

# Semanas 04 e 05

## Espaços lineares

### 3.1 DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Um *espaço linear* ou *espaço vectorial* sobre  $\mathbb{K}$  é um conjunto  $V$ , não vazio, cujos elementos se designam genericamente de *vetores* (independentemente da sua natureza), equipado com uma operação de *adição de vetores* que, essencialmente, é uma função  $V \times V \rightarrow V$  que associa a cada par  $(u, v)$  de elementos de  $V$  um elemento de  $V$  que se designa de *soma de  $u$  com  $v$*  e que, em geral, se denota por  $u +_V v$  ou simplesmente  $u + v$  quando  $V$  for claro. Além disso, a cada elemento  $\alpha \in \mathbb{K}$  corresponde uma operação  $\hat{\alpha}_V : V \rightarrow V$  que a cada vector  $v \in V$  faz corresponder um vector de  $V$  que se denota  $\hat{\alpha}_V(v)$  ou mais simplesmente  $\alpha v$  (no contexto da teoria dos espaços vectoriais, os elementos do corpo  $\mathbb{K}$  designam-se habitualmente de *escalares*). Finalmente, estas operações devem verificar o conjunto de propriedades (os *axiomas de espaço linear*) que se enunciam a seguir:

- (1) para quaisquer  $u, v, w \in V$  tem-se  $u + (v + w) = (u + v) + w$  (ou seja, a adição de vetores é associativa).
- (2) para quaisquer  $u, v \in V$  tem-se  $u + v = v + u$  (ou seja, a adição de vetores é comutativa);
- (3) existe um *elemento neutro para a adição*, ou seja, um elemento  $e \in V$  com a seguinte propriedade: para qualquer  $u \in V$  tem-se que  $e + u = u$ .

De facto, não pode existir mais que um elemento neutro nestas circunstâncias, pois se  $e, f \in V$  são elementos neutros para a soma de vetores então:  $e = e + f$  porque  $f$  é elemento neutro, enquanto que  $f = e + f$  porque  $e$  é elemento neutro. Mas então tem-se que  $e = e + f = f$  ou seja, o elemento neutro para a adição de vetores é *único*. Tendo em conta esta unicidade, reservam-se, em geral uma notação e uma designação particulares para este elemento. Ele designa-se de *vector nulo de  $V$*  e denota-se por  $0_V$  ou simplesmente  $0$  quando não existe perigo de confusão.

Continuando a enunciar os axiomas de espaço linear:

- (4) para cada  $u \in V$  existe um vector  $w \in V$  com a propriedade:  $u + w = 0_V$ .

Mais uma vez, para cada  $u \in V$  existe um único  $w$  nas condições de (4). Com

efeito: se  $w$  e  $w'$  satisfazem (4) relativamente a  $u$  então:

$$w = w + \mathbb{0}_V = w + (u + w') = ((w + u)' w' = \mathbb{0}_V + w' = w'.$$

Perante esta unicidade, mais uma vez reservamos uma designação e uma notação especiais para  $w$  como em (4), ele designa-se de *simétrico de  $u$*  e denota-se  $-u$ .

Os restantes axiomas são:

- (5) para quaisquer  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $u, v \in V$  tem-se  $\alpha(u + v) = (\alpha u) + (\alpha v)$ ;
- (6) para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e  $u \in V$  tem-se  $(\alpha + \beta)u = (\alpha u) + (\beta u)$ ;
- (7) para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e  $u \in V$  tem-se  $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ ;
- (8)  $1u = u$ .

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  o espaço linear diz-se um *espaço linear complexo*, se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o espaço  $V$  diz-se um *espaço linear real*.

Observamos que convencionalmente a operação de multiplicação por escalar tem precedência sobre a adição de vectores, assim uma expressão como  $\alpha x + \beta y$  significa o mesmo que  $(\alpha x) + (\beta y)$ . Somas deste tipo, envolvendo um número finito de parcelas têm um papel fundamental no estudo destas estruturas pelo que lhes dedicamos a próxima definição:

DEFINIÇÃO 3.1.— *Sejam  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  e  $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ . Uma soma da forma:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad (3.1)$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  diz-se uma combinação linear de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .<sup>1</sup>

Considerando todas as possíveis variações de escalares em (3.1) obtemos todas as combinações lineares dos vectores  $x_1, \dots, x_n$  cujo respectivo conjunto se denota por  $L_V(\{x_1, \dots, x_n\})$  e designa de *expansão linear dos vectores  $x_1, \dots, x_n$  em  $V$* . Uma vez que produtos de um escalar por um vector e somas de vectores são elementos de  $V$  tem-se claramente que

$$L_V(\{x_1, \dots, x_n\}) \subset V.$$

Não existe nenhum motivo para considerar apenas expansões lineares de conjuntos finitos de vectores (embora as combinações lineares sejam sempre somas finitas). Se  $A$  é um conjunto infinito de vectores então a respectiva expansão linear, que se denota por  $L_V(A)$ , define-se como:

$$L_V(A) = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in A, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\},$$

onde  $\mathbb{N}$  é o conjunto dos números naturais (recorde-se que adoptamos a convenção segundo a qual  $0 \in \mathbb{N}$  i.e.,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ).<sup>2</sup>

Exibimos agora alguns exemplos de espaços lineares.

EXEMPLO 1.— O conjunto  ${}^{\mathbb{K}}\mathbb{K}$  que consiste nas funções  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , onde se definem as operações  $(f, g) \mapsto f + g$  e  $(\alpha, f) \mapsto \alpha f$  através de:

- 1.  $(f + g)(k) := f(k) + g(k)$ , para  $k \in \mathbb{K}$ ;

<sup>1</sup> Note-se que esta não é mais que a generalização aos vectores enquanto elementos de um espaço linear, da correspondente noção envolvendo vectores linha e coluna no caso das matrizes.

<sup>2</sup> Note-se que apesar de termos fornecido duas definições de  $L_V(X)$ , uma para o caso em  $X$  é finito e outra para o caso em que  $X$  é infinito, a segunda definição poderia adoptar-se para os dois casos. Isto acontece porque se  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  se tem que qualquer soma de elementos de  $X$  é equivalente a uma soma da forma  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ .

2.  $(\alpha f)(k) := \alpha \cdot f(k)$ , para  $k \in \mathbb{K}$ .

Observe-se o *duplo sentido* do símbolo «+» acima: em  $f+g$  ele descreve a operação de adição de funções em  ${}^{\mathbb{K}}\mathbb{K}$ , enquanto que em  $f(k) + g(k)$  descreve a adição no corpo  $\mathbb{K}$  (note-se que os valores  $f(k)$  e  $g(k)$  são elementos de  $\mathbb{K}$ ). Por outro lado  $\alpha \cdot f(k)$  denota também o produto em  $\mathbb{K}$ . Habitualmente este tipo de distinções é claro no contexto e abstraímos-nos de as produzir explicitamente.

EXEMPLO 2.— A análise do exemplo precedente mostra que a estrutura de espaço linear em  ${}^{\mathbb{K}}\mathbb{K}$  provém da estrutura de  $\mathbb{K}$  aplicada às imagens  $f(k)$ . Este facto sugere a generalização daquele através das estruturas  ${}^X\mathbb{K}$  das funções  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  onde,  $X \neq \emptyset$  é agora um conjunto arbitrário. Efectivamente, definindo as operações de adição de vectores e de multiplicação por escalar como anteriormente, i.e.

1.  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ , para  $x \in X$ ;
2.  $(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x)$ , para  $x \in X$ .

continuamos a obter um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ .

Muitos exemplos de espaços vectoriais são essencialmente da forma descrita no exemplo anterior, muito embora geralmente isso não seja explícito pois é mais conveniente descrever os vectores noutras formas mais convenientes à sua manipulação.

EXEMPLO 3.— Os espaços  $\mathbb{K}^n$  consistem nos  $n$ -úplos ordenados de elementos de  $\mathbb{K}$ , i.e. elementos da forma  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , onde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  considerando a álgebra definida por:

1.  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) := (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ ;
2.  $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := (k\alpha_1, \dots, k\alpha_n)$ .

Vale a pena mencionar a propriedade fundamental dos  $n$ -úplos ordenados relacionada com o critério de igualdade de dois objectos deste tipo: tem-se que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  se e só se

$$\alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 = \beta_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n = \beta_n,$$

i.e. dois  $n$ -úplos são iguais se e só se os elementos nas posições correspondentes são iguais, e.g.  $(1, 1, 2) \neq (1, 2, 1)$ . Ora, aderindo à ideia segundo a qual os objectos em Matemática são essencialmente determinados pela informação que contêm, facilmente concluímos que os vectores em  $\mathbb{K}^n$  podem ser identificados com as funções  $f \in {}^n\mathbb{K}$ ,<sup>3</sup> ou seja, identificando o  $n$ -úplo  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  com a função  $f \in {}^n\mathbb{K}$  dada por  $f(0) = \alpha_1, \dots, f(n-1) = \alpha_n$ . Desta forma, tem-se que  $\mathbb{K}^n$  é essencialmente  ${}^n\mathbb{K}$ .

EXEMPLO 4.— Os espaços  $\mathbb{K}^{m \times n}$  das matrizes do tipo  $m \times n$  com entradas em  $\mathbb{K}$ . Com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação de um escalar por uma matriz tem-se que  $\mathbb{K}^{m \times n}$  é um espaço linear.

Estamos uma vez mais perante um exemplo que corresponde na sua essência a uma construção do tipo da descrita no exemplo 2. De facto, uma matriz  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

<sup>3</sup> Esta notação merece um esclarecimento dado que descrevemos  ${}^X Y$  como sendo o conjunto das funções de  $X$  em  $Y$  pressupondo-se assim que  $X$  e  $Y$  sejam conjuntos. O que acontece é que os números naturais podem ser vistos como conjuntos (é de resto assim que, como qualquer objecto matemático, são definidos no seio da teoria de conjuntos) mais precisamente;  $0 = \emptyset$  e nos restantes casos  $n = \{0, \dots, n-1\}$  i.e., cada natural é o conjunto dos naturais que o precedem.

corresponde a uma função  $f \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}$  definida por  $f(i, j) = A_{i,j}$ . Este facto revela que o espaço  $\mathbb{K}^{m \times n}$  é essencialmente o espaço  $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}$ .<sup>4</sup>

EXEMPLO 5.— Uma sucessão de elementos de  $\mathbb{K}$  é uma sequência infinita da forma:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usualmente, denotamos uma sucessão como acima recorrendo à notação  $(x_n)$ . Uma sucessão é assim uma generalização da noção de sequência finita. De resto é válido um critério de igualdade semelhante i.e. tem-se

$$(x_n) = (y_n) \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N}) x_i = y_i.$$

Mais uma vez, as sucessões podem ser identificadas com funções, neste caso com funções  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ . Por essa razão denotaremos o conjunto das sucessões em  $\mathbb{K}$  por  ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{K}$ . As operações são definidas como no caso  ${}^X\mathbb{K}$  e, com estas operações,  ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{K}$  é um espaço linear (ver exemplo 2).

Consideramos um último exemplo. Trata-se de um exemplo particularmente interessante pois trata-se de um exemplo descrevendo uma estrutura muito próxima da intuição geométrica. Apesar de se tratar de um exemplo muito simples, constitui aquilo que poríamos considerar como uma boa *estrutura de teste* i.e., uma estrutura à qual podemos recorrer para testar conjecturas acerca de espaços lineares.

