} + \cdots + B_{1,n}A_{n,1}) + \\ &\quad (B_{2,1}A_{1,2} + B_{2,2}A_{2,2} + \cdots + B_{2,n}A_{n,2}) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad (B_{n,1}A_{1,n} + B_{n,2}A_{2,n} + \cdots + B_{n,n}A_{n,n}) \\ &= \mathrm{tr}(BA), \end{aligned}$$

como se pretendia. ▨

Solução (do problema i.15).— Calculando as potências indicadas obtém-se que $A^2 = -\mathbb{1}$, $A^3 = -A$ e $A^4 = \mathbb{1}$. Pelo que, continuando, se obtém $A^5 = A^4 A = \mathbb{1} A = A$, $A^6 = A^5 A = A^2 = -\mathbb{1}$, $A^7 = A^6 A = -\mathbb{1} A = -A$, $A^8 = A^7 A = -AA = -A^2 = \mathbb{1}$, etc.

Conclui-se assim que

$$A^n = \begin{cases} \mathbb{1} & (\text{se } n = 4k) \\ A & (\text{se } n = 4k+1) \\ -\mathbb{1} & (\text{se } n = 4k+2) \\ -A & (\text{se } n = 4k+3) \end{cases}$$

Solução (do problema i.16).— A demonstração é por indução.[3] Para $n = 1$ a relação é trivialmente verdadeira pois corresponde a

$$AB - BA = 1(AB + BA)\mathbb{1} = 1(AB - BA)A^0.$$

Admitamos como *hipótese de indução* que para qualquer $1 \leq k \leq n$ se tem $A^k B - BA^k = k(AB - BA)A^{k-1}$. Admitindo esta relação tentaremos então provar a *tese*

[3] O princípio de indução é normalmente formulado da seguinte forma: sendo $\Psi(x)$ é uma proposição acerca de números naturais x, se

(a) $\Psi(p)$ é verdadeira e,
(b) para qualquer $n \geq p$, sempre que $\Psi(n)$ é verdadeira, o mesmo sucede com $\Psi(n+1)$

então, tem-se que $\Psi(n)$ é verdadeira, para qualquer $n \geq p$.

No entanto o princípio de indução possui outras formulações equivalentes que, consoante as circunstâncias, se podem revelar mais adequadas. Uma dessas formulações é o denominado *princípio de indução completa*. A respectiva formulação é a seguinte: sendo $\Psi(x)$ é uma proposição acerca de números naturais x, se

(a) $\Psi(p)$ é verdadeira e,
(b) sempre que $\Psi(k), \ldots, \Psi(n)$ são verdadeiras, isso implica que $\Psi(n+1)$ é verdadeira

então, tem-se que $\Psi(n)$ é verdadeira, para qualquer $n \geq p$.

Observe-se que embora esta forma de indução seja logicamente equivalente à primeira, pode nas aplicações revelar-se mais fácil de usar. Observe-se que a hipótese de indução consiste, agora, em assumir que a proposição é verdadeira para todos os naturais que precedem cada n (e não apenas para o seu antecessor).

i.e., que se tem $A^{n+1}B - BA^{n+1} = (n+1)(AB - BA)A^n$. Pela nossa hipótese de indução a relação é verdadeira para n ou seja podemos assumir que

$$A^n B - BA^n = n(AB - BA)A^{n-1} \tag{I.10}$$

multiplicando (I.10) à esquerda por A, obtém-se:

$$A^{n+1}B - ABA^n = nA(AB - BA)A^{n-1} = n(AB - BA)A^n; \tag{I.11}$$

por outro lado, multiplicando (I.10) à direita por A, obtém-se:

$$A^n BA - BA^{n+1} = n(AB - BA)A^n. \tag{I.12}$$

Somando membro a membro as igualdades (I.11) e (I.12) obtemos:

