Semanas 2 e 3

Sistemas de equações lineares
Representações matriciais
Método de eliminação de Gauss
Determinação da inversa

2.1 Equações lineares e sistemas de equações lineares

Equação linear

Definição 2.1 (equação linear).— *Uma equação linear com coeficientes em $\mathbb{K}$ nas incógnitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma expressão equivalente a uma expressão da forma:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta \tag{2.1}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{K}$.

Por exemplo $2x + y = 0$ é uma equação linear nas variáveis (x, y). A equação $2x = 1 - x - 3y + z$ também é uma equação linear nas variáveis (x, y, z), porque recorrendo às regras propriedades algébricas válidas em qualquer corpo e, em particular, em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$, verificamos facilmente que aquela equação é equivalente a $3x + 3y - z = 1$ que é da forma (2.1).

Facilmente se observa que uma equação linear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é uma igualdade $\sigma = \tau$ onde σ e τ são somas de expressões da forma αx onde α é um escalar e x é uma das variáveis.[1]

Observe-se ainda que indicamos não apenas um conjunto de variáveis mas um n-úplo de variáveis, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Isto é importante na definição seguinte:

[1] Com efeito, uma tal expressão pode ser sempre escrita a menos de equivalência na forma (2.1).

Conjunto solução de uma equação linear

Definição 2.2 (conjunto solução de uma equação linear).— *Seja $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$ uma equação linear nas variáveis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. O* conjunto solução *desta equação é o conjunto*

$$\mathcal{S} = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n \mid \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_n \xi_n = \beta\}.$$

Equações equivalentes

Definição 2.3 (equações equivalentes).— *Duas equações lineares, nas mesmas variáveis, são equivalentes se têm as mesmas soluções.*

Note-se que muitas vezes limitamo-nos a indicar as variáveis de uma equação sem indicar explicitamente uma ordenação, casos em que se assume que a ordem é a ordem pela qual as variáveis são apresentadas. No caso de variáveis indexadas e.g., $u_1, u_2, u_3, \ldots$ a ordem que se considera é a ordem natural dos seus índices, desde que não seja fornecida outra.

Por exemplo, consideremos a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ em $\mathbb{R}$.[2] Para encontrar o conjunto solução desta equação, podemos exprimir uma das variáveis à custa das outras e.g. $x_1 = -x_2 - x_3$ ou $x_2 = -x_1 - x_3$ ou ainda $x_3 = -x_1 - x_2$. Cada uma destas equações serva para descrever o conjunto solução:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, -x_1 - x_3, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Observe-se que em cada uma das formas de exprimir o conjunto solução, uma variável é função de outras duas que podem tomar qualquer valor. Em cada uma dessas formas, as variáveis que podem tomar qualquer valor dizem-se *variáveis livres* as que são função destas dizem-se *variáveis dependentes*. Note-se que a classificação das variáveis enquanto livres ou dependentes não se faz a partir da equação, *ela é uma consequência da forma que se escolhe para apresentar a solução*.

[2] De acordo com a nossa convenção x_1 é a primeira variável, x_2 a segunda e x_3 a terceira.

Variáveis livres e dependentes

As equações lineares ocorrem naturalmente numa variedade de contextos mas, frequentemente um problema requer que encontremos as soluções de várias equações lineares simultaneamente. Esta situação motiva a próxima definição.

Definição 2.4 (sistema de equações lineares).— *Um sistema de equações lineares é simplesmente um conjunto, $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, de equações lineares (em $(x_1, \dots, x_n)$). Se $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, consiste nas equações $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$ e se para cada $i = 1, \dots, k$ se tem que $\mathcal{S}_i$ é o conjunto solução da equação $\mathcal{E}_i$ então, o conjunto solução do sistema $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, que denotamos por $\mathcal{S}(\Sigma)$, é a interseção dos conjuntos solução das equações que compõem o sistema i.e.,*

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{S}_i.$$

Sistema de equações lineares
Conjunto solução de um sistema de equações lineares

Definição 2.5 (sistemas equivalentes).— *Dois sistemas de equações, nas mesmas variáveis são equivalentes se possuem o mesmo conjunto solução.*

Sistemas equivalentes

Normalmente, um sistema $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ com m equações é apresentado na forma:

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n = \beta_m \end{cases} \tag{2.2}$$

ou melhor dizendo, numa forma que é equivalente (usando equações equivalentes) àquela forma. Por exemplo, consideramos que:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x = 2 - z \\ x + y = -1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 0y + z = 2 \\ x + y + 0z = -1 \end{cases}$$

são ambos sistemas (e equivalentes).

Os sistemas de equações podem envolver muitas equações e muitas incógnitas. Não obstante, iremos descrever um método mecânico que nos permite resolver qualquer sistemas de forma sistemática, através da implementação de um algoritmo. Isso pressupõe entre outras coisas uma representação adequada dos sistemas de equações lineares.

2.2 Representação matricial de sistemas

Dado um sistema de equações lineares como (2.2) a respectiva representação matricial envolve as denominadas *matriz dos coeficientes*, *coluna dos termos independentes*, *coluna das variáveis* e *matriz aumentada do sistema*.

Matriz dos coeficientes de um sistema

A matriz dos coeficientes é preenchida com os coeficientes das variáveis nas diferentes equações que compõem o sistema: cada linha diz respeito a uma única equação enquanto cada coluna diz respeito a uma única variável. No caso do sistema (2.2) a matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{array}{c l} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Eq. 1} \\ \text{Eq. 2} \\ \vdots \\ \text{Eq. } m \end{matrix} \end{array} \tag{2.3}$$

Coluna dos termos independentes de um sistema

A coluna do termos independentes guarda os termos independentes de cada uma das equações i.e., os escalares que em cada equação não estão multiplicados por nenhuma variável. Mais uma vez, cada linha respeita a uma equação. Assim, no caso do sistema (2.2) a coluna dos termos independentes é:

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Eq. 1} \\ \text{Eq. 2} \\ \vdots \\ \text{Eq. } m \end{matrix} \tag{2.4}$$

Vector coluna das variáveis de um sistema

O vector coluna das variáveis é um vector coluna que contém as variáveis pela exacta ordem em que são consideradas nas equações do sistema. Mais uma vez, no caso do sistema (2.2) a coluna das varáveis é:

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Matriz aumentada de um sistema

Finalmente, a matriz aumentada obtém-se juntando a coluna dos termos independentes à matriz dos coeficientes do sistema:

$$[A|\mathrm{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} & \beta_1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,n} & \beta_m \end{array}\right] \tag{2.6}$$

Exemplo 1.— Consideremos o seguinte sistema nas variáveis x, y, z, w:

$$\begin{cases} y - x = w - z \\ x + w - z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Antes de obtermos as matrizes associadas ao sistema substituímos. sistema dado por outro que lhe é equivalente mas que se encontra na *forma normal* i.e. na forma de (2.2):

$$\begin{cases} -x + y + z - w = 0 \\ x + 0y - z + w = 0 \\ x + y + 0z + 0w = 1 \end{cases}$$

A partir desta forma as matrizes, dos coeficientes, das variáveis, dos termos independentes e a matriz aumentada são, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Evidentemente o processo pode ser revertido e, se forem dadas uma matriz aumentada e a sequência de variáveis de um sistema de equações lineares, é possível escrevê-lo. É por isso que, muitas vezes nos referimos a uma matriz aumentada de um sistema como *o sistema* pensando evidentemente no sistema que ele representa.

Exemplo 2.— Resolva o sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

O primeiro desafio que se coloca é o de escrever um sistema a que esta matriz corresponda como matriz aumentada. Uma vez que não foi antecipadamente uma lista de variáveis, podemos nós próprios fornecer uma. As variáveis que escolhemos são de facto irrelevantes i.e., se duas pessoas escolherem listas diferentes de variáveis vão obter sistemas equivalentes (com as mesmas soluções). Assim, escolhemos como lista de variáveis a lista (x_1, x_2, x_3, x_4). Feita esta escolha, o sistema que corresponde à matriz acima é o seguinte:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Este sistema é muito fácil de resolver. Temos imediatamente que $x_4 = 1$, substituindo este valor na terceira equação obtemos $x_3+1 = 1$ ou seja $x_3 = 0$. Finalmente resta-nos a primeira equação onde podemos substituir as nossas determinações de x_1 e x_3. Obtemos $x_1+2\cdot 0+1 = 1$, ou seja $x_1 = 0$. Temos então que (x_1, x_2, x_3, x_4) é uma solução do sistema se $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$. Observe-se que não existe nenhum constrangimento sobre x_2 que, portanto, pode ser qualquer. O conjunto solução é então:

$$\mathcal{S} = \{(0, x_2, 0, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Foi possível resolver o sistema descrito no exemplo anterior de forma muito simples. Basicamente começando por resolver a última equação e depois, por substituições percorrer no sentido ascendente todas as equações até obter a solução final. Este método não funciona para sistemas em geral, mas funcionou neste caso por uma razão particular: a matriz do sistema encontra-se numa forma muito especial—diz-se que está em *escada de linhas*.

Definição 2.6 (pivô de uma linha de uma matriz).— *Seja A uma matriz. Para cada linha de A, o* pivô *dessa linha é a primeira entrada não nula nessa mesma linha, caso exista. Uma linha nula não tem pivô.*

Pivô de uma linha de uma matriz

Definição 2.7 (matriz em escada de linhas).— *Uma matriz A encontra-se em* escada de linhas *se se verificam as aeguintes condições:*

Matriz em escada de linhas

1. *depois de uma linha nula só existem linhas nulas;*
2. *na coluna do pivô de cada linha, abaixo dele, as entradas são todas nulas;*
3. *percorrendo as linhas no sentido descendente, os índices de coluna das posições dos pivôs aumentam estritamente.*

Exemplo 3.— Das matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

apenas a matriz C se encontra em escada de linhas.

Quando a matriz de um sistema se encontra em escada de linhas, a respectiva resolução é simples e pode ser efectuada usando o método do exemplo 2.