EXEMPLO 6.— O exemplo que vamos considerar consiste na estrutura dos *vectores fixos do plano*. Depois de fixarmos um ponto  $O$  no plano (*a origem*) um vector fixo do plano é um segmento orientado com origem em  $O$  e extremidade num ponto  $A$  desse mesmo plano, simbolicamente representamos esse vector por  $\overrightarrow{OA}$ . Em particular é possível considerar o vector  $\mathbf{0} = \overrightarrow{OO}$ . Graficamente o vector  $\overrightarrow{OA}$  é representado através de uma seta com origem em  $O$  e extremidade em  $A$ . (Claro que no caso do vector  $\mathbf{0}$  essa seta é degenerada e a origem coincide com a extremidade.) Para induzir neste conjunto de vectores uma estrutura de álgebra linear, consideramos operações que se definem geometricamente como se indica na figura 3.1.

<sup>4</sup> De facto, neste tipo de identificações, é preciso identificar mais que os elementos dos dois conjuntos. Feita essa correspondência as *estruturas*, ou seja, as operações algébricas, devem também corresponder-se i.e., o resultado de operar objectos numa das estruturas deve corresponder ao resultado de operar, na outra estrutura os objectos correspondentes. Neste exemplo concreto, denotando por  $\bar{A}$  a função que corresponde à matriz  $A$  tem-se:  $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$  e  $\overline{\alpha A} = \alpha \bar{A}$ , pelo que as duas estruturas são de facto equivalentes.

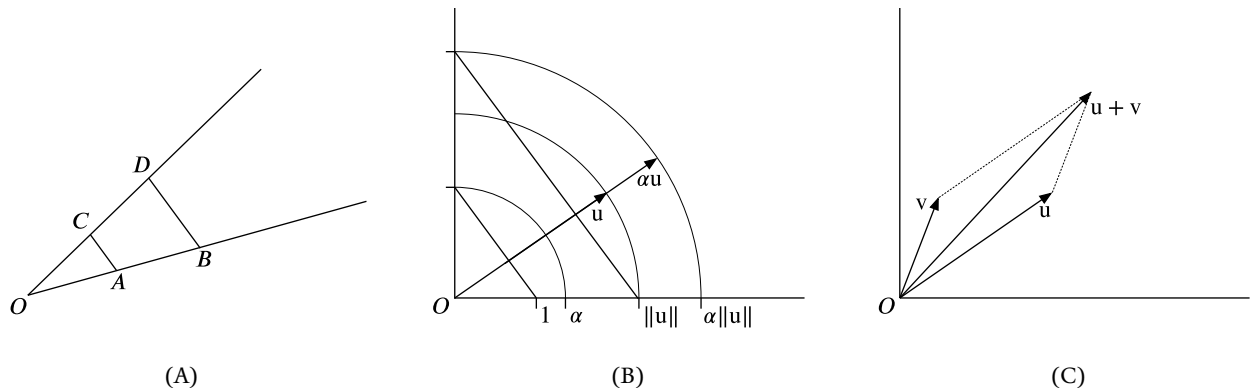


Figura 3.1:

Em (A) encontra-se descrita a forma como se podem multiplicar geometricamente dois comprimentos. Considerando que o comprimento de  $OA$  é 1 e  $DB$  é paralelo a  $CA$  então, como se sabe, dado que os triângulos  $OAC$  e  $OBD$  são semelhantes, tem-se que:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}},$$

ou seja,  $\overline{OD} = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$  (pois  $\overline{OC} = 1$ ). Em (B) descreve-se a multiplicação por escalar (usando a construção em (A)). Essencialmente, se  $u$  é um vector e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $\alpha u$  é o vector que tem como suporte a mesma recta que  $u$ , comprimento  $\alpha \|u\|$  onde  $\|u\|$  denota o comprimento de  $u$ . Além disso  $\alpha u$  tem o mesmo sentido que  $u$  (está na mesma semi-recta) se  $\alpha > 0$  enquanto que tem sentido contrário ao de  $u$  se  $\alpha < 0$ . Finalmente (C) descreve a denominada *regra do paralelogramo* que permite descrever a adição de vectores através da construção de um paralelogramo, tal como se descreve na figura.

EXEMPLO 7.— Dado um conjunto  $X \neq \emptyset$  o *espaço linear livre sobre  $X$*  que denotamos por  $C_{\mathbb{K}}(X)$  é o subespaço de  ${}^X\mathbb{K}$  que consiste nas funções  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  com *suporte* finito, onde o suporte de  $f$ , que se denota  $\text{supp}(f)$  é

$$\text{supp}(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

As funções da forma

$$c_a(x) := \begin{cases} 1 & (\text{se } x = a) \\ 0 & (\text{caso contrário}) \end{cases}$$

desempenham um papel importante. De facto, o conjunto  $\{c_a \mid a \in X\}$  constitui um *conjunto gerador* de  $C_{\mathbb{K}}(X)$  i.e., cada elemento  $f \in C_{\mathbb{K}}(X)$  é da forma,

$$f(x) = \xi_1 c_{a_1}(x) + \cdots + \xi_n c_{a_n}(x),$$

onde  $a_1, \dots, a_n \in X$  e  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{K}$ . Mais precisamente, se o suporte de  $f$  é  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  então

$$f(x) = f(a_1)c_{a_1}(x) + \cdots + f(a_n)c_{a_n}(x).$$

Além disso, este conjunto de geradores é *minimal* ou seja, removendo algum dos seus elementos deixa de ser possível gerar todo o  $C_{\mathbb{K}}(X)$ . Mais precisamente, removendo  $c_a$  deixa de ser possível gerar qualquer função  $f$  cujo suporte contém  $a$  como elemento.

As propriedades seguintes são úteis apesar de simples consequências dos axiomas de espaço linear (e por isso são válidas em qualquer estrutura deste tipo).

LEMA 3.2.— *Seja  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ . Tem-se:*

1. Se  $x \in V$  então  $0x = 0$ .
2. Se  $x \in V$  então  $(-1)x = -x$ .
3. Se  $x \in V$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e  $x \neq 0$  então,  $\alpha x = \beta x$  se e só se  $\alpha = \beta$ .
4. Se  $x, y \in V$ ,  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  então,  $\alpha x = \alpha y$  se e só se  $x = y$ .

DEMONSTRAÇÃO.— Ver Apêndice 3.A.

□

### 3.2 SUBESPAÇOS DE UM ESPAÇO LINEAR

Suponhamos que  $V$  é um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ . Suponhamos que a operação de adição de vectores é  $+$  e que as operações de multiplicação por escalar são  $\hat{\alpha}_V$  (para  $\alpha \in \mathbb{K}$ ). (Neste ponto estamos a usar uma notação mais complicada para descrever as operações no espaço  $V$  porque será conveniente distinguir claramente as operações em diferentes espaços.) Consideremos agora um subconjunto não-vazio  $X \subset V$ . A *restrição da operação de adição de vectores em  $V$ , ao conjunto  $X$* , denota-se por  $+_{V|X}$  e é a função  $+_{V|X} : X \times X \rightarrow V$  definida por:

$$x +_{V|X} y := x +_V y,$$

ou seja, os resultados da restrição  $+_{V|X}$  são calculados da mesma maneira que recorrendo à adição em  $V$ , simplesmente enquanto função, o domínio de  $+_{V|X}$  envolve apenas vectores em  $X$ . Analogamente, para as multiplicações por escalar: a restrição de  $\hat{\alpha}_V$  a  $X$  denota-se  $\hat{\alpha}_{V|X}$  e para cada  $x \in X$  tem-se  $\hat{\alpha}_{V|X}(x) = \hat{\alpha}_V(x)$ .

Resumindo, para calcular o resultado de uma restrição aplicada a elementos de  $X$ , *esquecemos* que eles são elementos de  $X$  e calculamos o resultado através da correspondente operação em  $V$ , considerando os vectores enquanto elementos de  $V$ . Em geral, não distinguiremos simbolicamente uma operação e a sua restrição até porque, os resultados são calculados da mesma forma.

Pode perfeitamente acontecer que aplicando uma restrição a  $X$  de operações em  $V$  a elementos de  $X$  não resulte num elemento de  $X$ . E.g. se  $X = \{x\}$  (com  $x \neq 0$ ) e se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  então  $2x$  não é elemento de  $X$  (porque, como  $x \neq 0$  tem-se que  $2x \neq x$ ). Quando esta situação ocorre para alguma das operações, dizemos que  $X$  *não é fechado para as operações de  $V$* . Caso contrário diremos que  $X$  *é fechado para as operações de  $V$* .

**DEFINIÇÃO 3.3.**— *Sejam,  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$  e  $U \subset V$  tal que  $U \neq \emptyset$ . Diremos que  $U$  é um subespaço de  $V$  se  $U$ , equipado com as restrições das operações de  $V$  a  $U$ , é um espaço linear. Se  $U$  é um subespaço de  $V$  escrevemos  $U \leq V$ .*

O resultado seguinte é de grande utilidade prática, pois permite verificar se um subconjunto de um espaço linear é um subespaço sem que tenhamos que fazer uma verificação de todos os axiomas de espaço linear.

**TEOREMA 3.4.**— *Sejam,  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$  e  $U \subset V$  com  $U \neq \emptyset$ . Temos que  $U$  é um subespaço de  $V$  se e só se  $U$  é fechado para as operações de  $V$ , i.e. se e só se,*

1.  $\alpha x \in U$ , para quaisquer  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $x \in U$ ;
2.  $x + y \in U$ , para quaisquer  $x, y \in U$ .

*Ou ainda, se e só se*

$$\alpha x + \beta y \in U, \text{ quaisquer que sejam } \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } x, y \in U.$$

**DEMONSTRAÇÃO.**— Ver apêndice 3.A

□

**COROLÁRIO 3.4.1.**— *Tem-se que  $\{0\} \leq V$  e  $V \leq V$ .*

Exemplos típicos de subespaços são as denominadas *expansões lineares* de conjuntos de vectores que já definimos anteriormente.

TEOREMA 3.5.— *Sejam,  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$  e  $X \subset V$ . Tem-se que  $L_V(X)$  é um subespaço de  $V$ .*

DEMONSTRAÇÃO.— Ver apêndice . □

EXEMPLO 8.— Uma questão natural é a de saber se um vector  $x \in V$  é um elemento do espaço gerado por um conjunto finito,  $X$ , de vectores de  $V$  i.e. a questão de saber para um dado  $x \in V$  se tem  $x \in L_V(X)$ .

Nos espaços  $\mathbb{K}^n$  existe um procedimento efectivo que permite responder a esta questão. Na génese desse procedimento encontra-se uma observação básica: se  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  é uma matriz e  $x \in \mathbb{K}^{n \times 1}$  é o vector coluna  $[\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T$  então,

$$Ax = \alpha_1 A_{1,*} + \dots + \alpha_n A_{n,*},$$

ou seja  $Ax$  é uma combinação linear das colunas de  $A$ , os escalares que determinam essa combinação linear são as entradas do vector coluna  $x$ . Ou seja um vector  $b$  é uma combinação linear das colunas de  $A$  se e só se existe um vector  $x$  tal que  $Ax = b$ , ou seja, se e só se o sistema  $Ax = b$  é *possível*.

EXEMPLO 9.— Suponhamos que  $V = \mathbb{R}^3$  e consideremos  $(1, 0, 1), (2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ . Será que o vector  $(1, 2, 3)$  é uma combinação linear daqueles dois vectores?

Tendo em conta as observações precedentes, para responder a esta questão temos apenas que ver os vectores como colunas de uma matriz  $A$  e ver se a coluna  $b = [1 \ 2 \ 3]^T$  é combinação linear das colunas de  $A$ , ou seja, verificar se o sistema  $Ax = b$  é possível. Neste caso obtemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

pelo que o sistema é *impossível*. Concluimos assim que o vector  $(1, 2, 3)$  não é elemento da expansão linear  $L_V(\{(1, 0, 1), (2, 2, 3)\})$ .