$$A^{n+1} - BA^{n+1} + A^n BA - ABA^n = 2n(AB - BA)A^n,$$

ou seja,

$$A^{n+1} - BA^{n+1} = 2n(AB - BA)A^n - (A^n BA - ABA^n).$$

Tem-se então,

$$\begin{aligned}
A^{n+1} - BA^{n+1} &= 2n(AB - BA)A^n - (A^n BA - ABA^n)\\
&= 2n(AB - BA)A^n - A(A^{n-1}BA - BA^n)\\
&= 2n(AB - BA)A^n - A(A^{n-1}B - BA^{n-1})A\\
&= 2n(AB - BA)A^n - A((n-1)(AB - BA)A^{n-2})A\\
&= 2n(AB - BA)A^n - (n-1)A(AB - BA)A^{n-1}\\
&= 2n(AB - BA)A^n - (n-1)(AB - BA)A^n\\
&= (n+1)(AB - BA)A^n,
\end{aligned}$$

como se pretendia. ◪

Solução (do problema I.17).— A solução desta questão depende de uma simples observação: *se $AB = C$ então a i-ésima coluna de C obtém-se multiplicando a matriz A pela i-ésima coluna de B.* Feita esta observação tem-se que

$$AB = \left[A\mathrm{b}_1 \mid A\mathrm{b}_2 \mid A\mathrm{b}_3 \mid A\mathrm{b}_4 \right].$$

Ora, $A\mathrm{b}_1 = \mathrm{b}_4$ e $A\mathrm{b}_4 = \mathrm{b}_3$. Por outro lado tem-se:

$$\mathrm{b}_1 = A(\mathrm{b}_2 - \mathrm{b}_3) = A\mathrm{b}_2 - A\mathrm{b}_3 \quad \text{e} \quad \mathrm{b}_4 = A(\mathrm{b}_2 + \mathrm{b}_3) = A\mathrm{b}_2 + A\mathrm{b}_3.$$

Adicionando membro a membro as duas igualdades obtemos:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_4) = A\mathrm{b}_2$$

e, subtraindo membro a membro as duas igualdades obtemos:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{b}_4 - \mathrm{b}_1) = A\mathrm{b}_3.$$

Conclui-se assim que:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução (do problema I.18).— Basta fazer as contas:

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O exercício mostra que a fórmula do binómio de Newton não se aplica geralmente a matrizes, no entanto, pode ser verdadeira para certas potências de certas matrizes mesmo falhando para outras (envolvendo a mesmas matrizes).

Vale ainda a pena mencionar explicitamente as razões podem fazer falhar a igualdade $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Tem-se:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 &\Leftrightarrow (A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2 \\ &\Leftrightarrow A(A+B) + B(A+B) = A^2 + 2AB + B^2 \\ &\Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &\Leftrightarrow AB + BA = AB + AB \\ &\Leftrightarrow AB = BA.\end{aligned}$$

Ou seja a fórmula é verdadeira se e só se as matrizes A e B permutam. ☐

Solução (do problema 1.19).— (a) Mostremos primeiro (usando indução) que $AB^n = B^nA$, para todo o natural n. Para $n = 1$ o resultado é verdadeiro pela hipótese do enunciado (as matrizes comutam). Admitamos que o resultado é verdadeiro para um dado n. Vejamos que permanece válido para $n+1$. Tem-se $AB^{n+1} = A(B^nB) = (AB^n)B$ e, por hipótese de indução $AB^n = B^nA$ assim, $(AB^n)B = B^nAB = B^nBA = B^{n+1}A$, como se pretendia.

Usando agora indução em m podemos provar o caso geral. Para $m = 1$ estamos perante o resultado que acabámos de estabelecer. Admitamos pois que para um dado m se tem $A^mB^n = B^nA^m$. Então, para $m+1$ tem-se:

$$A^{m+1}B^n = AA^mB^n = AB^nA^m$$

pela hipótese de indução. Por outro lado, $AB^nA^m = B^nAA^m$, pelo anterior e, finalmente $B^nAA^m = B^nA^{m+1}$. como se pretendia.