Na secção seguinte descrevemos um procedimento algorítmico—o *método de eliminação de Gauss*—que permite transformar qualquer sistema, ou melhor, que permite transformar a matriz aumentada de um qualquer sistema, numa matriz em escada de linhas que representa um sistema equivalente ao primeiro. Este último, pelas considerações anteriores é fácil de resolver e, o seu conjunto solução é também o conjunto solução do sistema inicial.

Antes concluirmos a presente secção apresentamos uma outra forma de descrever um sistema de equações lineares. Dado um sistema de equações lineares, $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, com m equações lineares, e sendo A, x e b a matriz dos coeficientes do sistema, b a coluna dos termos independentes e x a coluna das variáveis então resolver o sistema Σ é equivalente a resolver a equação matricial $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ (na incógnita x).

Com efeito, supondo que o sistema é

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n = \beta_m \end{cases}$$

então tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots\cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{1,1} & \cdots\cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots\cdots & \alpha_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

e, desta forma $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ é

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{1,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n \\ \alpha_{2,1}x_1 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

o que, pelo critério de igualdade de matrizes é equivalente ao sistema original. Ou seja um vector coluna

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

é solução da equação matricial $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ se e só se o n-úplo $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ é solução do sistema. É exactamente neste sentido que entendemos que o sistema e a equação matricial que lhe está associada são equivalentes.

2.2.1 Classificação de um sistema relativamente à existência de soluções

Relativamente à existências de soluções, os sistemas distribuem-se por três categorias: os sistemas *ipossíveis* são aqueles cujo conjunto solução é vazio. O mesmo é dizer: que não têm soluções. O sistema que possuem uma única solução dizem-se *possíveis e determinados*. Finalmente os sistemas que possuem mais que uma solução dizem-se *possíveis e indeterminados*.

Sistemas impossíveis

Sistemas possíveis e determinados

Sistema possíveis e indeterminados

2.2.2 Representação de um sistema através de uma equação matricial

Consideremos um sistema onde a matriz dos coeficientes, A, a coluna das variáveis, x, e a coluna dos termos independentes, b, são:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

respectivamente. Neste caso, o sistema em causa é o sistema:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}.$$

Tem-se então que as soluções do sistema são exactamente as soluções da equação matricial $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$.

Com efeito, $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ equivale a

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots\cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots\cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots\cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Pelo critério de igualdade de matrizes, constata-se sem dificuldade que a igualdade acima é equivalente ao sistema apresentado.

2.3 Método de eliminação de Gauss

Definição 2.8 (operações elementares sobre linhas).— *As denominadas* operações elementares *sobre as linhas de uma matriz são de três tipos:*

Operações elementares sobre linhas

1. *troca de duas linhas;*
2. *multiplicação de uma linha por um escalar não nulo;*
3. *substituir uma linha pelo resultado de adicionar a essa linha uma outra previamente multiplicada por um escalar.*

Recorremos à seguinte simbologia para descrever as operações elementares; αL_i denota a multiplicação da linha i pelo escalar $\alpha \neq 0$; $L_i \leftrightarrows L_j$ indica a troca da linha i com a linha j; $L_i + \alpha L_j$ representa o resultado de substituir a linha i pelo resultado de somar à linha i a linha j multiplicada por α. (Note-se que a primeira linha indicada é aquela que é alterada e.g., $L_1 + L_2$ significa que a primeira linha é substituída pelo resultado de somar a segunda linha à primeira.)

Os efeitos destas operações numa matriz, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, podem ser obtidos algebricamente, multiplicando à esquerda a matriz A por certas matrizes que designamos de *matrizes elementares* e que passamos desde já a descrever.

Matrizes elementares

Denotamos por $E^m_{ij} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ a matriz, que é como a matriz identidade excepto que com as linhas i e j da identidade trocadas entre si. Denotamos por $E^m_{ij}(\alpha) \in \mathbb{K}^{m\times m}$ (com $i \neq j$) a matriz que é como a matriz identidade excepto que a entrada i, j é α. Finalmente, denotamos por $E^m_i(\alpha) \in \mathbb{K}^{m\times m}$ (para $\alpha \neq 0$) a matriz que é como a identidade excepto que na i-ésima posição da diagonal está o escalar α. Tem-se então o seguinte:

(1) $E^m_{ij}A = B$, onde B é a matriz que resulta de A trocando as linhas i e j entre si.

(2) $E^m_i(\alpha)A = B$, onde B é a matriz que resulta de A substituindo a linha i de A por $\alpha A_{i,*}$, i.e. multiplicando a linha i de A pelo escalar $\alpha \neq 0$.

(3) $E^m_{ij}(\alpha)A = B$, onde B é a matriz que resulta de A substituindo a linha i de A por $A_{i,*} + \alpha A_{j,*}$, i.e. adicionando à linha i de A a linha j multiplicada por α.

As matrizes elementares são todas invertíveis e não é difícil constatar que $(E_{ij}^m)^{-1} = E_{ij}^m$; $(E_i^m(\alpha))^{-1} = E_i^m(\alpha^{-1})$; e $(E_{ij}^m(\alpha))^{-1} = E_{ij}^m(-\alpha)$. Em particular, *as inversas das matrizes elementares são matrizes elementares do mesmo tipo*.

É interessante notar que, se em vez de multiplicarmos matrizes elementares à esquerda, efectuarmos as multiplicações à direita, obtemos efeitos semelhantes, mas desta vez sobre as colunas. Mais precisamente:

(1) $AE_{ij}^n = B$, onde B é a matriz que resulta de A trocando as colunas i e j entre si.

(2) $AE_i^n(\alpha) = B$, onde B é a matriz que resulta de A substituindo a coluna i de A por $\alpha A_{*,i}$, i.e. multiplicando a coluna i de A pelo escalar $\alpha \neq 0$.

(3) $AE_{ij}^n(\alpha) = B$, onde B é a matriz que resulta de A substituindo a coluna j de A por $A_{j,*} + \alpha A_{i,*}$, i.e. adicionando à coluna j de A a coluna i multiplicada por α.

Quando m e n são claros omitimos a sua referência nas matrizes elementares, indicando-as mais simplesmente nas formas E_{ij}, $E_i(\alpha)$ e $E_{ij}(\alpha)$, respectivamente.

Definição 2.9 (matrizes Gauss-equivalentes).—
Duas matrizes A e B dizem-se Gauss-equivalentes*, o que representamos simbolicamente por $A \equiv_G B$, se existe uma sequência, $(E_1, E_2, \dots, E_k)$, de matrizes elementares tal que*

Matrizes Gauss-equivalentes

$$B = E_1 E_2 \cdots E_k A.$$

De forma equivalente, B pode obter-se de A através da aplicação de uma sequência de operações elementares sobre linhas.

Teorema 2.10.— *A relação $\equiv_G$ possui as seguintes propriedades:*

(1) *$A \equiv_G A$;*

(2) *$A \equiv_G B$ se e só se $B \equiv_G A$;*

(3) *se $A \equiv_G B$ e $B \equiv_G C$ então $A \equiv_G C$.*

Demonstração.— Ver o apêncice 2.B. ◪

Teorema 2.11.— *Seja A uma matriz arbitrária. Existe uma matriz em escada por linhas, K, que é Gauss-equivalente a A, i.e. $A \equiv_G K$.*

Demonstração.— A demonstração recorre ao denominado método de eliminação de Gauss. Ver apêndice 2.B. ◪

A transformação de uma matriz arbitrária numa matriz em escada de linhas pode fazer-se recorrendo ao denominado *algoritmo de eliminação de Gauss*. Ilustramos agora a utilização desse algoritmo recorrendo a um exemplo.

Exemplo 4.— Consideremos a matriz,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

para a transformar numa matriz em escada de linhas, recorrendo a uma sequência de operações elementares.

O algoritmo funciona da seguinte forma: na primeira etapa, trocando linhas se necessário, asseguramos que a primeira linha seja uma das linhas da matriz com o pivô o mais à esquerda possível. Assim, trocaremos a primeira linha com a terceira (a troca da primeira com a segunda seria igualmente admissível). Obtemos então

$$A_0 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A_1$$

Obtemos assim, ao fim da primeira etapa a matriz A_1. A partir deste momento a primeira linha da matriz nunca mais se modifica. A etapa 2, irá agora incidir sobre a parte da matriz que corresponde às linhas a partir da linha 2, repetido neste bloco o procedimento anterior. A primeira linha deste bloco já é (neste bloco) uma das que tem o pivô o mais à esquerda possível pelo que a manteremos como primeira linha. Procedemos então para anular todas as posições abaixo do pivô:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-2L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A_2$$

Chegados ao final da segunda etapa, as duas primeiras linhas da matriz vão, a partir de agora, permanecer alteradas e vamos repetir o processo, considerando o bloco que consiste nas três últimas linhas. A primeira linha deste bloco já é uma das que neste bloco tem o pivô o mais à esquerda possível e podemos usá-la. No entanto as constas simplificam-se muito quando o pivô é 1 ou -1 pelo que, ainda assim, iremos trocar as linhas 3 e 5, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{L_5+2L_3} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A_3$$

Repetindo o processo uma última vez obtemos

$$K = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz em escada por linhas.

A matriz K no lema precedente não é única, e.g se K está em escada de linhas então $K' = E_1(2)K$ também está em escada de linhas e é Gauss-equivalente a K. Existe no entanto uma forma em escada por linhas para o qual se pode obter um resultado de unicidade.