Podemos até considerar o problema genericamente e caracterizar exactamente os vectores  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  que são elementos daquela expansão linear, ou seja, que são combinações lineares daqueles dois vectores. A questão é semelhante, queremos determinar em que condições, o sistema:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{array} \right]$$

é possível. Ora, recorrendo ao método de eliminação de Gauss, obtemos:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{array} \right] &\rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & z-x \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 2 & y \end{array} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & 2x+y-2z \end{array} \right] \end{aligned}$$

O que mostra que o sistema é possível se e só se  $2x + y - z = 0$ . Assim, concluímos que

$$L_V(\{(1, 0, 1), (2, 2, 3)\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}.$$

O exemplo precedente ilustra o seguinte resultado:

LEMA 3.6.— *Dados vectores  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{K}^n$  um vector  $w$  é combinação linear dos vectores  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{K}^n$  i.e.,  $w \in L_{\mathbb{K}}(\{u_1, \dots, u_k\})$  se e só se o sistema  $Ax = w$ , onde  $A$  é a matriz que tem como colunas os vectores  $u_1, \dots, u_k$ , é possível.*

Os subespaços de  $\mathbb{K}^n$  podem apresenta-se essencialmente de duas maneiras: ou como o núcleo de uma matriz  $A$  ou como uma expansão linear  $L_V(\{x_1, \dots, x_n\})$ . A partir de uma apresentação de um dos tipos pode sempre obter-se uma apresentação do outro tipo. Ilustramos o processo através de dois exemplos.

EXEMPLO 10.— Suponhamos que  $U \leq \mathbb{R}^4$  é o subespaço

$$U := \{(x, y, z, w) \mid x + y + w = 0 \wedge x + y + z = 0\},$$

ou seja,  $U = \text{Nuc}(A)$ , onde  $A$  é a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos determinar os vectores em  $\text{Nuc}(A)$  resolvendo o sistema homogéneo correspondente:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

e, descrevendo a solução em termos das variáveis livres, obtemos que:

$$\text{Nuc}(A) = \{(-y - w, y, w, w) \mid y, w \in \mathbb{R}\}.$$

Os vectores  $(-y - w, y, w, w)$  podem decompor-se numa soma do tipo

$$(-y - w, y, w, w) = (-y, y, 0, 0) + (-w, 0, w, w),$$

onde em cada vector, na soma do lado direito da igualdade, é mencionada uma única variável livre. Finalmente, colocando em cada vector a respectiva variável livre em evidência obtém-se:

$$(-y - w, y, w, w) = (-y, y, 0, 0) + (-w, 0, w, w) = y(-1, 1, 0, 0) + w(-1, 0, 1, 1).$$

Uma vez que  $y, w$  são quaisquer, resulta que  $\text{Nuc}(A)$  consiste na totalidade das combinações lineares dos vectores  $(-1, 1, 0, 0)$  e  $(-1, 0, 1, 1)$ , ou seja,

$$U = \text{Nuc}(A) = L_{\mathbb{R}^4}(\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1)\}).$$

Os vectores geradores de  $U$  que foram obtidos *separando as variáveis livres* na solução geral do sistema  $Ax = 0$ , diz-se que são obtidos pelo *método da separação das variáveis*. Os vectores obtidos por este processo **são sempre linearmente independentes** e constituem uma base do núcleo de  $A$ . (Neste caso,  $\dim(U) = 2$ .)

EXEMPLO 11.— Seja  $U = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 1, 1), (1, -2, 1)\})$ . Tem-se então que  $U$  é o espaço



das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como vimos,  $(x, y, z)$ , ou seja  $[x \ y \ z]^T$ , pertence ao espaço das colunas de  $A$  se e só se, o sistema  $Au = [x \ y \ z]^T$  for possível. Considerando a matriz aumentada do sistema:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-x \\ 0 & 0 & z-x \end{array} \right]$$

Constata-se que o sistema é possível se e só se  $z = x$  ou seja,

$$U = \{(x, y, z) \mid z = x\}.$$

**DEFINIÇÃO 3.7.**— *Um espaço linear  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  diz-se de dimensão finita ou finitamente gerado se existe  $X \subset V$ , finito, tal que  $V = L_V(X)$  i.e., qualquer vector em  $V$  é uma combinação linear dos vectores em  $X$ . Se, pelo contrário, para qualquer  $X \subset V$ , finito, se tem  $L_V(X) \neq V$  então, dizemos que  $V$  é um espaço de dimensão infinita.*<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Iremos ocupar-nos essencialmente com os espaços de dimensão finita. Desta forma, ao longo deste texto, o termo *espaço linear* deve ser entendido como sinónimo de *espaço de dimensão finita*.

Como veremos adiante o lema 3.6 tem um âmbito mais geral do que aparenta.<sup>6</sup>

Por definição, um espaço linear de dimensão finita,  $V$ , é um espaço da forma  $V = L_V(\{u_1, \dots, u_k\})$ . Teremos a ocasião de estabelecer mais adiante que se  $U \leq V$  então  $U$  também é finitamente gerado. Assim, todo o subespaço de um espaço linear de dimensão finita,  $V$ , é da forma  $L_V(\{e_1, \dots, e_s\})$ .

Retomando o exemplo 8, fomos capazes de caracterizar os elementos do subespaço de  $\mathbb{R}^3$  aí considerado através de equações lineares homogéneas i.e., descrevendo-o como o núcleo de uma matriz.

A situação pode generalizar-se.

<sup>6</sup> Essencialmente, um espaço linear  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  é essencialmente equivalente a um espaço  $\mathbb{K}^n$  para algum  $n$  e, qualquer problema (de álgebra linear) envolvendo  $V$ , pode ser reduzido a um problema do mesmo tipo em  $\mathbb{K}^n$ . Em particular, o problema de saber se  $w \in L_V u_1, \dots, u_k$  (em  $V$ ) pode ser resolvido em  $\mathbb{K}^n$  resolvendo um problema do mesmo tipo  $w^* \in L_V u_1^*, \dots, u_k^*$  onde  $w^*, u_1^*, \dots, u_k^*$  são vectores de coordenadas de  $w, u_1, \dots, u_k$ , respectivamente.

**LEMA 3.8.**— *Seja  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Tem-se que  $\text{Nuc}(A)$  é um subespaço de  $\mathbb{K}^n$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.**— Ver apêndice 3.A. □

### 3.3 BASES E DIMENSÃO

Recordamos que se  $V = L_V(X)$  então dizemos que  $X$  é um *conjunto gerador* de  $V$ . Como  $L_V(\emptyset) = \{0_V\}$  o subespaço  $\{0_V\}$  é gerado pelo conjunto vazio. Além disso, o conjunto vazio é o seu único gerador pois se  $X \neq \emptyset$  então  $L_V(X) \neq \{0_V\}$ . Este último facto é uma consequência directa de uma propriedade geral: quaisquer que sejam  $X \subset V$  e  $x \in X$  tem-se sempre que  $1x \in \mathcal{L}(X)$  o que implica  $X \subset L_V(X)$ . Além disso, todo o espaço linear  $V$  possui trivialmente um conjunto gerador dado que  $L_V(V) = V$ .

Claro que o facto  $V = L_V(V)$  tem pouco interesse prático. Seria interessante poder aceder à estrutura de  $V$  a partir de um conjunto mínimo de informação ou, pelo menos, a partir de um conjunto relativamente pequeno de informação. Num caso típico tem-se  $V = L_V(X)$  com  $X$  finito. Quando isto acontece, o espaço  $V$  diz-se um *espaço de dimensão finita*.

## 3.3.1 ESPAÇOS DE DIMENSÃO FINITA

Esta secção é acerca do problema de determinar conjuntos geradores óptimos no contexto dos espaços lineares de dimensão finita. Entendemos aqui o termo *óptimos* no sentido de *o mais económicos possível*. Para ilustrar a questão: se  $V = L_V(\{x, 2x\})$  (onde  $V$  é um e.l. sobre  $\mathbb{R}$ ) então o conjunto  $\{x, 2x\}$  não é óptimo: de facto se  $y \in V$  é uma combinação linear dos vectores  $x$  e  $2x$ , i.e. se se tem  $y = \alpha x + \beta(2x)$  para certos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  então:

$$y = \alpha x + \beta(2x) = (\alpha + 2\beta)x,$$

o que, visto  $y$  poder ser qualquer, revela que  $L_V(\{x, 2x\}) = L_V(\{x\})$ . Aquilo que impede que  $\{x, 2x\}$  seja um conjunto gerador óptimo é o facto de um dos seus elementos, e.g.  $2x$  ser já uma combinação linear dos restantes (neste caso apenas  $x$ ), podendo ser eliminado sem restringir a respectiva expansão linear. Estas observações sugerem a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 3.9 (CONJUNTO LINEARMENTE DEPENDENTE).—

Um conjunto de vectores  $\{x_1, \dots, x_n\}$  diz-se linearmente dependente se algum dos vectores  $x_i$  for combinação linear dos restantes, ou seja se para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$  se tem  $x_i \in L_V(X \setminus \{x_i\})$ .<sup>7</sup>

DEFINIÇÃO 3.10 (CONJUNTO LINEARMENTE INDEPENDENTE).—

Um conjunto de vectores  $\{x_1, \dots, x_n\}$  diz-se linearmente independente se não for linearmente dependente, i.e. se nenhum dos vectores no conjunto for uma combinação linear dos restantes.

Observe-se que  $0 \in L_V(X \setminus \{0\})$  pelo que, se um conjunto  $X$  contém o vector nulo ele é necessariamente linearmente dependente.

O resultado seguinte fornece critérios alternativos para a verificação da independência linear de um conjunto de vectores.

TEOREMA 3.II.— Sejam,  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$  e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  um subconjunto de  $V$ . Nestas condições são equivalentes:

- (a)  $X$  é linearmente independente.
- (b) Se  $0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$  então  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , ou seja, a única forma de obter o vector nulo como combinação linear de  $x_1, \dots, x_n$  é considerando a combinação linear em que os coeficientes são todos nulos.
- (c) Se  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$  então,  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$  ou seja, se um vector é uma combinação linear de  $x_1, \dots, x_n$  essa combinação linear é única.

DEMONSTRAÇÃO.—

(a)  $\Rightarrow$  (b): Mostramos que  $\neg(a) \Rightarrow \neg(b)$ . Suponhamos então que se tem  $0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$  e que os escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  não são todos nulos. Suponhamos ainda que  $i \in \{1, \dots, n\}$  é tal que  $\alpha_i \neq 0$ . Tem-se:

$$x_i = \frac{1}{\alpha_i} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} -\alpha_j x_j \in L_V(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}),$$

<sup>7</sup> A propósito desta notação, recorde-se que se  $X, Y$  são conjuntos então,  $X \setminus Y$  (diz-se  $X$  *excepto*  $Y$ ) denota o conjunto que contém os elementos de  $X$  que não são também elementos de  $Y$ .

contradizendo o facto de  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ser linearmente independente.

(b)  $\Rightarrow$  (c): Supondo que  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$  então,

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)x_n = 0.$$

Usando (b) concluímos que se tem  $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$ , ou seja,  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ , como se pretendia.