(b) O resultado é trivialmente verdadeiro para $n = 1$ pois[4]

$$(A+B)^1 = A + B = \binom{1}{0}A^1B^0 + \binom{n}{1}A^0B^1 = \binom{1}{0}A^1\mathbb{1} + \binom{n}{1}\mathbb{1}B^1.$$

visto que, para qualquer $n \geq 1$ se tem

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1.$$

Suponhamos então que para um dado n se tem

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k.$$

e verifiquemos que a relação permanece verdadeira, neste caso, para $n+1$.

$$\begin{aligned}(A+B)^{n+1} &= (A+B)(A+B)^n \\ &= (A+B)\textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k \\ &= A\textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k + B\textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n+1-k}B^k + \textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^{k+1}.\end{aligned}$$

Recorrendo às propriedades usuais do símbolo de *somatório* obtemos:[5]

[4] Recorde-se que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

onde $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1)(n!)$. ($\binom{n}{k}$ é o número de combinações de n objectos tomados k a k e $n!$ é o factorial de n). Recorde-se ainda que por definição, para uma matriz quadrada A se tem:

$$A^0 = \mathbb{1}; \qquad A^{n+1} = A^nA = AA^n.$$

[5] As propriedades interessantes são:

$$\sum_{i=r}^{n} a_i = \sum_{i=r}^{s} a_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i$$

se $r < s < n$, e ainda

$$\sum_{i=r}^{n} a_i = \sum_{i=r+k}^{n+k} a_{i_k}$$

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n+1-k}B^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^{k+1}\\
&\quad=A^{n+1}+\textstyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n+1-k}B^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}A^{n-k}B^{k+1}+B^{n+1}\\
&\quad=A^{n+1}+\textstyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^{n+1-k}B^k+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}A^{n+1-k}B^{k}+B^{n+1}\\
&\quad=A^{n+1}+\textstyle\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)A^{n+1-k}B^k+B^{n+1}\\
&\quad=A^{n+1}+\textstyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}B^k+B^{n+1}\\
&\quad=\textstyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^{n+1-k}B^k,
\end{aligned}$$

como se pretendia. ⊠

Solução (do problema i.20).— Tem-se que:

$$A_\lambda^2=\begin{bmatrix}0&\lambda\\ \lambda^{-1}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\lambda\\ \lambda^{-1}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+\lambda\lambda^{-1}&\lambda 0+0\lambda\\ \lambda^{-1}0+0\lambda^{-1}&\lambda^{-1}\lambda+0\end{bmatrix}=\mathbb{1}.$$

Ou seja, a matriz identidade pode possuir infinitas raízes quadradas i.e., matrizes A tais que $A^2=\mathbb{1}$. ⊠

Solução (do problema i.21).—

(a) Calculando:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-c&b\\ c&0&-a\\ -b&a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-c&b\\ c&0&-a\\ -b&a&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(b^2+c^2)&ab&ac\\ ab&-(a^2+c^2)&bc\\ ac&bc&-(a^2+b^2)\end{bmatrix}$$

Por outro lado:

$$\mathrm{x}^\top\mathrm{x}-\mathbb{1}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2&ab&ac\\ ab&b^2&bc\\ ac&bc&c^2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2-1&ab&ac\\ ab&b^2-1&bc\\ ac&bc&c^2-1\end{bmatrix}$$

As duas matrizes são iguais porque, por hipótese $a^2+b^2+c^2=1$.

(b) Tem-se:

$$A^3=AA^2=\begin{bmatrix}0&-c&b\\ c&0&-a\\ -b&a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a^2-1&ab&ac\\ ab&b^2-1&bc\\ ac&bc&c^2-1\end{bmatrix}=-A$$

(Acima deixámos o cálculo do produto a cargo do leitor, mas as contas são simples.)

(c) Tendo em conta o anterior tem-se que:

$$A^4=A^3A=-A^2=\mathbb{1}-\mathrm{x}^\top\mathrm{x}.$$

Solução (do problema i.22).— O traço de uma matriz quadrada E, que se denota $\mathrm{tr}(E)$ é a soma dos elementos da diagonal principal. Se $\mathrm{tr}(E)=0$ neste caso em que a matriz é 2×2 isso significa que os dois elementos da diagonal principal são simétricos. A matriz E é então da forma

$$E=\begin{bmatrix}a&b\\ c&-a\end{bmatrix},$$

assim:

$$E^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab-ba \\ ca-ac & a^2+bc \end{bmatrix} = (a^2+bc)\mathbb{1}.$$

Pelo que basta considerar $\lambda = a^2 + bc$.