Definição 2.12 (matriz em escada de linhas reduzida).—
Uma matriz K, em escada de linhas, encontra-se em escada por linhas reduzida *se todos os pivôs são 1 e acima de cada pivô só existem zeros.*

Matriz em escada de linhas reduzida

Corolário 2.12.1.— *Seja A uma matriz arbitrária. Existe uma matriz, $\bar{K}$, em escada por linhas reduzida tal que $A \equiv_G \bar{K}$.*

Demonstração.— Ver apêndice 2.B. ☐

Definição 2.13.— *Seja $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, uma matriz. Dados $\bar{m} \leq m$ e $\bar{n} \leq n$ denotamos por $A{\restriction}\bar{m} \times \bar{n}$ a matriz $B \in \mathbb{K}^{\bar{m}\times\bar{n}}$ tal que, para quaisquer $1 \leq i \leq \bar{m}$ e $1 \leq j \leq \bar{n}$ se tem $a_{i,j} = b_{i,j}$. Ou seja, $A{\restriction}\bar{m} \times \bar{n}$ consiste nas entradas das primeiras $\bar{m}$ linhas e $\bar{n}$ colunas de A.*

Lema 2.14.— *Sejam, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\bar{m} \leq m$ e $\bar{n} \leq n$. Se $A \equiv_G K$ então $A{\restriction}\bar{m}\times\bar{n} \equiv_G K{\restriction}\bar{m}\times\bar{n}$.*

Demonstração.— Ver apêndice 2.B. ☐

2.4 Resolução de sistemas de equações pelo método de eliminação de Gauss

Teorema 2.15.— *Suponhamos que $[A|\mathrm{b}]$ é a matriz aumentada de um sistema Σ e que $[A'|\mathrm{b}']$ é uma matriz em escada de linhas que é Gauss-equivalente a $[A|\mathrm{b}]$. Nestas condições, o sistema que é representado por $[A'|\mathrm{b}']$ é equivalente a Σ.*[3]

[3] De facto o resultado é ainda mais geral: se $[A|b] \equiv_G [A'|b']$, então os sistemas representados por $[A|b]$ e $[A'|b']$ são equivalentes.

A conveniência de ter um sistema descrito por uma matriz em escada de linhas é que a determinação das suas soluções é simples. Ilustramos este facto recorrendo a dois exemplos.

Exemplo 5.— Consideremos o sistema nas variáveis x, y, z representado pela matriz:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Para escrever o sistema que corresponde a esta matriz ainda é necessária uma informação adicional: a que variável corresponde cada coluna da matriz (à esquerda do traço vertical). De facto as variáveis poderiam ser consideradas por qualquer ordem, continuando a representar sistemas equivalentes (a adição é comutativa). Não se dizendo nada considera-se a ordem alfabética, i.e.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ -y + z = 1 \\ 3z = 2 \end{cases} .$$

Observe-se agora que as variáveis se podem determinar começando pela última equação: $z = 2/3$; substituindo na segunda equação obtemos $y = z - 1 = 2/3 - 1 = -1/3$; finalmente, na primeira equação temos $x = -1-2y-z = -1-2/3-2/3 = -7/3$.

Exemplo 6.— Consideremos o sistema nas variáveis x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 descrito pela matriz:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Mais uma vez não se indicando uma ordem para as variáveis admite-se que se consideram pela ordem natural:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 + 2x_5 = -1 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ -x_5 = 2 \end{cases} .$$

A resolução procede como no exemplo anterior, começando pela última equação concluímos que $x_5 = -2$; chegando à segunda equação, o que podemos fazer é escrever uma das variáveis à custa das restantes e embora isso não seja necessário, podemos por exemplo, escolher a variável correspondente à coluna com o pivô para ser expressa em função das restantes. Neste caso $x_3 = -x_4$; chegados à primeira equação e podemos escrever $x_1 = -1 - x_4 - x_5 = -1 - x_4 + 2 = 1 - x_4$. Neste caso o conjunto das soluções do sistema é o conjunto:

$$\{(1 - x_4, x_2, -x_4, -2) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

O sistema é portanto possível e indeterminado. Observe-se que três das variáveis ficam expressas em função das duas restantes. Estas variáveis que se podem exprimir em função das restantes dizem-se *dependentes* em qualquer outro caso, tal como neste, são numa quantidade que iguala a quantidade de pivôs na matriz do sistema quando esta se encontra em escada de linhas. As restantes variáveis dizem-se *livres*. A sua quantidade é assim a diferença entre o número de variáveis e o número de pivôs. Esta diferença designa-se de *grau de indeterminação do sistema*.

Um sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ que seja possível e indeterminado é equivalente a um sistema $K\mathrm{x} = \mathrm{b}^*$, onde K é uma matriz em escada de linhas reduzida. Podemos resolver o sistema exprimindo as variáveis correspondentes às colunas com pivôs em função das que não possuem essa propriedade, nesta forma de exprimir a solução, as variáveis que correspondem às colunas com pivôs correspondem às *variáveis dependentes* as restantes correspondem às variáveis *livres*. O número de variáveis livres corresponde àquilo que se designa de *grau de indeterminação do sistema*.

As considerações anteriores permitem-nos classificar os sistemas de equações lineares de uma forma muito simples. Assim, dado um sistema de equações lineares $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, a que corresponde a matriz aumentada $[A|\mathrm{b}]$, sabemos que este sistema é equivalente ao sistema representado por $[A'|\mathrm{b}']$ onde $[A|\mathrm{b}] \equiv_G [A'|\mathrm{b}']$. Se o número de pivôs em $[A'|\mathrm{b}']$ for maior que o número de pivôs em A' então, o sistema é impossível. No caso de $[A'|\mathrm{b}']$ e A' terem o mesmo número de pivôs, o sistema é possível. Neste caso, se o número de pivôs for igual ao número de variáveis (o número de colunas da matriz dos coeficientes), o sistema é possível e determinado. Se o número de pivôs for inferior ao número de variáveis então o sistema é indeterminado.

2.5 Núcleo de uma matriz

Definição 2.16 (nucleo de uma matriz).— *O* núcleo *de uma matriz* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *é o conjunto solução do sistema* $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$. Núcleo de uma matriz

Um sistema da forma $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$ diz-se um *sistema homogéneo*. Como se tem sempre que $A\mathbb{0} = \mathbb{0}$ um sistema deste tipo é sempre possível i.e., $\mathrm{x} = \mathbb{0}$ é uma solução do sistema. Sistema homogéneo

Lema 2.17.— *Seja* A *uma matriz. Tem-se:*

1. $\mathbb{0} \in \mathrm{Nuc}(A)$*;*
2. *se* $\mathrm{u}, \mathrm{w} \in \mathrm{Nuc}(A)$ *então,* $\mathrm{u} + \mathrm{w} \in \mathrm{Nuc}(A)$*;*
3. *se* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\mathrm{u} \in \mathrm{Nuc}(A)$ *então,* $\alpha\mathrm{u} \in \mathrm{Nuc}(A)$*.*

Se $\mathrm{Nuc}(A) = \{\mathbb{0}\}$ dizemos que o núcleo de A *é trivial*, caso contrário dizemos que é *não-trivial*.

Lema 2.18.— *Sejam,* $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ *um sistema possível e* u_0 *uma solução do sistema. O conjunto solução de* $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ *é*

$$\mathcal{S} = \{\mathrm{u}_0 + \mathrm{w} \mid \mathrm{w} \in \mathrm{Nuc}(A)\}.$$

Desta forma o sistema é possível e determinado se e só se o núcleo de A *é trivial.*

2.6 O problema da existência da inversa e a sua determinação.

Retomamos neste ponto a questão de decidir se uma matriz é ou não invertível e, em caso afirmativo de determinar essa inversa (que, já se sabe, é única).

Consideremos então uma matriz quadrada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Sabemos que existe uma matriz invertível E (que é um produto de matrizes elementares) tal que $EA = K$ onde K é uma matriz em escada de linhas reduzida. Ora, se K não é a matriz indentidade então tem pelo menos uma linha de zeros e, neste caso, $\mathrm{Nuc}(K)$ não é trivial e, consequentemente não pode ser invertível porque o núcleo de uma matriz invertível é composto unicamente pelo vector nulo. Ora, sendo o produto EA não invertível e sendo E invertível, temos que concluir que A não é invertível.

Ou seja, tem-se o seguinte resultado,

Lema 2.19.— *Uma matriz* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *é invertível se e só se o número de pivôs de uma qualquer matriz em escada de linhas, Gauss-equivalente a* A*, é* n*.*

De acordo com o lema precedente, no caso de A ser invertível, todos os sistemas da forma $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ são possíveis e determinados. Desta forma, existem soluções únicas para os sistemas

$$A\mathrm{x} = \mathbb{1}_{*,j} \qquad (1 \le j \le n).$$

Dispondo as soluções destes sistemas como colunas de uma matriz B, tendo em conta a definição de produto de duas matrizes, resulta que $AB = \mathbb{1}$. Ora esta matriz B é de facto a inversa de A pois, de acordo com o lema seguinte também se verifica $BA = \mathbb{1}$.

Lema 2.20.— *Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. São equivalentes:*

(1) *A é invertível;*

(2) *Existe B tal que $AB = \mathbb{1}$;*

(3) *Existe B tal que $BA = \mathbb{1}$.*

Demonstração.— Ver apêndice 2.B. ◪

Viu-se anteriormente que se uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ é invertível, então a i-ésima coluna da inversa é a única solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathbb{1}_{*,i}$. OU seja para determinar a inversa de A temos que ter soluções (únicas) para os n sistemas:

$$A\mathrm{x} = \mathbb{1}_{*,1}, \quad A\mathrm{x} = \mathbb{1}_{*,2}, \quad \cdots \quad A\mathrm{x} = \mathbb{1}_{*,n}.$$

Se tivermos em conta que na eliminação de Gauss de um sistema de equações lineares, as operações que compõem essa eliminação são determinadas exclusivamente pelo conteúdo da matriz dos coeficientes, concluímos sem dificuldade que podemos condensar a resolução de vários sistemas de equações que possuem a mesma matriz dos coeficientes, numa única matriz. De um modo geral, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b}_1^1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m^1 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathrm{b}_k = \begin{bmatrix} b_1^k \\ \vdots \\ b_m^k \end{bmatrix}$$

então, para resolver os sistemas $A\mathrm{x} = \mathrm{b}_s$ $(1 \leq s \leq k)$, podemos proceder da seguinte forma: fazendo a eliminação de Gauss da matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1^1 & \cdots & b_1^k \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} & b_2^1 & \cdots & b_2^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m^1 & \cdots & b_m^k \end{array}\right] \text{ obtendo } \left[\begin{array}{ccc|ccc} \tilde{a}_{1,1} & \cdots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{b}_1^1 & \cdots & \tilde{b}_1^k \\ \tilde{a}_{2,1} & \cdots & \tilde{a}_{2,n} & \tilde{b}_2^1 & \cdots & \tilde{b}_2^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m,1} & \cdots & \tilde{a}_{m,n} & \tilde{b}_m^1 & \cdots & \tilde{b}_m^k \end{array}\right]$$

onde a matriz à direita se encontra em escada de linhas. Neste ponto, as matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{a}_{1,1} & \cdots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{b}_1^1 \\ \tilde{a}_{2,1} & \cdots & \tilde{a}_{2,n} & \tilde{b}_2^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{m,1} & \cdots & \tilde{a}_{m,n} & \tilde{b}_m^1 \end{array}\right] \quad \cdots \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{a}_{1,1} & \cdots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{b}_1^k \\ \tilde{a}_{2,1} & \cdots & \tilde{a}_{2,n} & \tilde{b}_2^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{m,1} & \cdots & \tilde{a}_{m,n} & \tilde{b}_m^k \end{array}\right]$$

que se encontram em escada de linhas, representam sistemas que são equivalentes aos sistemas $A\mathrm{x} = b_1, \ldots, A\mathrm{x} = \mathrm{b}_k$, respectivamente.