(c)  $\Rightarrow$  (a): Mais uma vez optamos por mostrar  $\neg(a) \Rightarrow \neg(c)$ . Suponhamos que  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é linearmente dependente. Então um dos vectores, digamos que  $x_i$ , é uma combinação linear dos restantes:

$$x_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \alpha_j x_j.$$

Nestas condições:  $0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{i-1} x_{i-1} - x_i + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \dots + \alpha_n x_n$ . Ou seja, não existe unicidade na representação do vector nulo, contrariando a condição (c).  $\square$

LEMA 3.12.— *Sejam  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ ,  $X = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$  linearmente independente e  $x \notin X \subset V$ . Tem-se que  $X \cup \{x\}$  é linearmente independente se e só se  $x \notin L_V(X)$ .*

DEMONSTRAÇÃO.— Consideremos  $X$  e  $x$  nas condições do enunciado e suponhamos que  $X \cup \{x\}$  é linearmente dependente. Então, existem escalares (não todos nulos) tais que  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta x = 0$ . Não se pode ter  $\beta = 0$  pois nesse caso ter-se-ia  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$  contrariando o facto de  $X$  ser um conjunto linearmente independente. Mas, tendo-se  $\beta \neq 0$ , também se tem que:

$$x = -\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} x_n \in L_V(X),$$

contrariando as hipóteses do enunciado. Tem-se assim que  $X \cup \{x\}$  é linearmente independente.  $\square$

Os conjuntos geradores que são linearmente independentes são óptimos (no sentido rigoroso descrito no resultado seguinte).

TEOREMA 3.13.— *Sejam  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$  e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  um subconjunto de  $V$ . São equivalentes:*

- (a)  $V = L_V(X)$  e  $X$  é um conjunto linearmente independente.
- (b) Todo o elemento de  $V$  pode ser escrito de modo único como combinação linear dos vectores em  $X$ .
- (c)  $V = L_V(X)$  e se  $Y \subsetneq X$  então  $L_V(Y) \neq V$  (i.e.  $X$  é um conjunto gerador de  $V$  que é minimal).
- (d)  $X$  é linearmente independente e se  $X \subsetneq Y \subset V$  então  $Y$  é linearmente dependente (i.e.  $X$  é em  $V$  um conjunto linearmente independente maximal).

DEMONSTRAÇÃO.—

(a) $\Rightarrow$ (b): É uma consequência do teorema anterior. Como  $V = L_V(X)$  todo o elemento de  $V$  é combinação linear dos elementos de  $X$ . Como  $X$  é linearmente independente, pelo teorema precedente, essa combinação linear é única.

(b) $\Rightarrow$ (c): Admitindo que existe  $Y \subsetneq X$  tal que  $L_V(Y) = L_V(X)$ , consideremos um  $x_i \in X$  tal que  $x_i \notin Y$ . Por hipótese temos que

$$x_i = \sum_{x \in Y} \alpha_x x.$$

Como  $x_i = 1x_i$ , temos que  $1x_i$  e  $\sum_{x \in Y} \alpha_x x$  são duas combinações lineares distintas de elementos de  $X$  que permitem obter o vector  $x_i$ . Esta circunstância contraria, no entanto, (b).

(c) $\Rightarrow$ (d): Se  $Y$  não fosse dependente então seria um conjunto gerador de  $V$  linearmente independente, mas não seria minimal, contrariando (c).

(c) $\Rightarrow$ (a): Se não se tivesse  $\mathcal{L}_V(X) = V$  então poderíamos considerar  $y \notin \mathcal{L}_V(X)$  e então ter-se-ia  $X \subsetneq X \cup \{y\}$  com  $X \cup \{y\}$  linearmente independente, contrariando assim (d).  $\square$

De acordo com o resultado precedente um conjunto gerador de um espaço que seja linearmente independente é um conjunto minimal de vectores que gera esse espaço, i.e. nenhuma das suas partes próprias pode gerar todo o espaço. Também é maximal no seguinte sentido, se lhe acrescentarmos outros vectores, embora continue a gerar o espaço, deixa de ser linearmente independente.

**DEFINIÇÃO 3.14 (BASE DE UM ESPAÇO LINEAR).**— *Um conjunto  $X \subset V$  que satisfaça uma qualquer das condições do teorema precedente diz-se uma base de  $V$ .*

**TEOREMA 3.15 (EXISTÊNCIA DE BASES).**— *Suponhamos que  $V$  é um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ , finitamente gerado. Nestas condições  $V$  tem uma base.*<sup>8</sup>

**DEMONSTRAÇÃO.**— O caso  $V = \{0_V\}$  possui trivialmente uma base que é o conjunto vazio. Consideremos então o caso em que  $V \neq \{0_V\}$ . Uma vez que  $V$  é finitamente gerado, existe um conjunto (não vazio)  $X = \{u_1, \dots, u_n\}$  tal que  $V = L_V(X)$ . Entre as partes de  $X$  é sempre possível encontrar uma, digamos  $Y$ , que constitua um conjunto linearmente independente, maximal.<sup>9</sup> Neste caso  $L_V(Y) = V$ . Para constatar este facto basta observar que para cada  $1 \leq i \leq n$  se tem que  $Y \cup \{x_i\}$  ou é  $Y$  ou é um conjunto linearmente independente. Assim,  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset L_V(Y)$ , ou seja,  $V = L_V(X) \subset L_V(Y) \subset V$ . Concluimos desta forma que  $Y$  é uma base de  $V$ .  $\square$

### 3.3.2 DIMENSÃO

Um facto interessante é que se  $V = L_V(X)$  então podemos isolar um subconjunto  $Y \subset X$  que é uma base de  $V$ . (Desta forma qualquer espaço de dimensão finita tem uma base.) Por outro lado, se  $X$  e  $Y$  são bases de um espaço  $V$  então a cardinalidade de  $X$  (i.e. a quantidade de elementos de  $X$ ) é igual à cardinalidade de  $Y$ . (Se  $X$  é um conjunto finito, denotamos por  $|X|$  a respectiva cardinalidade.)

**LEMA 3.16.**— *Seja  $V$  um e.l. sobre  $\mathbb{K}$ . Suponhamos que  $X, Y \subset V$  e  $Y \subset L_V(X)$ . Nestas condições,  $L_V(Y) \subset L_V(X)$ .*

<sup>8</sup> De facto, se um espaço linear possui uma base então possui uma infinidade de bases.

<sup>9</sup> I.e., um subconjunto  $Y \subset X$  tal que  $Y$  é linearmente independente e dado qualquer  $Z \subset X$  tal que  $Y \subset Z$  se tem que  $Z$  é linearmente dependente. (Um tal  $Y$  pode ser obtido da seguinte forma: definimos a sequência  $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n$  de subconjuntos de  $X$  da seguinte forma  $Y_1 = \{u_1\}$  se  $u_1 \neq 0$  e  $Y_1 = \emptyset$  caso contrário. Se  $i < n$  e  $Y_i$  está definido então,  $Y_{i+1} = Y_i \cup \{x_{i+1}\}$  se este conjunto é linearmente independente, caso contrário  $Y_{i+1} = Y_i$ .

DEMONSTRAÇÃO.— A conclusão decorre de uma simples aplicação do facto de um subespaço ser fechado para combinações lineares i.e., contém todas as combinações lineares dos seus elementos.  $\square$

LEMA 3.17.— *Seja  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ . Suponhamos que  $X \subset V$  e  $0 \neq y \in L_V(X)$ . Nestas condições, existe um  $x \in X$  tal que*

$$L_V(X) = L_V((X \setminus \{x\}) \cup \{y\}).$$

DEMONSTRAÇÃO.— Suponhamos que  $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ . Como  $y \neq 0$  pelo menos um dos escalares  $\alpha_i$  naquela combinação linear não é nulo. Desta forma obtemos:

$$-\alpha_i x_i = -y + \sum_{j \neq i} \alpha_j x_j.$$

ou seja,

$$x_i = \frac{1}{\alpha_i} y - \sum_{j \neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} x_j.$$

Tem-se assim que  $L_V(X) \subset L_V((X \setminus \{x_i\}) \cup \{y\}) \subset L_V(X)$ , ou seja,  $L_V(X) = L_V((X \setminus \{x_i\}) \cup \{y\})$ .  $\square$

TEOREMA 3.18.— *Se  $V = L_V(X)$  e  $Y \subset V$  é linearmente independente então  $|Y| \leq |X|$ .*

DEMONSTRAÇÃO.— Suponhamos que, contrariando a conclusão do teorema, se tem que  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$  e  $k = n + r$ , para algum  $r \geq 1$ . Consideremos os dois conjuntos lado a lado:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+r}\}$$

Mudando o vector  $y_1$  para o primeiro conjunto obtemos:

$$\{y_1, x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \{y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+r}\}.$$

Uma vez que  $y_1$  é combinação linear dos  $x_i$ , recorrendo ao resultado precedente podemos eliminar um dos  $x_i$  e continuar a gerar  $V$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que podemos eliminar  $x_1$ . Concluimos então que os conjuntos

$$\{y_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \{y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+r}\}.$$

são respectivamente um conjunto gerador de  $V$  e um conjunto linearmente independente de vectores. O procedimento anterior pode assim ser repetido até ao momento em que obtemos conjuntos:

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \quad \{y_{n+1}, \dots, y_{n+r}\}.$$

o da esquerda, um conjunto gerador de  $V$ , o da direita um conjunto linearmente independente.

Temos assim que  $y_{n+1} \in L_V(\{y_1, y_2, \dots, y_n\})$  contrariando a independência linear de  $Y$ . Não se pode pois ter  $k > n$  e o teorema fica estabelecido.  $\square$

COROLÁRIO 3.18.I.— *Se  $B_1, B_2 \subset V$  são bases de  $V$  então  $|B_1| = |B_2|$ .*

DEMONSTRAÇÃO.— Pelo teorema precedente  $B_1$  e  $B_2$  são conjuntos geradores, linearmente independentes, de  $V$ . Assim, como  $B_1$  é gerador e  $B_2$  é linearmente

independente tem-se que  $|B_2| \leq |B_1|$ . Trocando os papéis de  $B_1$  e  $B_2$  concluímos que  $|B_1| \leq |B_2|$  tendo-se finalmente que  $|B_1| = |B_2|$ , como pretendido.  $\square$

DEFINIÇÃO 3.19 (DIMENSÃO).— *Seja  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ . A dimensão de  $V$ , que se denota  $\dim(V)$  é a cardinalidade de uma (e neste caso de qualquer) base de  $V$ .*

### 3.3.3 ESPAÇOS DAS LINHAS E DAS COLUNAS DE UMA MATRIZ.

#### CARACTERÍSTICA

Suponhamos que  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . As linhas de  $A$  podem ser vistas como elementos de  $\mathbb{K}^n$  enquanto que as colunas de  $A$  podem ser vistas como elementos de  $\mathbb{K}^m$ . Feita esta observação, definimos o *espaço das colunas* de  $A$ , que denotamos por,  $\text{Col}(A)$ , é o subespaço de  $\mathbb{K}^m$  gerado pelas colunas de  $A$ . Analogamente, o espaço das linhas de  $A$ , que se denota por  $\text{Lin}(A)$ , é o subespaço de  $\mathbb{K}^n$  gerado pelas linhas de  $A$ .

TEOREMA 3.20.— *Suponhamos que  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . As operações do método de eliminação de Gauss não alteram o espaço das linhas de  $A$ . Além disso não alteram a dimensão do espaço das colunas.*

TEOREMA 3.21.— *Suponhamos que  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Tem-se que:*

$$\dim(\text{Lin}(A)) = \dim(\text{Col}(A)).$$

DEMONSTRAÇÃO.— Seja  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  e suponhamos que a dimensão de  $\text{Col}(A)$  é  $r$ . Fixemos uma base  $c_1, \dots, c_r$  de  $\text{Col}(A)$ . Consideremos a matriz  $C \in \mathbb{K}^{m \times r}$  cujas colunas são os vectores  $c_r$ , i.e. tem-se  $C_{*,j} = c_j$ , para  $1 \leq j \leq r$ . As restantes  $n - r$  colunas de  $A$  são combinações lineares de  $c_1, \dots, c_r$ . Isto significa que existe uma matriz  $R \in \mathbb{K}^{r \times n}$  tal que  $A = CR$ . ( $R$  é a matriz onde  $R_{*,j}$  é o vector de coordenadas da  $j$ -ésima coluna de  $A$  na base  $c_1, \dots, c_r$ ).