(b) Comecemos por observar que $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$. Como vimos no exercício 13, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Por outro lado, no exercício 11 vimos que $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$ e $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha\operatorname{tr}(A)$. Tem-se assim que $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$.

Pelo exercício anterior temos que existe λ tal que $(AB - BA)^2 = \lambda\mathbb{1}$. Assim sendo,

$$(AB-BA)^2C = \lambda\mathbb{1}C = \lambda C\mathbb{1} = C(\lambda\mathbb{1}) = C(AB-BA)^2.$$

Solução (do problema 1.23).— Calculando as primeiras potências de A obtemos que $A^4 = \mathbb{0}$, desta forma, para qualquer $n \geq 4$ tem-se $A^n = A^4A^{n-4} = \mathbb{0}A^{n-4} = \mathbb{0}$. Do cálculo dessas potências resulta ainda que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 & 2a^3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se assim que

$$B = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2/2 & a^3/3 \\ 0 & 0 & a & a^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O resto da resolução é semelhante à primeira parte: o cálculo das primeiras potências de B mostra que $B^4 = \mathbb{0}$ pelo que

$$B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \frac{1}{4!}B^4 + \cdots = B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3,$$

e a igualdade pretendida pode ser verificada calculando a soma finita. ☒

Solução (do problema 1.24).— (a) Tem-se:

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\theta)(\cos\phi) - (\sin\theta\sin\phi) & (\cos\theta)(\sin\phi) + (\sin\theta)(\cos\phi) \\ -((\cos\theta)(\sin\phi) + (\sin\theta)(\cos\phi)) & (\cos\theta)(\cos\phi) - (\sin\theta)(\sin\phi) \end{bmatrix}$$

Tendo em contas as fórmulas trigonométricas[6] obtemos que

$$AB = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix}.$$

[6] As fórmulas em questão são as seguintes:

$$\sin(\theta \pm \phi) = (\sin\theta)(\cos\phi) \pm (\cos\theta)(\sin\phi)$$
$$\cos(\theta \pm \phi) = (\cos\theta)(\cos\phi) \mp (\sin\theta)(\sin\phi).$$

(b) O caso $n = 1$ é evidente. Admitamos como hipótese de indução que para um dado n se tem

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

e verifiquemos que também se tem então que:

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta \\ -\sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{bmatrix}$$

Temos:

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n\theta+\theta) & \sin(n\theta+\theta) \\ -\sin(n\theta+\theta) & \cos(n\theta+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta \\ -\sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{bmatrix}$$

recorrendo uma vez mais às fórmulas trigonométricas. ⊠

Solução (do problema i.25).— (a) Tem-se que

$$\begin{aligned}
&[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B] = \\
&\quad = (AB-BA)C - C(AB-BA) + (BC-CB)A - A(BC-CB) + (CA-AC)B - B(CA-AC) \\
&\quad = ABC - BAC - CAB + CBA + BCA - CBA - ABC + ACB + CAB - ACB - BCA + BAC \\
&\quad = (ABC-ABC) + (BAC-BAC) + (CAB-CAB) + (CBA-CBA) + (BCA-BCA) + (ACB-ACB) = \mathbb{0}.
\end{aligned}$$

(b) Tem-se:

$$[A+B,C] = (A+B)C - C(A+B) = AC + BC - CA - CB = (AC-CA) + (BC-CB) = [A,C] + [B,C].$$

(c) Tem-se:

$$[A,B+C] = A(B+C) - (B+C)A = AB + AC - BA - CA = (AB-BA) + (AC-CA) = [A,B] + [A,C].$$

(d) Temos que:

$$[\alpha A, B] = (\alpha A)B - B(\alpha A) = \alpha AB - \alpha BA = \alpha(AB-BA) = \alpha[A,B].$$

Por outro lado,

$$[A, \alpha B] = A(\alpha B) - (\alpha B)A = \alpha AB - \alpha BA = \alpha(AB-BA) = \alpha[A,B].$$