Esta observação permite-nos descrever um algoritmo para o cálculo da inversa de uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Recorde-se que para obter a inversa temos que tentar resolver os sistemas $A\mathrm{x} = \mathbb{1}_{*,1}, \ldots, A\mathrm{x} = \mathbb{1}_{*,n}$. De acordo com as considerações anteriores podemos resolver simultaneamente todos estes sistemas (que partilham a mesma matriz dos coeficientes) considerando a matriz:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & \mathbb{1}_{*,1} & \mathbb{1}_{*,2} & \cdots & \mathbb{1}_{*,n} \\
\end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]$$

ou seja, considerando a matriz $[A|\mathbb{1}]$ e procedendo à respectiva eliminação de Gauss reduzindo-a a uma matriz em escada de linhas. Se nesta última matriz as posições correspondentes à diagonal de A possuem pivôs, todos os sistemas são possíveis e determinados e a inversa existe. Caso contrário, pelo menos um dos sistemas será impossível e não existe inversa. No primeiro caso, procedendo de modo a obter a matriz em escada de linhas reduzida, obter-se-á uma matriz da forma $[\mathbb{1}|B]$ e, neste caso, as colunas de B são precisamente as colunas da inversa e tem-se $B = A^{-1}$.

Ilustramos estas considerações através de dois exemplos.

Exemplo 7.— A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível. Com efeito:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \equiv_G \left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1
\end{array}\right]$$

constatando-se que após a eliminação de Gauss e tendo-se obtido uma matriz em escada de linhas, nem todas as posições correspondentes à diagonal de A possuem pivôs, desta forma A não é invertível.

Exemplo 8.— A matriz,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é invertível. Com efeito,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1
\end{array}\right]$$

e, como se vê, na matriz em escada de linhas, as posições correspondentes à diagonal de A, possuem pivôs. A matriz é assim invertível. Para obter a inversa de A só temos que prosseguir e obter a matriz em escada de linhas reduzida:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1
\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2
\end{array}\right].$$

Ou seja,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios

Problema 2.1.— Considere uma função definida por $f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$ (onde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$), que aplica o vector $\mathrm{u} = [2\ \ 1]^\top$ no vector $[3\ \ 2]^\top$ e o vector $\mathrm{v} = [1\ \ 1]^\top$ no vector $[5\ 6]^\top$. © ESD

(a) Sem determinar a matriz A calcule $f(\mathrm{u} - 2\mathrm{v})$.

(b) Determine a matriz A e use-a para calcular $f([3\ 2]^\top)$ e $f([1\ 0]^\top)$.

Problema 2.2.— Considere os vectores © ESD

$$\mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique se b é combinação linear de u_1, u_2 e u_3 e, em caso afirmativo, indique os coeficientes da combinação linear.

(b) Seja A a matriz que tem como colunas os vectores u_1, u_2 e b, por esta ordem. Use a alínea anterior para determinar um vector

$$\mathrm{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -1 \end{bmatrix}$$

e um escalar δ tais que $A\mathrm{w} = \delta \mathrm{u}_3$.

Problema 2.3.— Sejam A e b as matrizes: © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ c \end{bmatrix}$$

onde b é a terceira coluna de uma matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Determine a terceira coluna de AB.

(b) Determine os coeficientes que permitem obter $\mathrm{u} = A\mathrm{b}$ como combinação linear das colunas de A.

Problema 2.4.— Resolvendo um sistema de equações lineares, determine um polinómio de grau menor ou igual a 2 cujos valores em $x = 1$, $x = -1$ e $x = 2$ são, respetivamente, 3, 3 e 9. © ESD

Problema 2.5.— Resolvendo um sistema de equações lineares, determine valores reais a, b, c por forma a que $ax + by = c$ defina a reta: © ESD

(a) que passa pelos pontos $(2, 3)$ e $(5, 6)$;

(b) que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 1)$;

(c) que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(0, 1)$.

Problema 2.6.— Resolva cada um dos sistemas de equações lineares correspondente à matriz aumentada indicada. © ESD

$$(a)\quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \qquad (b)\quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Problema 2.7.— Escreva as matrizes aumentadas dos sistemas de equações lineares, não-homogéneos, e resolva-os utilizando o método de eliminação de Gauss. © ESD

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} -2v + 3w = 1 \\ 3u + 6v - 3w = -2 \\ 6u + 6v + 3w = 5 \end{cases} \qquad \text{(b)}\quad \begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 9 \end{cases} \qquad \text{(c)}\quad \begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 9 \end{cases}$$

Problema 2.8.— Determine a natureza de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares em função dos respectivos parâmetros. © ESD

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \alpha x + \beta z = 2 \\ \alpha x + \alpha y + 4z = 4 \\ \alpha y + 2z = \beta \end{cases} \qquad \text{(b)}\quad \begin{cases} -2z = 0 \\ cy + 4z = d \\ 4x + 5y - 2z = -2 \end{cases} \qquad \text{(c)}\quad \begin{cases} x + y + z = 4 \\ z = 2 \\ (a-4)z = a - 2 \end{cases}$$

Problema 2.9.— Considere o sistema de equações lineares nas variáveis u, v e w representado pela matriz aumentada © AL

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right]$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros λ e μ. A resposta correcta é:

(A) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; é impossível sse $\lambda = 3$ e $\mu \neq -5/3$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$. e $\mu = -5/3$.

(B) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$.

(C) O sistema é possível sse $\lambda \neq 3$; e é impossível sse $\lambda = 3$.

(D) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; é impossível sse $\lambda = 3$ e $\mu = -5/3$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$ e $\mu \neq -5/3$.

Problema 2.10.— Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x, y e z representado pela matriz aumentada © AL

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right]$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros λ e μ. A resposta correcta é:

(A) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é indeterminado sse $\mu = 5/2$.

(B) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é impossível sse $\lambda = 0$.

(C) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é indeterminado sse $\lambda = 0$.

(D) O sistema é possível sse $\lambda \neq 0$; e é impossível sse $\lambda = 0$.

Problema 2.11.— Considere o seguinte sistema de equações lineares: © AL

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo (x, y, z) solução do sistema, qual o valor da soma $x + y + z$?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4

Problema 2.12.— Considere o seguinte sistema de equações lineares: © AL

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Sabendo que (x, y, z) com $x = 1$ é solução do sistema anterior, qual o valor do par (y, z)?

A) $(1, 0)$ B) $(3, -1)$ C) $(2, -1/2)$ D) $(-1, 1)$

Problema 2.13.— Considere em $\mathbb{R}^3$ um sistema de equações lineares $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$ em que $b \in \mathbb{R}^3$, © AL

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações:

I. Existe pelo menos um vector b para o qual o sistema $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$ não tem soluções;

II. A equação $A\mathrm{u} = \mathbb{0}$ tem como única solução $\mathrm{u} = \mathbb{0}$;

III. Se $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$ é possível, o conjunto solução é uma recta em $\mathbb{R}^3$;

IV. Existindo soluções de $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$, o conjunto das soluções é um plano em $\mathbb{R}^3$.

Qual é a afirmação verdadeira?

A) I B) II C) III D) IV

Problema 2.14.— Considere em $\mathbb{R}^3$ um sistema de equações lineares, dependente de um parâmetro real α, escrito na forma $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}_\alpha$ em que © AL

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{b}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações:

I. O sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}_\alpha$ é impossível qualquer que seja o valor de α;

II. O sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}_\alpha$ é impossível pelo menos para um valor de α;

III. O sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}_\alpha$ é possível qualquer que seja o valor de α;

IV. Para todos os valores de α para os quais o sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}_\alpha$ é possível existe uma única solução.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) II B) I e II C) III D) III e IV

Problema 2.15.— Considere a matriz dependente do parâmetro real α, © AL

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Qual das seguintes afirmações relativamente ao sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}$ é verdadeira?

(A) Existe (pelo menos) um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o sistema é possível e determinado, qualquer que seja $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$.

(B) Existem valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e de $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$ tais que o sistema é possível e determinado.

(C) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$ o sistema é indeterminado.

(D) Existe (pelo menos) um valor de $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$ tal que o sistema é impossível, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

© ESD

Problema 2.16.— Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre matrizes elementares E_1, E_2, E_3 tais que $E_3 E_2 E_1 A = \mathbb{1}$.

(b) Escreve A^{-1} como um produto de três matrizes elementares.

(c) Escreva A como produto de três matrizes elementares.

Exercícios complementares

© ESD

Problema 2.17.— Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Encontre uma expressão para A na forma $A = E_1E_2E_3R$ onde E_1, E_2, E_3 são matrizes elementares e R é uma matriz em escada de linhas.