Agora, cada linha de  $A$  é uma combinação linear das  $r$  linhas de  $R$  e, desta forma, a dimensão do espaço das linhas não pode exceder  $r$ .

Uma vez que esta conclusão vale para qualquer matriz, vale para a matriz  $A^T$  onde o papel das linhas e colunas é trocado. Assim concluímos que as duas dimensões devem coincidir.  $\square$

DEFINIÇÃO 3.22.— *Tendo em causa o resultado anterior, a característica de uma matriz  $A$  é*

$$\text{car}(A) := \dim(\text{Lin}(A)) = \dim(\text{Col}(A)).$$

OBSERVAÇÃO 1.— Tendo em conta as considerações anteriores, se  $A^*$  é uma matriz em escada de linhas, que se obtém de  $A$  usando o método de eliminação de Gauss então

$$\text{car}(A) = \text{car}(A^*) = \text{número de pivôs de } A^*.$$

### 3.4 SOMAS E INTERSECÇÕES DE SUBESPAÇOS

TEOREMA 3.23.— *Dados  $U, W \in \text{Sub}(V)$  a intersecção  $U \cap W$  é um subespaço de  $V$ . Além disso  $U \cap W$  é o maior subespaço de  $V$  que está contido simultaneamente em  $U$  e em  $W$ .*

DEMONSTRAÇÃO.—

Se, em termos duais, quisermos descrever o menor subespaço de  $V$  que contém os subespaços  $U, W$ , um candidato natural será a união dos dois subespaços.  $U \cup W$ . No entanto, apenas em casos muito particulares a união de dois subespaços é um subespaço:

LEMA 3.24.— *Se  $U, W \in \text{Sub}(V)$  então  $U \cup W \in \text{Sub}(V)$  se e só se  $U \subset W$  ou  $W \subset U$ .*

DEMONSTRAÇÃO.—

É fácil verificar que a união de dois subespaços é sempre fechada para a multiplicação por escalar por isso, o que falha em geral é o fecho para a adição de vectores, designadamente, somas da forma  $u + w$  em que  $u \in U$  e  $w \in W$ .

Assim, o candidato natural a substituir  $U \cup W$  enquanto menor subespaço que contém  $U$  e  $W$  é o conjunto de vectores que designamos de *soma de  $U$  com  $W$* , que se denota  $U + W$  e é

$$U + W := \{u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}.$$

Note-se que  $U, W \subset U + W$  porque se  $u \in U$  então  $u = u + 0$  com  $0 \in W$  (e analogamente para  $w \in W$ ). Além disso, se  $X$  é um subespaço de  $V$  tal que  $U, W \subset X$  então tem que conter todas as somas de elementos de  $U$  com elementos de  $W$  i.e.,  $U + W \subset X$ . Concluimos então que se  $U + W$  for um subespaço de  $V$  ele é o menor subespaço que contém  $U$  e  $W$ . Tem-se,

LEMA 3.25.— *Dados  $U, W \in \text{Sub}(V)$  tem-se que  $U + W \in \text{Sub}(V)$ .*

DEMONSTRAÇÃO.—

Uma importante questão é a de saber determinar bases para  $U \cap W$  e  $U + W$  no caso de  $U$  e  $W$  serem subespaços de  $\mathbb{K}^n$ .<sup>10</sup>

Se  $U, W \in \text{Sub}(\mathbb{K}^n)$ , para determinar uma base de  $U + W$  temos que considerar  $U$  e  $W$  apresentados como expansões lineares i.e.,  $U = L_{\mathbb{K}^n}(\{x_1, \dots, x_r\})$  e  $W = L_{\mathbb{K}^n}(\{y_1, \dots, y_s\})$ . Neste caso, tem-se claramente que

$$U + W = L_{\mathbb{K}^n}(\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\}).$$

Pelo que obter uma base para  $U + W$  se resume a obter um conjunto linearmente independente de vectores que gerem o mesmo subespaço que  $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\}$ , o que pode ser feito, por exemplo, recorrendo ao método de eliminação de Gauss.

No que diz respeito à intersecção,  $U \cap W$ . Para determinar uma base deste subespaço eles têm que possuir apresentações do mesmo tipo. Se  $U = \text{Nuc}(A)$  e  $W = \text{Nuc}(B)$  então

$$U \cap W = \text{Nuc}\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right),$$

ou seja é o núcleo da matriz que se obtém juntando às linhas de  $A$ , as linhas de  $B$ . Neste caso uma base pode obter-se pelo método da separação das variáveis.

<sup>10</sup> O caso geral, ou seja, quando o espaço ambiente é um espaço  $V$  que não é necessariamente  $\mathbb{K}^n$  reduz-se a este via coordenadas (ver a secção seguinte).

Se  $U = L_{\mathbb{K}^n}(\{x_1, \dots, x_r\})$  e  $W = L_{\mathbb{K}^n}(\{x_1, \dots, x_s\})$  então, temos que  $x \in U \cap W$  se e só se existem escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$  tais que:

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_s y_s,$$

ou seja, se e só se,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$  pertence ao núcleo da matriz:

$$\begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ x_1 & \cdots & x_r & -y_1 & \cdots & -y_s \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix}$$

Se os vectores

$$(\xi_1^i, \dots, \xi_r^i, \zeta_1^i, \dots, \zeta_s^i) \quad (1 \leq i \leq k)$$

são uma base daquele núcleo então, constata-se que os vectores

$$u_i = \xi_1^i x_1 + \dots + \xi_r^i x_r \quad (1 \leq i \leq k)$$

constituem uma base de  $U \cap W$ . De resto, o mesmo sucede com os vectores

$$w_i = \zeta_1^i y_1 + \dots + \zeta_s^i y_s \quad (1 \leq i \leq k).$$

Quando  $U \cap V = \{0\}$  a soma de  $U$  com  $W$  designa-se de *soma directa* e denota-se  $U \oplus W$ .<sup>11</sup> Existem consequências importantes do facto de uma soma de subespaços ser uma soma directa. Todo o elemento de uma soma de dois subespaços  $U$  e  $W$  (directa ou não) é uma soma de um elemento  $u \in U$  com um elemento  $w \in W$ . No caso da soma não ser directa e a intersecção conter um vector não nulo, digamos  $x$ , tem-se que  $u + w = (u - x) + (w + x)$  (tendo-se:  $u - x \in U$  e  $w + x \in W$ ), ou seja, um elemento em  $U + W$  não é neste caso obtido univocamente como a soma de um elemento de  $U$  com um elemento de  $W$ . No caso de uma soma directa a situação é a oposta:

**TEOREMA 3.26.**— *Sejam  $V$  é um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ ,  $U, W \in \text{Sub}(V)$  e  $x \in U \oplus W$  então, existem  $u \in U$  e  $w \in W$  únicos tais que  $x = u + w$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.**— Que existem  $u$  e  $w$  nas condições indicadas resulta imediatamente do facto de uma soma directa ser uma soma. Quanto à unicidade: suponhamos que não temos unicidade e que é possível considerar  $x \in U \oplus W$ , bem como  $u_1, u_2 \in U$  e  $w_1, w_2 \in W$  tais que:

$$u_1 + w_1 = x = u_2 + w_2.$$

Ora daqui conclui-se que  $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$  o que, não se tendo  $u_1 = u_2$  e  $w_1 = w_2$  implica que  $U \cap W$  não é trivial, o que contradiz o facto de a soma ser directa. Tem assim que se ter a unicidade.  $\square$

O tipo de soma directa que acabámos de descrever designa-se de *soma directa interna* já que envolve dois subespaços de um mesmo espaço linear  $V$ .

Estas noções de soma e soma directa de subespaços generalizam-se sem dificuldade, permitindo-nos considerar um qualquer número (finito) de subespaços de  $V$ .

**DEFINIÇÃO 3.27.**— *Sejam,  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$  e  $U_1, \dots, U_n$  subespaços de  $V$ .*

<sup>11</sup> Note-se que  $U \oplus W$  coincide com  $U + W$  a nova notação serve apenas para indicar que a intersecção de  $U$  com  $W$  consiste apenas do vector nulo.



Definimos:

$$\sum_{i=1}^n U_i = U_1 + \dots + U_n \\ := \{u_1 + \dots + u_n \mid u_1 \in U_1 \wedge \dots \wedge u_n \in U_n\}.$$

TEOREMA 3.28.— *Sejam,  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$  e  $U_1, \dots, U_n$  subespaços de  $V$ . Nestas condições,  $U_1 + \dots + U_n \in \text{Sub}(V)$ .*

Uma soma  $U_1 + \dots + U_n$  diz-se *directa* se para cada  $i = 1, \dots, n$  se tem que:

$$U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}.$$

Se  $U_1 + \dots + U_n$  é uma soma directa (interna) escrevemos  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$  ou  $\bigoplus_{i=1}^n U_i$  para exprimir claramente esse facto.

Como anteriormente tem-se o seguinte

TEOREMA 3.29.— *Se  $U_1, \dots, U_n \in \text{Sub}(V)$  e  $x \in U_1 \oplus \dots \oplus U_n$  então existem vectores  $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$  (únicos), tais que  $x = u_1 + \dots + u_n$ .*

DEFINIÇÃO 3.30.— *Se  $V = U \oplus W$  dizemos que  $U$  é um complemento de  $W$  em  $V$  (ou que  $W$  é um complemento de  $U$  em  $V$ ).*

TEOREMA 3.31.— *Se  $U \in \text{Sub}(V)$  então existe  $W \in \text{Sub}(V)$  tal que  $V = U \oplus W$ . (Este  $W$  não é único.)*

Concluimos esta secção com o seguinte resultado:

TEOREMA 3.32.— *Consideremos uma família  $\{U_i \mid i = 1, \dots, n\}$  onde  $n \in \mathbb{N}$ . São equivalentes:*

1. *A família é uma família independente de subespaços, i.e. para cada  $i = 1, \dots, n$ ,*

$$S_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}.$$

2. *Unicidade de representação do vector nulo i.e. a única maneira de obter  $0$  como soma de vectores dos  $U_1, \dots, U_n$  é somando vectores nulos.*
3. *Cada vector  $x \in U_1 + \dots + U_n$  pode ser obtido de modo único (excepto a ordem das parcelas) como uma soma  $u_1 + \dots + u_n$  onde para  $i = 1, \dots, n$  se tem  $u_i \in U_i$ .*

Assim, uma soma é directa se e só se uma destas condições se verifica.

TEOREMA 3.33.— *Seja  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ .*

1. *Seja  $B$  é uma base de  $V$  tal que  $B = B_1 \cup B_2$  onde  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  então,  $V = L_V(B_1) \oplus L_V(B_2)$ .*
2. *Se  $V = U \oplus W$ ,  $B_1$  é uma base de  $U$  e  $B_2$  é uma base de  $W$  então  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  e  $B_1 \cup B_2$  é uma base de  $V$ .*

TEOREMA 3.34.— *Um conjunto  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é uma base de  $V$  se e só se*

$$V = L_V(\{x_1\}) \oplus \dots \oplus L_V(\{x_n\}).$$

TEOREMA 3.35.— *Suponhamos que  $U, W \in S(V)$ . Tem-se que:*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

*Em particular:*

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W).$$

### 3.5 BASES ORDENADAS E COORDENADAS

DEFINIÇÃO 3.36.— *Seja  $V$  um espaço linear de dimensão  $n$ . Uma base ordenada de  $V$  é um  $n$ -úplo ordenado de vectores de  $V$ ,  $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ ,<sup>12</sup> tal que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de  $V$ .*

<sup>12</sup> Denotamos bases ordenadas através de letras gregas minúsculas em estilo romano.