© ESD

Problema 2.18.— Nos casos seguintes, determine a matriz A:

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $6A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $(8A^\top)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $(\mathbb{1} - 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 2.19.— Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e © AL

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) A característica de A_μ em função de μ.

(b) A inversa de A_μ para $\mu = 1$.

Problema 2.20.— Considere a matriz © AL

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que A é invertível e calcule A^{-1}.

(b) Resolva a equação: $A^2\mathrm{u} = [1\ 2\ 3]^\top$;

Problema 2.21.— Considere as matrizes: © AL

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Determine as soluções de $AB\mathrm{u} = \mathrm{b}$.

© ESD

Problema 2.22.— Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = A$.

(a) Mostre que $(\mathbb{1} - A)^2 = (\mathbb{1} - A)$.

(b) Calcule $(\mathbb{1} - 2A)^2$, verifique que $(\mathbb{1} - 2A)$ é invertível.
Calcule $(\mathbb{1} - 2A)^{-1}$.

© ESD

Problema 2.23.— Considerem-se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $AB = A - B$.

(a) Mostre que $(A + \mathbb{1})^{-1} = \mathbb{1} - B$.

(b) Mostre que $AB = BA$.

PROBLEMA 2.24.— Consideremos uma matriz quadrada, A, que verifica a igualdade: © ESD

$$A^3 + A + \mathbb{1} = \mathbb{0}.$$

Mostre que A é invertível e determine a sua inversa (em função de A).

PROBLEMA 2.25.— Considere o sistema de equações lineares dependente do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$, © AL

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & \beta+3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta^2 - 2 \end{bmatrix}$$

e as seguintes afirmações relativamente a este sistema

I. Existe uma única solução, qualquer que seja β.

II. Para $\beta = 1$ existe uma única solução.

III. Para $\beta = 2$ existe uma única solução.

IV. Para $\beta = 2$ não existem soluções.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I, II e III B) II e IV C) II e III D) II.

Apêndices

2.A Unicidade da matriz em escada de linhas reduzida

Já observámos antes que toda a matriz A é Gauss equivalente a uma matriz K em escada de linhas reduzida. Muito embora A seja Gauss equivalente a uma infinidade de matrizes em escada de linhas, ela existe uma única matriz em escada de linhas reduzida nestas circunstâncias. Tem-se então o seguinte:

Teorema 2.21.— *Sejam $A, K_1, K_2 \in \mathbb{K}^{m\times n}$ uma matriz onde K_1 e K_2 são matrizes em escada de linhas reduzida. Se $A \equiv_G K_1$ e $A \equiv_G K_2$ então $K_1 = K_2$. Além disso se $K_1 = E_p \cdots E_1 A$ e $K_2 = F_s \cdots F_1 A$ onde as matrizes $E_1, \dots, E_p, F_1, \dots, F_s$ são elementares então $E_p \cdots E_1 = F_s \cdots F_1$.*

Demonstração.— Fixemos a matriz $C = E_p \cdots E_1 F_1^{-1} \cdots F_s^{-1}$. Temos que:

$$K_1 = CK_2 \text{ e } K_2 = C^{-1}K_1.$$

Provaremos que $K_1 = K_2$ e $E_p \cdots E_1 = F_s \cdots F_1$ (provando que $C = \mathbb{1}$) por indução em $1 \leq k \leq m$.

Denotamos por e_j^s a j-ésima coluna da matriz identidade de ordem s e consideramos $\mathrm{a}_j = A\mathrm{e}_j^n$, $\mathrm{k}_j^1 = K_1\mathrm{e}_j^n$, $\mathrm{k}_j^2 = K_2\mathrm{e}_j^n$, e $\mathrm{c}_j = C\mathrm{e}_j^m$ (ou seja os vectores $\mathrm{a}_j, \mathrm{k}_j^1, \mathrm{k}_j^2$ e c_j correspondem à j-ésima coluna das matrizes A, K_1, K_2 e C, respectivamente).

A primeira observação interessante é que se tem $\mathrm{k}_j^1 = \mathbb{0}$ se e só se $\mathrm{k}_j^2 = \mathbb{0}$ se e só se $\mathrm{a}_j = \mathbb{0}$ (e desta forma podemos supor que nem A nem K_1 nem K_2 possuem colunas nulas). Isto constata-se da seguinte forma: se $\mathrm{k}_j^2 = \mathbb{0}$ então $\mathbb{0} = C\mathrm{k}_j^2 = CK_2\mathrm{e}_j^n = K_1\mathrm{e}_j^n = \mathrm{k}_j^1$. A implicação contrária obtém-se considerando a matriz C^{-1}. Por outro lado, como $U = E_p \cdots E_1 A$ e $E_p \cdots E_1$ é uma matriz invertível (é um produto de matrizes invertíveis) tem-se que $\mathrm{Nuc}(U) = \mathrm{Nuc}(A)$ e assim $\mathrm{e}_1^n \in \mathrm{Nuc}(U)$ se e só se $\mathrm{e}_1^n \in \mathrm{Nuc}(A)$.

Agora que nos concentramos em matrizes que não possuem colunas de zeros, tem-se que $\mathrm{k}_1^1 = \mathrm{k}_1^2 = \mathrm{e}_1^m$.

Afirmação i.—Para $1 \leq k \leq n$ tem-se que e_k^m é a j_k-ésima coluna de K_1 se e só se é a j_k-ésima coluna de K_2. Além disso, se e_k^m é a j_k-ésima coluna de K_1 então:

(1) As primeiras j_k colunas de K_1 e K_2 coincidem.

(2) As colunas com índice superior a j_k, que são nulas nas posições correspondentes às linhas de índice superior a k são comuns a K_1 e K_2.

(3) As primeiras k colunas de C coincidem com as primeiras k colunas da matriz identidade de ordem m.

Consideremos então indução em k (com $1 \leq k \leq m$). O primeiro caso é o caso $k = 1$ e já vimos que a primeira coluna de K_1 é e_1^m sse e só se esta é também a primeira coluna de K_2. Assim

$$C\mathrm{e}_1^m = CK_2\mathrm{e}_1^n = K_1\mathrm{e}_1^n = \mathrm{e}_1^m.$$

Por outro lado se uma coluna j de K_2 é da forma $\lambda \mathrm{e}_1$, ou seja, se $K_2\mathrm{e}^n_j = \lambda \mathrm{e}^m_1$ então:

$$K_1\mathrm{e}^n_1 = CK_2\mathrm{e}^n = C\mathrm{e}^m_1 = \mathrm{e}^m_1,$$

pelo anterior. A implicação contrária estabelece-se usando C^{-1} (observe-se que também se tem $C^{-1}\mathrm{e}^m_1 = \mathrm{e}^m_1$).

O caso $k = 1$ fica assim estabelecido. Admitimos agora que o resultado é válido para um dado $k < m$ e provaremos que permanece válido para $k + 1$.

Só temos que nos preocupar com o caso em que e_{k+1} ocorre em K_1 pois caso contrário, a hipótese de indução já garante a igualdade das matrizes K_1 e K_2. Suponhamos assim que $\mathrm{e}^m_{k+1} \in K_1$. Pela cláusula (2) da hipótese de indução tem-se que $\mathrm{e}^m_{k+1} \in K_2$ ocorrendo necessariamente na mesma coluna j_{k+1} que ocorre em K_1. Tem-se então que:

$$c_{k+1} = C\mathrm{e}^m_{k+1} = CK_2\mathrm{e}^n_{j_{k+1}} = K_1\mathrm{e}^n_{j_{k+1}} = \mathrm{e}^m_{k+1}.$$

Este resultado e a hipótese de indução revelam que as primeira $k + 1$ colunas de C coincidem com as colunas de índice correspondente na matriz identidade de ordem m.

Consideremos agora as colunas com índices superiores a j_{k+1} em K_2 e cujas posições abaixo da linha $k + 1$ são todas nulas. Uma tal coluna k^2_j (com $j > j_{k+1}$) é uma combinação linear das colunas $j_1, \dots, j_{k+1}$. Neste caso, tendo em conta que C é como a identidade até à coluna j_{k+1} concluímos que

$$\mathrm{k}^1_j = C\mathrm{k}^2_j = \mathrm{k}^2_j.$$

Usando C^{-1} podemos trocar os papeis de K_1 e K_2 e concluir que esta matrizes partilham exactamente as mesmas colunas com índice superior a j_{k+1} que são nulas nas posições correspondentes às linhas de índice superior a $k + 1$. Completamos assim a demonstração do caso $k + 1$.

Temos então necessariamente que $K_1 = K_2$. Por outro lado, como $K_1 = CK_2$ resulta que $C = \mathbb{1}$, ou seja,

$$E_p \cdots E_1 F_1^{-1} \cdots F_s^{-1} = E_p \cdots E_1 (F_s \cdots F_1)^{-1} = \mathbb{1}.$$

Mas isto significa que $E_p \cdots E_1 = F_s \cdots F_1$, o que conclui a demonstração. ☒

2.B Demonstrações

Teorema 2.10.—*A relação $\equiv_G$ possui as seguintes propriedades:*

(1) *$A \equiv_G A$;*

(2) *$A \equiv_G B$ se e só se $B \equiv_G A$;*

(3) *se $A \equiv_G B$ e $B \equiv_G C$ então $A \equiv_G C$.*

Demonstração.—
1. $A = \mathbb{1}A$ e $\mathbb{1}$ é uma matriz elementar.

2. Tem-se $B = E_1E_2 \cdots E_kA$ se e só se $A = E_k^{-1} \cdots E_2^{-1}E_1^{-1}A$ e, pelo que vimos anteriormente $(E_k^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1})$ é uma sequência de matrizes elementares.