Observe-se que qualquer conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  origina  $n!$   $n$ -úplos distintos, desta forma qualquer base de  $V$ , com  $n$  vectores, origina  $n!$  bases ordenadas distintas.

Suponhamos que  $\beta = (e_1, \dots, e_n)$  é uma base ordenada de  $V$ . Dado  $x \in V$  existe uma única sequência de escalares  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$  tal que:

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

O vector  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ , contendo os coeficientes daquela combinação linear diz-se o *vector de coordenadas de  $x$  na base  $\beta$*  e denota-se  $x_\beta$ . Reciprocamente, um qualquer vector  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$  determina, relativamente à base  $\beta$  um único vector de  $V$ , respectivamente:

$$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\beta = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Podemos até definir uma função  $\phi_\beta : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  que associa a cada vector de  $V$  o respectivo vector de coordenadas na base  $\beta$ , i.e.  $\phi_\beta(x) = x_\beta$ . Esta função possui propriedades interessantes:

- (1)  $\phi_\beta$  tem uma inversa  $\phi_\beta^{-1} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$  que é definida por:

$$\phi_\beta^{-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\beta.$$

São válidas as seguintes igualdades:

$$(x_\beta)^\beta = x;$$

$$((\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\beta)_\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

- (2)  $\phi_\beta$  preserva combinações lineares, i.e.

$$(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r)_\beta = \alpha_1 (x_1)_\beta + \dots + \alpha_r (x_r)_\beta.$$

ou seja, o vector de coordenadas de uma combinação linear de vectores é a (mesma) combinação linear dos respectivos vectores de coordenadas.

- (3)  $\phi_\beta^{-1}$  também preserva combinações lineares no sentido da alínea precedente.<sup>13</sup>

Se  $X \subset V$  e  $W \subset \mathbb{K}^n$  então, definimos

$$\phi_\beta[X] = X_\beta := \{x_\beta \mid x \in X\};$$

$$\phi_\beta^{-1}[W] = W^\beta := \{(\xi_1, \dots, \xi_n)^\beta \mid (\xi_1, \dots, \xi_n) \in W\}.$$

- (4)  $X \leq V$  sse  $X_\beta \leq \mathbb{K}^n$ ;

- (5)  $W \leq \mathbb{K}^n$  sse  $W^\beta \leq V$ ;

<sup>13</sup> Uma função que preserva combinações lineares diz-se uma *transformação linear*. Assim a função  $\phi_\beta$  é uma transformação linear. Por outro lado a inversa de uma transformação linear é sempre uma transformação linear (ver o próximo capítulo).

- (6)  $X \subset V$  é linearmente independente (resp. dependente) sse  $X_\beta$  é linearmente independente (resp. dependente);
- (7)  $W \subset \mathbb{K}^n$  é linearmente independente (resp. dependente) sse  $W^\beta$  é linearmente independente (resp. dependente);
- (8)  $X = L_V(x_1, \dots, x_k)$  se e só se  $X_\beta = L_{\mathbb{K}^n}((x_1)_\beta, \dots, (x_k)_\beta)$ ;
- (9)  $W = L_{\mathbb{K}^n}(w_1, \dots, w_k)$  se e só se  $W^\beta = L_V((w_1)^\beta, \dots, (w_k)^\beta)$ .

EXEMPLO 12.— Consideremos o espaço  $\mathbb{R}_3[t]$  dos polinómios reais de grau  $\leq 3$ . Neste espaço consideremos a base ordenada

$$\beta = (1, 1+t, t^2, t^2+t^3).$$

1. Determinar  $(t+t^3)_\beta$ ;
2. Determinar  $(0, 1, -1, 1)^\beta$ ;

Para calcular  $(t+t^3)_\beta$ , ou seja, o vector de coordenadas de  $t+t^3$  na base  $B$ , temos que descobrir os coeficientes da combinação linear dos vectores de  $\beta$  que coincide com  $t+t^3$ , i.e.

$$(t+t^3)_\beta = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \Leftrightarrow t+t^3 = \xi_1 + \xi_2(1+t) + \xi_3t^2 + \xi_4(t^2+t^3).$$

A igualdade do lado direito do símbolo de equivalência ocorre sse

$$t+t^3 = (\xi_1 + \xi_2) + \xi_2t + (\xi_3 + \xi_4)t^2 + \xi_4t^3.$$

Recordando que dois polinómios são iguais sse os coeficientes correspondentes são iguais, a última igualdade verifica-se sse

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \xi_2 = 1 \\ \xi_3 + \xi_4 = 0 \\ \xi_4 = 1 \end{cases}$$

ou seja, se e só se  $\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1, \xi_4 = 1$ . Conclui-se então que  $(t+t^3)_\beta = (-1, 1, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ .

Quanto à segunda questão, por definição:

$$(0, 1, -1, 1)^\beta = 0 \cdot 1 + 1(1+t) + (-1)t^2 + 1(t^2+t^3)$$

ou seja,  $(0, 1, -1, 1)^\beta = 1+t+t^3$ .

EXEMPLO 13.— Se  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e  $\beta_c$  é a base canónica de  $\mathbb{K}^n$  então:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\beta_c} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n,$$

ou seja fixando a base canónica em  $\mathbb{K}^n$  o vector de coordenadas de um qualquer vector coincide com o próprio vector. Da mesma forma, se estiver fixa a base canónica em  $\mathbb{K}^n$  então:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\beta_c} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

EXEMPLO 14.— Consideremos o espaço  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Será que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in L_V \left( \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right)?$$

Tendo em conta as propriedades da função  $\phi_\beta$  e da sua inversa. Podemos responder a esta questão *colocando a mesma questão acerca das coordenadas dos objectos envolvidos (numa qualquer base de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ )*. As bases canónicas dos diferentes espaços são em geral as mais convenientes para este propósito, pois os vectores de coordenadas são fáceis de calcular. Se fixarmos em  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  a base canónica i.e., a base

$$\beta = (E^{(1,1)}, E^{(1,2)}, E^{(2,1)}, E^{(2,2)})$$

então, tem-se que

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}_\beta = (a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}).$$

O problema inicial, em termos de coordenadas na base  $\beta$  é então:

$$(1, 2, 3, 4) \in L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0)\})?$$

Ora, sabemos que a resposta a esta questão é positiva se e só se o sistema

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

é possível. Feita a eliminação de Gauss:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

ou seja a resposta é negativa, tanto para a questão envolvendo as coordenadas como para a questão que envolve os vectores originais.

Este último exemplo a importância dos vectores de coordenadas. Através desta noção qualquer espaço de dimensão finita é essencialmente uma versão de um  $\mathbb{K}^n$ . No entanto, os vectores de coordenadas são calculados relativamente a uma base e, por diversas razões certas bases são mais interessantes que outras.<sup>14</sup> Vamos agora descrever um esquema que nos permite de uma forma sistemática converter coordenadas numa base em coordenadas noutra.

Dadas duas bases ordenadas  $\beta = (e_1, \dots, e_n)$  e  $\bar{\beta} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$  de  $V$  a *matriz de mudança da base  $\bar{\beta}$  para a base  $\beta$* , que se denota  $[\beta, \bar{\beta}]$  é a matriz que satisfaz a seguinte condição:

$$[\beta, \bar{\beta}]_{*,i} = (\bar{e}_i)_\beta, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

ou seja a  $i$ -ésima coluna de  $[\beta, \bar{\beta}]$  é o vector de coordenadas do  $i$ -ésimo vector da base  $\bar{\beta}$  na base  $\beta$ .

LEMA 3.37.— *Sejam  $\beta$  e  $\bar{\beta}$  bases ordenadas de um espaço  $V$ . Se  $A$  é uma matriz tal que  $Ax_{\bar{\beta}} = x_\beta$ , para todo o  $x \in V$  então  $A = [\beta, \bar{\beta}]$ .*<sup>15</sup>

TEOREMA 3.38.— *Sejam  $\beta$  e  $\bar{\beta}$  duas bases ordenadas de  $V$ . Tem-se:*

$$(I) \quad x_\beta = [\beta, \bar{\beta}]x_{\bar{\beta}}, \text{ para qualquer } x \in V;$$

<sup>14</sup> Nem sempre as bases canónicas são as mais interessantes.

<sup>15</sup> Por outras palavras a matriz de mudança da base  $\bar{\beta}$  para a base  $\beta$  é univocamente determinada pela propriedade  $Ax_{\bar{\beta}} = x_\beta$ .

$$(2) [\bar{\beta}, \beta] = [\beta, \bar{\beta}]^{-1};$$

(3) se  $\bar{\beta}$  é uma terceira base ordenada de  $V$  então,

$$[\bar{\beta}, \bar{\beta}] = [\bar{\beta}, \beta][\beta, \bar{\beta}].$$

EXEMPLO 15.— Considerando as bases ordenadas

$$\beta = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)) \text{ e } \bar{\beta} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$$

de  $\mathbb{R}^3$ , podemos obter a matriz  $[\beta, \bar{\beta}]$  de duas formas. Primeiro, recorrendo à definição: esta matriz tem nas suas colunas os vectores de coordenadas  $(1, 0, 0)_\beta$ ,  $(1, 1, 0)_\beta$  e  $(1, 1, 1)_\beta$ .

Ora o problema de determinar as coordenadas de um vector  $(x, y, z)$  em  $\beta$  é simples e equivale a resolver o sistema (digamos que nas variáveis  $\alpha, \beta, \gamma$ ):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & x \\ 1 & 0 & 1 & | & y \\ 1 & 1 & 0 & | & z \end{bmatrix}$$

Resolvido o sistema, a solução geral é da forma:

$$\left( \frac{z+y-x}{2}, \frac{z-y+x}{2}, \frac{x+y-z}{2} \right)$$

ou seja,

$$(x, y, z) = \frac{z+y-x}{2}(0, 1, 1) + \frac{z-y+x}{2}(1, 0, 1) + \frac{x+y-z}{2}(1, 1, 0),$$

pelo que:

$$(x, y, z)_\beta = \left( \frac{z+y-x}{2}, \frac{z-y+x}{2}, \frac{x+y-z}{2} \right).$$

Usando este facto concluímos que:

$$(1, 0, 0)_\beta = (-1/2, 1/2, 1/2),$$

$$(1, 1, 0)_\beta = (0, 0, 1);$$

$$(1, 1, 1)_\beta = (1/2, 1/2, 1/2).$$

Ou seja,

$$[\beta, \bar{\beta}] = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Podemos contornar a definição de matriz de mudança de base, explorando as propriedades algébricas deste tipo de matrizes e o facto de as matrizes de mudança de uma base para a base canónica se poderem escrever directamente.<sup>16</sup> Denotando a base canónica de  $\mathbb{R}^3$  por  $\beta_c$  tem-se então que:

$$[\beta_c, \beta] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [\beta_c, \bar{\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se então que:

$$[\beta, \bar{\beta}] = [\beta, \beta_c][\beta_c, \bar{\beta}] = [\beta_c, \beta]^{-1}[\beta_c, \bar{\beta}]$$

ou seja,

$$[\beta, \bar{\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<sup>16</sup> Recorde-se que o vector de coordenadas na base canónica de um vector de  $\mathbb{K}^n$  coincide com o próprio vector.

# Exercícios

PROBLEMA 3.1.— Considere os vectores  $v_1 = (2, 1, 0, 3)$ ,  $v_2 = (3, -1, 5, 2)$  e  $v_3 = (-1, 0, 2, 1)$ . Quais dos vectores seguintes pertencem a  $L_V(\{v_1, v_2, v_3\})$ ? © ESD

a)  $(2, 3, -7, 3)$ ;   b)  $(0, 0, 0, 0)$ ;   c)  $(1, 1, 1, -1)$ ;   d)  $(-4, 6, -13, 4)$ .