3. Se $B = E_1 E_2 \cdots E_k A$ e $C = \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_s B$ então,

$$C = \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots \bar{E}_s E_1 E_2 \cdots E_k A,$$

onde, $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots, \bar{E}_s, E_1, E_2, \ldots, E_k)$ é uma sequência de operações elementares.□

Teorema 2.11.-*Seja A uma matriz arbitrária. Existe uma matriz em escada por linhas, K, que é Gauss-equivalente a A, i.e. $A \equiv_G K$.*

Demonstração.— Uma matriz como K obtém-se através do *algoritmo de eliminação de Gauss*. Qualquer matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ pode ser decomposta na forma: Algoritmo de eliminação de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\underline{k}} \\ \\ A^{\overline{k}} \end{bmatrix} = [A^{\underline{k}} \ A^{\overline{k}}]^\top$$

onde $k = 0, \ldots m$, $A^{\underline{k}}$ consiste nas primeiras k linhas de A e $A^{\overline{k}}$ consiste nas linhas de A a partir da linha $k+1$ (inclusive). (Tem-se assim que $A^{\underline{0}}$ é a matriz vazia e $A^{\overline{0}} = A$, enquanto que $A^{\underline{m}} = A$ e $A^{\overline{m}}$ é a matriz vazia.)

Dada uma matriz A a matriz A^G é a matriz que resulta de A depois de efectuadas as seguintes transformações, trocando linhas (se for necessário) passamos uma das linhas que tem o pivô o mais à esquerda possível para primeira linha. Depois, usando a operação de adicionar a uma linha, uma outra previamente multiplicada por um escalar α, podemos anular todas as posições abaixo do pivô na primeira linha. Findo este processo, obtemos A^G.

O método de eliminação de Gauss aplicado a A produz uma sequência de matrizes:

$$A = A_0 \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_s,$$

onde $A_{i+1} = [A_i^{\underline{i}} \ (A_i^{\overline{i}})^G]^\top$, para $i < s$. Além disso, $s = m$ ou então $s < m$ e s é mínimo tal que $A_s^{\overline{s}} = \mathbb{0}$.

Por indução é fácil mostrar que $A_i^{\underline{i}}$ é uma matriz em escada por linhas e daqui conclui-se imediatamente que A_s é uma matriz em escada por linhas. (Ou seja tomamos $K = A_s$.) □

Corolário .—*Seja A uma matriz arbitrária. Existe uma matriz, $\bar{K}$, em escada por linhas reduzida tal que $A \equiv_G \bar{K}$.*

Demonstração.— O teorema 2.11 garante a existência de uma matriz, K, em escada de linhas, tal que $A \equiv_G K$. Para, a partir de K se obter $\bar{K}$, usando operações elementares procedemos da seguinte forma. Multiplicamos cada linha pelo inverso do pivô, obtendo desta forma uma matriz, B, cujos pivôs são todos iguais a 1. Podemos agora eliminar todas as posições acima de cada pivô. Se uma coluna contém um pivô numa posição que não seja a primeira (o 1 aparecendo na linha $r > 1$), então

$$\begin{bmatrix} & B_{1,j} & \\ * & \vdots & * \\ & B_{r-1,j} & \\ 0 \cdots\cdots 0 & 1 & * \\ 0 \cdots\cdots 0 & 0 & \\ \ddots & \vdots & * \\ 0 \cdots\cdots 0 & 0 & \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{r-1},\ldots,E_1} \begin{bmatrix} & 0 & \\ * & \vdots & * \\ & 0 & \\ 0 \cdots\cdots 0 & 1 & * \\ 0 \cdots\cdots 0 & 0 & \\ \ddots & \vdots & * \\ 0 \cdots\cdots 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

onde, para $i = 1, \ldots, r-1$ se tem que

$$E_i = E_{r,i}(-B_{i,j}^{-1}).$$

Repetindo o procedimento com todos os pivôs, obtemos uma matriz $\bar{K}$ que se encontra em escada de linhas reduzida e é tal que $A \equiv_G \bar{K}$. ☒

Lema .—*Sejam,* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$*,* $\bar{m} \leq m$ *e* $\bar{n} \leq n$*. Se* $A \equiv_G K$ *então* $A\restriction \bar{m}\times\bar{n} \equiv_G K\restriction \bar{m}\times\bar{n}$*.*

Demonstração.— Basta observar que se $K = E_n \cdots E_1 A$ então também se tem que $K\restriction\bar{m}\times\bar{n} = E_n \cdots E_1 A\restriction\bar{m}\times\bar{n}$ e que se K está em escada de linhas então $K\restriction\bar{m}\times\bar{n}$ também se encontra em escada de linhas. ☒

Teorema 2.15.—*Suponhamos que* $[A|\mathrm{b}]$ *é a matriz aumentada de um sistema* Σ *e que* $[A'|\mathrm{b}']$ *é uma matriz em escada de linhas que é Gauss-equivalente a* $[A|\mathrm{b}]$*. Nestas condições, o sistema que é representado por* $[A'|\mathrm{b}']$ *é equivalente a* Σ*.*

Demonstração.— Basta-nos mostrar que se $[A'|\mathrm{b}']$ se obtém da matriz $[A|\mathrm{b}]$ efectuando uma das operações elementares então, os sistemas representados por estas duas matrizes são equivalentes.

Caso 1,.—(Troca de linhas.) Trocar linhas numa matriz que representa um sistema corresponde a trocar a ordem das equações e isso não altera o conjunto de soluções do sistema. (Se solução do sistema corresponde a ser solução de todas as suas equações, independentemente pela ordem pela qual as consideramos.)

Caso 2.—(Multiplicação de uma linha por um escalar não nulo.) Uma linha na matriz do sistema representa uma equação linear que é uma relação do tipo $u = v$. Ora, considerando $\alpha \neq 0$ tem-se $u = v$ se e só se $\alpha u = \alpha v$, pelo que as equações são equivalente e, consequentemente, os sistemas são equivalentes.

Caso 3.—(Adicionar a uma linha, outra previamente multiplicada por um escalar.) Começamos por observar que se um sistema de equações $\Sigma = \{\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_m\}$ consiste de m equações $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_m$ então, o conjunto solução desse sistema, que denotamos por $\mathrm{Sol}(\Sigma)$ é:

$$\mathrm{Sol}(\Sigma) = \mathrm{Sol}(\mathscr{E}_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Sol}(\mathscr{E}_m),$$

onde, para $i = 1, \ldots, m$, $\mathrm{Sol}(\mathscr{E}_i)$ denota o conjunto de soluções da equação $\mathscr{E}_i$. Mas, como a intersecção de conjuntos é associativa e, para qualquer X se tem $X \cap X = X$, resulta que se considerarmos subconjuntos $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$ tais que $I \cup J = \{1, \ldots, m\}$ se tem também que:

$$\mathrm{Sol}(\Sigma) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Sol}(\mathscr{E}_i) \cap \bigcap_{j\in J} \mathrm{Sol}(\mathscr{E}_l).$$

Os sistemas $\Sigma_I = \{\mathscr{E}_i \mid i \in I\}$ e $\Sigma_J = \{\mathscr{E}_j \mid j \in J\}$ dizem-se *subsistemas* do sistema Σ.[4] Podemos assim considerar o sistema original, $[A|\mathrm{b}]$ decomposto em dois subsistemas: o sistema $\Sigma_1 = \{\mathscr{E}_s \mid s \neq i, j\}$ e o sistema $\Sigma_2 = \{\mathscr{E}_i, \mathscr{E}_j\}$. O sistema correspondente a $[A'|\mathrm{b}']$ pode ser analogamente decomposto em dois subsistemas Σ_1' e Σ_2' onde $\Sigma_1' = \Sigma_1$ e $\Sigma_2' = \{\mathscr{E}_i, \mathscr{E}_j^*\}$. Assim, o nosso resultado fica demonstrado se mostrarmos que os sistemas Σ_2 e Σ_2' são equivalentes.

[4] Podemos evidentemente subdividir o sistema Σ num maior número de subsistemas, considerando
$$I_1 \cup \cdots \cup I_n = \{1, \ldots, m\}.$$

Os dois subsistemas Σ_2 e Σ_2' podem escrever-se nas formas:

$$\begin{bmatrix} a_{i,1} \cdots\cdots a_{i,n} \\ a_{j,1} \cdots\cdots a_{j,n} \end{bmatrix} \mathrm{x} = \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{i,1} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{i,n} \\ a_{j,1} + \alpha a_{i,1} \cdots\cdots a_{j,n} + \alpha a_{i,n} \end{bmatrix} \mathrm{x} = \begin{bmatrix} b_i \\ b_j + \alpha b_i \end{bmatrix}$$

Podemos agora verificar que qualquer solução de um dos sistemas é também solução do outro. Verificamos uma das direcção deixando a outra ao cuidado do leitor. Suponhamos então que $(u_1, \ldots, u_n)$ é solução do segundo sistema. Tem-se então que:

$$\begin{aligned} &a_{i,1}u_1 + \cdots + a_{i,n}u_n = b_i \\ &(a_{j,1} + \alpha a_{i,1})u_1 + \cdots + (a_{j,n} + \alpha a_{i,n})u_n = b_j + \alpha b_i. \end{aligned}$$

Observe-se que se tivermos uma igualdade $\eta = \zeta$ então, para qualquer α tem-se $\alpha\eta = \alpha\zeta$ e, desta forma, para quaisquer ϕ, ψ tem-se:

$$\phi = \psi \Leftrightarrow \phi + \alpha\eta = \psi + \alpha\zeta.$$

Fazendo uso destas considerações podemos somar à segunda igualdade a primeira multiplicada por $-\alpha$ sabendo que o resultado será uma igualdade equivalente. Assim, aquelas duas equações são equivalentes à duas seguintes:

$$\begin{aligned} a_{i,1}u_1 + \cdots + a_{i,n}u_n &= b_i \\ a_{j,1}u_1 + \cdots + a_{j,n}u_n &= b_j. \end{aligned}$$

mostrando que $(u_1, \ldots, u_n)$ é solução de Σ_2. A outra direcção é análoga e a demonstração fica assim completa. $\boxslash$

Lema 2.17.—*Seja A uma matriz. Tem-se:*

1. $\mathbb{0} \in \mathrm{Nuc}(A)$*;*
2. *se* $\mathrm{u}, \mathrm{w} \in \mathrm{Nuc}(A)$ *então,* $\mathrm{u} + \mathrm{w} \in \mathrm{Nuc}(A)$*;*
3. *se* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\mathrm{u} \in \mathrm{Nuc}(A)$ *então,* $\alpha\mathrm{u} \in \mathrm{Nuc}(A)$*.*

Demonstração.—
1. Tem-se que $A\mathbb{0} = \mathbb{0}$ logo, $\mathbb{0} \in \mathrm{Nuc}(A)$.
2. Se $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ então $A\mathrm{u} = A\mathrm{v} = \mathbb{0}$. Neste caso, $A(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = A\mathrm{u}+A\mathrm{v} = \mathbb{0}+\mathbb{0} = \mathbb{0}$. Assim, $\mathrm{u} + \mathrm{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$. 3. Se $\mathrm{u} \in \mathrm{Nuc}(A)$ $\boxslash$

Lema 2.18.—*Sejam,* $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ *um sistema possível e* u_0 *uma solução do sistema. O conjunto solução de* $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ *é*

$$\mathscr{S} = \{\mathrm{u}_0 + \mathrm{w} \mid \mathrm{w} \in \mathrm{Nuc}(A)\}.$$

Desta forma o sistema é possível e determinado se e só se o núcleo de A é trivial.