PROBLEMA 3.2.— Quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de adição vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de  $\mathbb{R}^3$ ? © ESD

- (a) O conjunto de vectores da forma  $(a, 0, 0)$  com  $a$  real.
- (b) O conjunto de vectores da forma  $(a, 1, 1)$  com  $a$  real.
- (c) O conjunto de vectores da forma  $(a, b, c)$  com  $b = a + c$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- (d) O conjunto de vectores da forma  $(a, b, c)$  com  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .
- (e) O conjunto de vectores da forma  $(a, b, c)$  com  $b = a + c + 1$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ .

PROBLEMA 3.3.— Para cada uma das matrizes, determine dois conjuntos geradores distintos para: (i) o núcleo (ou espaço nulo); (ii) o espaço das colunas; (iii) o espaço das linhas. © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 3.4.— Sempre que  $b$  pertencer ao espaço das colunas de  $A$  escreva-o como combinação linear dessas colunas. © ESD

- a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ;
- b)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ;
- c)  $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

PROBLEMA 3.5.— Seja  $A$  uma matriz real  $4 \times 4$  e  $b$  um vetor de  $\mathbb{R}^4$  para o qual o sistema  $Ax = b$  tem solução única. Explique por que razão as colunas de  $A$  geram  $\mathbb{R}^4$ . © ESD

PROBLEMA 3.6.— Indique quais dos seguintes conjuntos  $W$  são subespaços lineares de  $\mathbb{R}^3$ ? © ESD

- (a)  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 10\}$ .
- (b)  $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\})$ .
- (c)  $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 0, 1)\}) \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$ .
- (d)  $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, -1, 0)\}) \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\}$ .
- (e)  $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 1, 1)\}) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ .
- (f)  $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 1, 1)\}) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1\}$ .

PROBLEMA 3.7.— Seja  $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$  e  $A^T$  a sua transposta. Suponha que: © AL

- I O núcleo de  $A^T$  tem dimensão 3,
- II Existe um vetor  $v$  em  $\mathbb{R}^p$  formando uma base do espaço das linhas da matriz transposta  $A^T$ ,
- III O núcleo de  $A$  tem dimensão 4.

Então os valores de  $p$  e  $q$  são:

- A)  $p = 5, q = 5$ ;      B)  $p = 5, q = 4$ ;      C)  $p = 4, q = 5$ .

PROBLEMA 3.8.— Considere o subespaço linear de  $\mathbb{R}^3$  definido por: © ESD

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}.$$

- (a) Determine uma base ordenada  $B$  de  $W$ , e indique a dimensão de  $W$ .
- (b) Verifique que o vetor  $v = (1, 2, 1)$  pertence a  $W$ , e determine o vetor de coordenadas de  $v$  na base  $B$ .

PROBLEMA 3.9.— Seja  $W$  o subespaço linear de  $\mathbb{R}^4$  definido por: © ESD

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z - w = 0 \wedge -x + z = 0\}.$$

- (a) Determine uma base ordenada  $B$  para o subespaço  $W$ , e indique a dimensão de  $W$ .
- (b) Verifique que o vetor  $v = (1, 2, 1, 1)$  pertence a  $W$ , e determine o vetor  $v_B$  (o vetor de coordenadas de  $v$  na base  $B$ ).

PROBLEMA 3.IO.— Sejam  $v_1, v_2, v_3, v_4$  e  $v_5$  vectores não nulos de um espaço linear  $V$  e  $W = L_V(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\})$  o subespaço por eles gerado. Admitindo que: © AL

- (a)  $v_2 \notin L_V(\{v_1\})$ ,
- (b)  $2v_1 - 3v_2 + 2v_3 = \mathbf{0}$ ,
- (c)  $v_4 \notin L_V(\{v_1, v_2, v_3\})$ ,
- (d)  $v_5 \notin L_V(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ ,

qual a dimensão de  $W$ ?

- A) 3;      B) 4;      C) 5;      D) 2.

PROBLEMA 3.II.— Seja  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  uma base de um espaço linear  $W$ . Mostre que  $\{u_1, u_2, u_3\}$ , com  $u_1 = v_1$ ,  $u_2 = v_1 + v_2$  e  $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ , também é uma base de  $W$ . © ESD

PROBLEMA 3.I2.— Considere a base ordenada  $B = (u, v, w)$  de um espaço linear  $V$  e  $x_B = (6, 2, 1)$ . Determine  $x_{B_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) onde: © ESD

- (a)  $B_1 = (u + v, u - v, w)$ .
- (b)  $B_2 = (u + v + w, v, v - w)$ .
- (c)  $B_3 = (2u, v + w, v - w)$ .

PROBLEMA 3.I3.— Seja  $A$  uma matriz  $3 \times 4$  cujo núcleo admite uma base formada pelo vector  $(2, 0, 0, 6)$ . Considere a seguinte lista de afirmações: © AL

- I  $\dim(\text{EL}(A)) = 3$ ;
- II  $\dim(\text{Nuc}(A)) = 1$ ;
- III  $\dim(\text{Nuc}(A^T)) = 2$ ;
- IV  $\dim(\text{EC}(A^T)) = 2$ .

Indique todas as conclusões que pode inferir.

- A) I, III e IV;      B) I e II;      C) II e IV;      D) I e III.

PROBLEMA 3.I4.— Sejam  $S$  e  $U$  os subespaços de  $\mathbb{R}^3$  definidos como se segue: © AL

$$S = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 2, 3), (-3, 7, 1), (19, 10, -13)\})$$

$$U = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, -11, -7), (4, -5, 2)\}).$$

Designando por  $a, b$  as dimensões de  $S \cap U$  e  $S + U$ , respectivamente, indique qual o valor do par  $(a, b)$ :

- A) (1, 3);      B) (1, 4);      C) (2, 2);      D) (2, 3).

PROBLEMA 3.I5.— Considere o subespaço  $S$  de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  formado por todas as matrizes que são triangulares superiores e que têm traço nulo (o traço de uma matriz quadrada  $A$ , que se denota  $\text{tr}(A)$  é a soma dos elementos da diagonal principal de  $A$ ). Qual a dimensão de  $S$ ? © AL

- A) 3;      B) 4;      C) 5;      D) 6.



PROBLEMA 3.16.— Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

e considere as seguintes afirmações:

- I As linhas de  $A$  formam um conjunto linearmente independente;
- II As colunas de  $A$  formam um conjunto linearmente independente;
- III A característica de  $A$  é igual a 3;
- IV O sistema de equações lineares  $Au = b$  tem uma única solução, qualquer que seja  $b \in \mathbb{R}$ .

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

- A) I e II;      B) I, II e III;      C) III;      D) Todas.

PROBLEMA 3.17.— Determine uma base e equações cartesianas que descrevam o subespaço  $S = L_{\mathbb{R}^4}(X) \subset \mathbb{R}^4$ , onde

$$X = \{(1, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, -2, 2, -1), (-2, 10, -10, 8), (-1, 8, -8, 7)\}.$$

PROBLEMA 3.18.— Seja  $B$  uma base ordenada e  $x_\beta$  o vector das coordenadas de  $x$  na base ordenada  $\beta$ . Determine em cada alínea o vector  $x$ .

- (a)  $\beta = ((5, -1), (1, -1))$  e  $x_\beta = (3, -1)$ ;
- (b)  $\beta = ((1, -1, 4), (0, 1, 2), (1, 2, 0))$  e  $x_\beta = (3, -1, 1)$ .

PROBLEMA 3.19.— Considere os seguintes vectores de  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (1, 2, 2).$$

Qual dos vectores a seguir indicados não pertence ao subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado por  $\{v_1, v_2, v_3\}$ ?

- A)  $(0, 0, 0)$ ;      B)  $(0, 0, 1)$ ;      C)  $(1, 1, 5)$ ;      D)  $(0, 1, 0)$ .

PROBLEMA 3.20.— Determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços lineares gerados pelos conjuntos seguintes.

- (a)  $\{(1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 3, 4)\}$ .
- (b)  $\{(-1, 1, 1, 2), (1, 1, 0, 1), (-2, 0, 1, 1), (3, 1, -1, 0)\}$ .

PROBLEMA 3.21.— Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira para

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

- (a)  $V$  não é subespaço linear de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b)  $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$  é uma base de  $V$ .
- (c)  $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 3, 1)\}$  é uma base de  $V$ .
- (d)  $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$  é uma base de  $V$ .

PROBLEMA 3.22.— Seja  $A$  uma matriz tal que  $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 1)\}$  é uma base do núcleo  $\text{Nuc}(A)$  da matriz  $A$ . Considere as afirmações seguintes: © ESD

- (a) O vetor  $x = (-5, -2, 3, -2)$  é solução do sistema  $Ax = 0$ ;
- (b) A dimensão do espaço das colunas  $\text{EC}(A)$  da matriz  $A$  é 2;
- (c) A matriz  $A$  tem 4 colunas;
- (d)  $\text{Nuc}(A) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2z = y \wedge z = w\}$ .

A lista completa das afirmações correctas é:

- A) (a), (b) e (c)      B) (b), (c) e (d)      C) (b) e (d)      D) (b) e (c)

PROBLEMA 3.23.— Seja  $A$  uma matriz  $4 \times 4$ . Responda às questões seguintes. © ESD

- (a) Se o espaço das colunas de  $A$  não é  $\mathbb{R}^4$  que pode dizer a respeito do núcleo de  $A$ ?
- (b) Se o núcleo de  $A$  não é o subespaço  $\{0\}$  que pode dizer a respeito do espaço das colunas de  $A$ ?
- (c) Se o espaço das colunas de  $A$  é  $\mathbb{R}^4$  que pode dizer a respeito das soluções do sistema  $Ax = b$  para  $b \in \mathbb{R}^4$ ?
- (d) Se o núcleo de  $A$  é  $\{0\}$  que pode dizer a respeito das soluções do sistema  $Ax = b$  para  $b \in \mathbb{R}^4$ ?

PROBLEMA 3.24.— Dê exemplos, se existirem, de: © ESD

- (a) uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  tal que  $\dim \text{EL}(A) = 2$ ;
- (b) uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  tal que  $\dim \text{Nuc}(A) = 2$ ;
- (c) três vetores distintos de  $\mathbb{R}^4$  que gerem um subespaço de dimensão 2.

PROBLEMA 3.25.— Seja  $x = (1, 3, 2)$  uma solução (particular) do sistema não homogéneo  $Ax = b$ . Sabendo que a solução geral do sistema homogéneo associado ( $Ax = 0$ ) é  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 4z\}$ , indique a forma vectorial da solução geral de  $Ax = b$ . © ESD

PROBLEMA 3.26.— Exprima a matriz  $X$  como combinação linear das matrizes  $R, S, T$  onde: © ESD

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 3.27.— Exprima o polinómio  $p(x) = -5 + 19x - 8x^2$  como combinação linear dos polinómios © ESD

$$p_1(x) = 3x - x^2, \quad p_2(x) = 2 + 4x - x^2, \quad p_3(x) = 1 - x + 3x^2.$$

PROBLEMA 3.28.— Seja  $\mathbb{R}_2[t]$  o espaço real dos polinómios definidos em  $\mathbb{R}$  de grau menor ou igual a 2, considere os elementos de  $\mathbb{R}_2[t]$  definidos por: © AL

$$p_1(t) = 1, p_2(t) = (1-t)(1+t), p_3(t) = (1-t)(1+2t), p_4(t) = t(1-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}_2[t]$ :

$$P_1 = \{p_1, p_2\}, P_2 = \{p_1, p_2, p_3\}, P_3 = \{p_2, p_3, p_4\}, P_4 = \{p_1, p_2, p_4\}.$$

Qual a lista completa de conjuntos que constituem bases de  $\mathbb{R}_2[t]$ ?