Demonstração.—

Lema .—*Seja $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. São equivalentes:*

(1) *A é invertível;*

(2) *Existe B tal que $AB = \mathbb{1}$;*

(3) *Existe B tal que $BA = \mathbb{1}$.*

Demonstração.— A única coisa a demonstrar é que se $AB = \mathbb{1}$ então também se tem $BA = \mathbb{1}$. Suponhamos então que $AB = \mathbb{1}$. Neste caso também se tem que $B^\top A^\top = \mathbb{1}$ e então, forçosamente o sistema $A^\top \mathrm{x} = \mathbb{0}$ só pode ter como solução o vector nulo e assim, qualquer sistema da forma $A^\top \mathrm{x} = \mathrm{b}$ é possível e determinado. Reproduzindo o argumento acima podemos concluir a existência de uma matriz C tal que $A^\top C = \mathbb{1}$. Transpondo obtém-se $C^\top A = \mathbb{1}$. Considerando $D = C^\top$ temos assim que:

$$DA = \mathbb{1} \quad \text{e} \qquad AB = \mathbb{1}.$$

Mas agora tem-se:

$$D = D\mathbb{1} = D(AB) = (DA)B = \mathbb{1}B = B,$$

o que nos permite concluir a demonstração. ☒

2.C Soluções dos exercícios

Solução (do problema 2.1).— (a) Tendo em conta a definição de f tem-se:

$$f(\mathrm{u} - 2\mathrm{v}) = A(\mathrm{u} - 2\mathrm{v}) = A\mathrm{u} - 2A\mathrm{v} = f(\mathrm{u}) - 2f(\mathrm{v}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(b) Necessariamente $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Assim

$$A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}.$$

Além disso sabemos que:

$$\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + z \\ 2y + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Analogamente,

$$\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + z \\ y + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Pelo que podemos determinar a matriz A resolvendo o sistema:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}.$$

Solução (do problema 2.2).— (a) b é combinação linear $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3$ se e só se o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, onde A é a matriz cujas colunas são $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3$, for possível. Ou seja, sse o sistema

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \mathrm{u}_3 & \mathrm{b}_1 \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

é possível.

(b) Tem-se que:

$$A\mathrm{w} = \delta\mathrm{u}_3 \Leftrightarrow a\mathrm{u}_1 + b\mathrm{u}_2 - \mathrm{b} = \delta\mathrm{u}_3 \Leftrightarrow a\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} - \delta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

ou seja (a, b, δ) é uma solução do sistema $\bar{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$ onde $\bar{A}$ é a matriz cujas colunas são $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2$ e $-\mathrm{u}_3$, i.e. uma solução do sistema:

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & -\mathrm{u}_3 & \mathrm{b} \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Solução (do problema 2.3).— (a) A terceira coluna de $\boldsymbol{AB}$ obtém-se multiplicando $\boldsymbol{A}$ pela terceira coluna de $\boldsymbol{B}$, ou seja é $\boldsymbol{A}b$.

(b) Sabemos que um vector u é combinação linear das colunas de uma matriz A se e só se o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{u}$ for possível, sendo que um qualquer vector solução, fornece os coeficientes de uma tal combinação linear. Neste caso, tendo-se $A\mathrm{b} = \mathrm{u}$ já se tem que b é solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{u}$, ou seja, b é o vector com os coeficientes pretendidos. ◪

Solução (do problema 2.4).— A forma geral de um polinómio de grau ≤ 2 é $p(x) = ax^1 + bx + c$. Queremos então determinar a, b, c de modo que $p(1) = p(-1) = 3$ e $p(2) = 9$. Ou seja queremos determinar a, b, c de modo que

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a - b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (nas variáveis a, b e c) podemos agora determinar o polinómio pretendido. ◪

Solução (2.5).— Consideramos a alínea (a) as outras são totalmente análogas. Os pontos $(2, 3)$ e $(5, 6)$ têm que ser soluções da equação $ax + by = c$. Ou seja tem que se ter:

$$\begin{cases} 2a + 3b = c \\ 5a + 6b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ 5a + 6b - c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo estes sistema de equações (nas variáveis a, b e c) podemos obter uma solução para o problema.

Nota: O sistema em causa é indeterminado e as soluções podem ser expressas em função de c, pelo que escolhendo, por exemplo, $c = 1$ se obtém uma equação concreta para a recta pretendida. Esta situação é perfeitamente normal já que uma recta possui infinitas equações daquela forma: se $\alpha \neq 0$, as equações $ax + by = c$ e $(\alpha a)x + (\alpha b)y = \alpha c$ são equivalentes. ◪

Solução (do problema 2.6).— Qualquer uma das matrizes já se encontra em escada por linhas. Consideramos a alínea (b). Temos duas hipóteses. Podemos passar imediatamente à forma de sistema e resolvê-lo (considerando as variáveis x, y, z, w:

$$\begin{cases} x + 8z - 5w = 6 \\ y + 4z - 9w = 3 \\ z + w = 2 \end{cases}$$

ou então prosseguir com a utilização de operações elementares, eliminando todas as posições acima dos pivôs, coisa que iremos fazer pois, como se verá, produz um sistema equivalente mas com equações mais simples:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[-8L_3+L_1\to L_1]{-4L_3+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -13 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Obtemos assim o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 13w = -10 \\ y - 13w = -5 \\ z + w = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13w - 10 \\ y = 13w - 5 \\ z = -w + 2 \end{cases}$$

Cuja solução é $\{(13w - 10, 13w - 5, -w + 2, w) \mid w \in \mathbb{R}\}$. ◪

Solução (do problema 2.7).— As alíneas são semelhantes, a título de exemplo consideramos a alínea (c). A matriz aumentada do sistema é:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3 \\ -7L_1+L_4\to L_4}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -7L_2+L_4\to L_4}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/2)L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A esta matriz corresponde o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ y + w = -2 \\ u + 2v - 3w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - w \\ y = -2 - w \\ u = 1 - 2v + 3w \end{cases}$$

Desta forma, o conjunto solução do sistema é:

$$\{(1 - w, -2 - w, 1 - 2v + 3w, v, w) \mid v, w \in \mathbb{R}\}.$$

Solução (do problema 2.8).— As matrizes aumentadas de cada um dos sistemas é:

$$\text{(a)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right] \qquad \text{(b)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & c & 4 & d \\ 4 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right] \qquad \text{(c)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \end{array}\right]$$

(a) Procedendo à eliminação de Gauss temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{-L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 4-\beta & 2 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2+L_3\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 4-\beta & 2 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-2 \end{array}\right]$$

Tem-se então que se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 2$ então o sistema é possível e determinado. Se $\alpha = 0$ então a matriz em causa é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta & 2 \\ 0 & 0 & 4-\beta & 2 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-2 \end{array}\right]$$

e, neste caso, se $\beta = 0$ então o sistema é impossível. Se $\beta \neq 0$ então, podemos prosseguir a eliminação de Gauss de acordo com o seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta & 2 \\ 0 & 0 & 4-\beta & 2 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-2 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/\beta)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2/\beta \\ 0 & 0 & 4-\beta & 2 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-2 \end{array}\right] \xrightarrow[(2-\beta)L_1+L_3\to L_3]{(\beta-4)L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2/\beta \\ 0 & 0 & 0 & 4(\beta-2)/\beta \\ 0 & 0 & 0 & (\beta-2)^2/\beta \end{array}\right]$$

e o sistema é impossível se $\beta \neq 2$ e indeterminado se $\beta = 2$.

Deixamos (b) ao cuidado do leitor e consideramos desde já a alínea (c). Procedendo à eliminação de Gauss temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \end{array}\right] \xrightarrow{(4-a)L_2+L_3\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6-a \end{array}\right]$$

pelo que o sistema é possível e indeterminado se $a = 6$ e impossível caso contrário. ☐

Solução (do problema 2.9).— Procedendo à eliminação de Gauss obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{(-2/5)L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 6/5 & -2\lambda/5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \\ 0 & 6/5 & -2\lambda/5 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{5L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \\ 0 & 6 & -2\lambda & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{-6L_2+L_3\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \\ 0 & 0 & 6-2\lambda & -10-6\mu \end{array}\right]$$

Assim a resposta correcta é a (A). ☐

Solução (do problema 2.10).— Fazendo a eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_2+L_1\to L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 5 & \mu-2 \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 5 & \mu-2 \\ 0 & -25 & -13 & 5-\mu \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right]$$

Ou seja, a resposta correcta é a (C). ☐

Solução (do problema 2.11).— A solução do sistema é $(-1,1,5)$, logo a resposta correcta é a (C). $\boxtimes$

Solução (do problema 2.12).— A solução do sistema é $(1,1,0)$, logo a resposta correcta é a (A). $\boxtimes$

Solução (do problema ??).— Procedendo à respectiva eliminação de Gauss constata-se que a característica de A é 3. Desta forma o sistema $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$ será possível e determinado em todos os casos. A única resposta correcta é assim a resposta II. $\boxtimes$

Solução (do problema 2.14).— Procedendo à eliminação de Gauss da matriz aumentada do sistema obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 3\alpha & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow[-7L_1+L_3\to L_3]{-4L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & 3\alpha-21 & \alpha-7 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_2+L_3\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3\alpha-9 & \alpha-3 \end{array}\right]$$

Assim, se $\alpha \neq 3$ o sistema é possível e determinado. Se $\alpha = 3$ o sistema é possível e indeterminado. Assim apenas a resposta III é correcta. $\boxtimes$

Solução (do problema 2.15).— Procedendo à eliminação de Gauss da matriz aumentada do sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}$ obtemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & b_2 \\ 3 & 3 & 6 & 5 & b_3 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_1+L_4\to L_4]{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_3-3b_1 \\ 0 & -2 & \alpha-2 & -1 & b_4-b_1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-2/3)L_2+L_4\to L_4]{-L_2+L_3\to L_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-2b_1-b_2 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & -1/3 & b_4-2b_2/3-7b_1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & -1/3 & b_4-2b_2/3-7b_1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-2b_1-b_2 \end{array}\right]$$

O sistema nunca é possível e determinado e se $b_3 - 2b_1 - b_2 \neq 0$ o sistema é impossível. A única hipótese correcta é assim a (D). $\boxtimes$

Solução (do problema 2.16).— As descrição das matrizes elementares é feita na secção 2.2.2 dos apontamentos teóricos. Reproduz-se aqui a parte relevante para a resolução deste exercício e do seguinte.
Denotamos por $E_{ij}^m \in \mathbb{K}^{m\times m}$ a matriz, que é como a matriz identidade excepto que com as linhas i e j da identidade trocadas entre si. Denotamos por $E_{ij}^m(\alpha) \in \mathbb{K}^{m\times m}$ a matriz que é como a matriz identidade excepto que a entrada i,j é α. Finalmente, denotamos por $E_i^m(\alpha) \in \mathbb{K}^{m\times m}$ (para $\alpha \neq 0$) a matriz que é como a identidade excepto que na i-ésima posição da diagonal está o escalar α. Tem-se então o seguinte:

(1) $E_{ij}^m A = B$, onde B é a matriz que resulta de A trocando as linhas i e j entre si.

(2) $E_i^m(\alpha)A = B$, onde B é a matriz que resulta de A substituindo a linha i de A por $\alpha A_{i,*}$, i.e. multiplicando a linha i de A pelo escalar $\alpha \neq 0$.

(3) $E^m_{ij}(\alpha)A = B$, onde B é a matriz que resulta de A substituindo a linha i de A por $A_{i,*} + \alpha A_{j,*}$, i.e. adicionando à linha i de A a linha j multiplicada por α.
$\boxslash$

As matrizes elementares são todas invertíveis e não é difícil constatar que $(E^m_{ij})^{-1} = E^m_{ij}$; $(E^m_i(\alpha))^{-1} = E^m_i(\alpha^{-1})$; e $(E^m_{ij}(\alpha))^{-1} = E^m_{ij}(-\alpha)$. Em particular, as inversas das matrizes elementares são matrizes elementares do mesmo tipo.

Como se descreveu a multiplicação à esquerda por uma matriz elementar corresponde à aplicação de uma das operações do método de eliminação de Gauss. Assim sendo: (a) Procedendo à eliminação de Gauss, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{5L_1+L_2\to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1\leftarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/2)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora a primeira operação aplicada corresponde à matriz $E^3_{2,1}(5)$ a segunda à matriz $E^3_{2,3}$ e a terceira à matriz elementar $E^3_2(-1/2)$. Assim tem-se:

$$E^3_2(-1/2)E^3_{2,3}E^3_{2,1}(5)A = \mathbb{1},$$

como se pretendia.
(b) Da relação anterior resulta que

$$A^{-1} = E^3_2(-1/2)E^3_{2,3}E^3_{2,1}(5).$$

(c) Tem-se que

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E^3_2(-1/2)E^3_{2,3}E^3_{2,1}(5))^{-1}.$$

Como a inversa de um produto é o produto das inversas pela ordem inversa resulta que:

$$A = (E^3_{2,1}(5))^{-1}(E^3_{2,3})^{-1}(E^3_2(-1/2))^{-1} = E^3_{2,1}(-5)E^3_{2,3}E^3_2(1/2).$$

Solução (do problema 2.17).— Tal como no exercício anterior temos que proceder ªa eliminação de Gauss para obter a sequência de matrizes elementares envolvida.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_1+L_3\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_3\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

A sequência de matrizes elementares que corresponde às operações elementares usadas é então $E^3_{3,2}(-1)E^3_{3,1}(2)E^3_{1,2}$, ou seja tem-se

$$E^3_{3,2}(-1)E^3_{3,1}(2)E^3_{1,2}\,A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução (do problema 2.18).— (a) Basta observar que $A = (A^{-1})^{-1}$.
(b) Neste caso,

$$6A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \left(\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

ou seja,

$$A = 6\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

(c) Tem-se:

$$(8A^{\top})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 8A^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow A = \frac{1}{8}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right)^{\top}$$

Como se tem que $(A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{-1}$ obtém-se finalmente que

$$A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

(d) Neste caso

$$(\mathbb{1} - 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbb{1} - 2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Ou seja,

$$A = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right)$$

Solução (do problema 2.19).— (a) A característica de A_μ corresponde ao número de pivôs de uma qualquer matriz em escada de linhas que resulte de A_μ através do método de eliminação de Gauss. Assim sendo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \xrightarrow{-3L_1 + L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mu^2 - 12 & -2\mu \end{bmatrix} \xrightarrow{(12-\mu^2)L_2 + L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 24 - 2\mu - 2\mu^2 \end{bmatrix}$$

Concluímos assim que $\mathrm{Car}(A_\mu) = 2$ se $\mu^2 + \mu - 12 = 0$ e $\mathrm{Car}(A_\mu) = 3$ se $\mu^2 + \mu - 12 \neq 0$.

(b) Considerando $\mu = 1$ e recorrendo ao algoritmo de cálculo da inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1\S & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3L_1 + L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{11L_2 + L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 11 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/20)L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11/20 & -3/20 & 1/20 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_3 + L_1 \to L_1]{-2L_3 + L_2 \to L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -11/20 & 23/20 & -1/20 \\ 0 & 1 & 0 & -2/20 & 6/20 & -2/20 \\ 0 & 0 & 1 & 11/29 & -3/20 & 1/20 \end{array}\right] \xrightarrow{-4L_2 + L_1 \to L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/20 & -1/20 & 7/20 \\ 0 & 1 & 0 & -2/20 & 6/20 & -2/20 \\ 0 & 0 & 1 & 11/29 & -3/20 & 1/20 \end{array}\right]$$

Ou seja tem-se que:

$$(A_1)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 7 \\ -2 & 6 & -2 \\ 11 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução (do problema 2.20).— (a) Usando o algoritmo para o cálculo da inversa obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_1+L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2+L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1/2)L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_3+L_1 \to L_1]{-L3+L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Assim sendo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(b) Basta observar que:

$$A^2\mathrm{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\mathrm{u} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{u} = A^{-1}\left(A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right).$$

Solução (do problema 2.21).— Tem-se que

$$AB = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Basta então resolver o sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 16 & 12 & 2 & 16 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

Solução (do problema 2.22).— (a) Tem-se

$$(\mathbb{1} - A)^2 = (\mathbb{1} - A)(\mathbb{1} - A) = \mathbb{1} - A - A + A^2 = \mathbb{1} - 2A + A^2,$$

como, por hipótese, $A^2 = A$ tem-se:

$$\mathbb{1} - 2A + A^2 = \mathbb{1} - 2A^2 + A = \mathbb{1} - A.$$

(b) Calculando $(\mathbb{1} - 2A)^2$ tem-se:

$$(\mathbb{1} - 2A)^2 = (\mathbb{1} - 2A)(\mathbb{1} - 2A) = \mathbb{1} - 4A + 4A^2 = \mathbb{1},$$

a última igualdade justifica-se porque $A^2 = A$, por hipótese. Concluímos então que $(\mathbb{1} - 2A)$ é inversa de si própria. ☒

Solução (do problema 2.23).— (a) Temos que verificar que $(\mathbb{1} + A)(\mathbb{1} - B) = \mathbb{1}$. Tem-se:

$$(\mathbb{1} + A)(\mathbb{1} - B) = \mathbb{1} - B + A - AB = \mathbb{1} + A - B - (A - B) = \mathbb{1},$$

com se pretendia.

(b) Como $(\mathbb{1} - B)$ é inversa de $(\mathbb{1} + A)$, tem-se que:

$$(\mathbb{1} - B)(\mathbb{1} + A) = (\mathbb{1} + A)(\mathbb{1} - B) = \mathbb{1}.$$

Tem-se então que $\mathbb{1} = (\mathbb{1} - B)(\mathbb{1} + A) = \mathbb{1} + A - B - BA$ ou seja, $\mathbb{0} = A - B - BA$ e, como $AB = A - B$, obtemos finalmente que $\mathbb{0} = AB - BA$, ou seja, $AB = BA$ como se pretendia estabelecer. ☒

Solução (do problema 2.24).—

Solução (do problema ??).— Procedendo à eliminação de Gauss da matriz aumentada do sistema obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \beta+3 & 3 & \beta^2-2 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_1+L_3\to L_3]{L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & \beta-1 & 1 & \beta^2-3 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/3)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-1 & 1 & \beta^2-3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(1-\beta)L_2+L_3\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\beta & \beta^2-\beta-2 \end{array}\right]$$

Assim, se $\beta \neq 2$ o sistema é possível e determinado e se $\beta = 2$ o sistema é indeterminado (pois $\beta^2 - \beta - 2 = 0$ para $\beta = 2$). Desta forma, a resposta correcta é a II. ◻