- A)  $P_1$  e  $P_2$ ;      B)  $P_2$  e  $P_3$ ;      C)  $P_2$  e  $P_4$ ;      D)  $P_3$  e  $P_4$ .

PROBLEMA 3.29.— Seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  gerado pelas matrizes  $R, S, T$  onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

- I.  $S$  tem dimensão 2,
- II.  $S$  tem dimensão 3,
- III.  $A \in S$ ,
- IV.  $A \notin S$ .

Quais as verdadeiras?

- A) I e III;      B) I e IV;      C) II e III;      D) II e IV.

PROBLEMA 3.30.— Seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  gerado pelos vectores  $v_1 = (1, 0, -1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0, -1)$ ,  $v_3 = (1, 0, -2, -1)$  e  $v_4 = (0, 1, 1, 0)$ . Qual das seguintes afirmações é verdadeira? © AL

- A)  $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z - w = 0\}$ ,
- B)  $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - w = 0\}$ ,
- C)  $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - w = 0\}$ ,
- D)  $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - w = 0\}$ .

PROBLEMA 3.31.— Seja  $\mathbb{R}_2[t]$  o espaço dos polinómios reais de variável real com grau menor ou igual a 2, munido com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real. © ESD

- (a) Indique uma base ordenada de  $\mathbb{R}_2[t]$  e calcule o vector das coordenadas de  $p(t) = (1-t)(1+t)$  nessa base.
- (b) Considere o subespaço  $S = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1-2t, 1+t^2, 1+2t-3t^2, t^2\})$ . Verifique que  $\{1-2t, 1+t^2, 1+2t-3t^2, t^2\}$  não é uma base de  $S$ , e indique uma base ordenada de  $S$ .
- (c) Determine as coordenadas do polinómio  $p(t) = 5 + t^2$  nas bases das alíneas (a) e (b).
- (d) Considere o conjunto  $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(0) = 0\}$ . Mostre que  $W$  é um subespaço linear de  $\mathbb{R}_2[t]$  e indique a dimensão deste subespaço.

PROBLEMA 3.32.— Determine quais dos conjuntos seguintes são espaços lineares reais, e nesses casos indique a dimensão e encontre uma base. © ESD

- (a) O subconjunto do espaço linear  $\mathbb{R}_5[t]$ , dos polinómios de variável real com grau menor ou igual a 5, formado pelos polinómios:

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad \text{com } a_0 + a_1 = 0.$$

- (b) O subconjunto do espaço  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  das matrizes reais quadradas de ordem 2 formado pelas matrizes invertíveis.

(c)  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}.$

- (d)  $L_V(\{\cos^2 t, \cos 2t, \sin^2 t\})$ , onde  $V$  é o espaço linear das funções contínuas reais de variável real.

PROBLEMA 3.33.— Considere os subespaços  $U$  e  $W$  seguintes e determine a dimensão e uma base para  $U \cap W$  e  $U + W$ . Além disso, verifique em cada caso o teorema da dimensão ( $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ ) e diga se os subespaços  $U$  e  $W$  decompõem  $\mathbb{R}^4$  em soma directa. © ESD

- (a)  $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, 2, 0)\})$  e

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 2z - w = 0 \wedge -y + 3w = 0 \wedge z = 0\}.$$

- (b)  $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 0)\})$  e

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y - 2w = 0 \wedge 2y - z = 0\}.$$

- (c)  $U = L : \mathbb{R}^4(\{(0, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, -2)\})$  e

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z - w = 0 \wedge x - w = 0\}.$$

PROBLEMA 3.34.— Encontre a matriz mudança de base, da base canónica de  $\mathbb{R}^2$  para a base ordenada  $\beta = ((2, -2), (3, 4))$ , e determine o vector das coordenadas de  $w = (2, 2)$  na base  $\beta$ . © ESD

PROBLEMA 3.35.— Seja  $\beta = (u_1, u_2, u_3)$  uma base ordenada de  $\mathbb{R}^3$ , tendo-se que  $u_1 = (2, 1, 0)$ ,  $u_2 = (-1, 1, 1)$ , e  $u_3 = (1, 1, 1)$ . © ESD

- (a) Determine a matriz de mudança de base, da base canónica de  $\mathbb{R}^3$  para a base  $\beta$ .
- (b) Use a matriz calculada na alínea anterior, para determinar o vector de coordenadas de  $v = (5, 1, 3)$  na base  $\beta$ .

PROBLEMA 3.36.— Seja  $v = (1, 2, 3)$  e considere  $B = (v_1, v_2, v_3)$  a base ordenada de  $\mathbb{R}^3$ , onde  $v_1 = (1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$  e  $v_3 = (1, 1, 1)$ , Qual dos seguintes é o vector de coordenadas de  $v$  na base  $B$ ? © AL

- A)  $(3, -2, 4)$ ;      B)  $(-1, 4, 4)$ ;      C)  $(-1, -2, 4)$ ;      D)  $(-1, -2, 6)$ .

PROBLEMA 3.37.— Seja  $S$  o subespaço de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  gerado pela matrizes:

© AL

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quais das matrizes seguintes *não* pertencem a  $S$ ?

A)  $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , B)  $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ , C)  $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , D)  $M_4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

PROBLEMA 3.38.— Determine a matriz de mudança de base  $[\beta', \beta]$ , onde os vetores das bases ordenadas  $\beta = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\beta' = (v_1, v_2, v_3)$  satisfazem:

© ESD

$$v_1 = u_1 + u_2 - u_3$$

$$v_2 = u_1 - u_2$$

$$v_3 = u_1 - u_3.$$

PROBLEMA 3.39.— Seja  $\mathbb{R}_2[t]$  o espaço linear dos polinômios reais de variável real de grau menor ou igual a 2. Encontre a matriz de mudança da base canônica de  $\mathbb{R}_2[t]$  para a base ordenada  $\beta = (1 - t, t^2, 1 + t + t^2)$  de  $\mathbb{R}_2[t]$ , e determine o vetor das coordenadas de  $w = 2 - 3t + t^2$  na base  $\beta$ .

© ESD

PROBLEMA 3.40.— Considere o espaço linear  $W$  e bases ordenadas  $\beta_1 = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\beta_2 = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\beta_3 = (w_1, w_2, w_3)$  tais que:

© ESD

$$u_1 = v_1 - v_2 + v_3 \quad w_1 = v_1 + v_2 - v_3$$

$$u_2 = v_2 - v_3 \quad e \quad w_2 = v_2 + v_3$$

$$u_3 = v_1 + v_2 \quad w_3 = v_1 + v_3$$

- (a) Determine as matrizes de mudança de base  $[\beta_2, \beta_1]$ ,  $[\beta_3, \beta_2]$  e  $[\beta_3, \beta_1]$ .  
 (b) Seja  $v = 2u_1 + 5u_2 - 3u_3$ . Use as matrizes calculadas nas alíneas anteriores para determinar  $v_{\beta_1}$ ,  $v_{\beta_2}$  e  $v_{\beta_3}$ .

## EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

PROBLEMA 3.41.— Sejam  $U, W$  subespaços de  $V$ . Mostre que  $U \cup W$  é um subespaço de  $V$  se e só se  $U \subset W$  ou  $W \subset U$ .

PROBLEMA 3.42.— Seja  $V = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$  o espaço linear das sucessões reais. Mostre que o conjunto das sucessões convergentes é um subespaço de  $V$ . E o conjunto das sucessões divergentes?

PROBLEMA 3.43.— Considere os subespaços  $W_1, W_2$  de  $\mathbb{K}^n$  definidos por:

$$W_1 = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_n = 0\}, \quad W_2 = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 = \dots = a_{n-1} = 0\}.$$

Mostre que  $\mathbb{K}^n = W_1 \oplus W_2$ .

PROBLEMA 3.44.— Considere os espaço  $\mathbb{K}^{n \times n}$

- (a) Mostre que  $W_1 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A^T = -A\}$  é um subespaço de  $\mathbb{K}^{n \times n}$ .  
 (b) Seja  $W_2$  o subespaço de  $\mathbb{K}^{n \times n}$  constituído pelas matrizes simétricas i.e., as matrizes  $A$  que satisfazem  $A^T = A$ . Mostre que  $\mathbb{K}^{n \times n} = W_1 \oplus W_2$ .

PROBLEMA 3.45.— Sejam  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$  e  $W$  um subespaço de  $V$ . Dado  $v \in V$  definimos  $v + W := \{v + w \mid w \in W\}$ .

- (a) Prove que  $v + W$  é um subespaço de  $V$  sse  $v \in W$ .
- (b) Mostre que  $v_1 + W = v_2 + W$  sse  $(v_1 - v_2) \in W$ .
- (c) Considere  $V/W = \{v + W \mid v \in V\}$  e as operações:

$$\begin{aligned}(v_1 + W) + (v_2 + W) &= (v_1 + v_2) + W \\ \alpha(v_1 + W) &= (\alpha v_1) + W\end{aligned}$$

Mostre que estas operações estão bem definidas, ou seja, verifique que se  $v_1 + W = w_1 + W$  e  $v_2 + W = w_2 + W$  então tem-se que

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) = (w_1 + W) + (w_2 + W)$$

e, além disso, verifique que se  $v_1 + W = w_1 + W$  então

$$\alpha(v_1 + W) = \alpha(w_1 + W).$$

- (d) Mostre que  $V/W$  com as operações descritas na alínea anterior é um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ . (Designa-se de *espaço quociente* de  $V$  por  $W$ .)

PROBLEMA 3.46.— Sejam  $V$  um espaço linear e  $W_1, W_2$  subespaços de  $V$ . Mostre que  $L_V(S_1 \cap S_2) \subset L_V(S_1) \cap L_V(S_2)$ . Dê exemplos em que se tenha a igualdade e exemplos de que a inclusão pode ser estrita.

PROBLEMA 3.47.— Seja  $V$  um espaço linear sobre  $\mathbb{K}$ .

- (1) Mostre que  $\{u, v\}$  é linearmente independente sse  $\{u+v, u-v\}$  é linearmente independente.
- (2) Mostre que  $\{u, v, w\}$  é linearmente independente sse  $\{u+v, u+w, v+w\}$  é linearmente independente.

PROBLEMA 3.48.— Seja  $\mathbb{R}[t]$  o espaço dos polinómios com coeficientes reais. Seja  $S \subset \mathbb{R}[t]$  uma família finita de polinómios todos com graus diferentes. Mostre que  $S$  é linearmente independente.

PROBLEMA 3.49.— Considere o espaço  ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$  das funções reais de variável real. Seja  $S = \{e^{\alpha t}, e^{\beta t}\}$  onde  $\alpha \neq \beta$ . Mostre que  $S$  é linearmente independente.

PROBLEMA 3.50.— Seja  $W \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  o subespaço constituído pelas matrizes  $A$  tais que  $\text{tr}(A) = 0$ .

- (a) Determine uma base de  $W$
- (b) Qual a dimensão de  $W$ .

PROBLEMA 3.51.— Sejam  $V$  um espaço linear tal que  $\dim(V) = n$  e  $S \subset V$  um conjunto que gera  $V$ . Mostre que existe  $S' \subset S$  que é uma base de  $V$ .

PROBLEMA 3.52.— Sejam  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Prove que  $W_1, W_2$  são subespaços de  $V$  e determine  $\dim(W_1), \dim(W_2), \dim(W_1 + W_2)$  e  $\dim(W_1 \cap W_2)$ .

PROBLEMA 3.53.— Sejam  $W_1, W_2$  subespaços de  $V$  com bases  $B_1$  e  $B_2$  tais que  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . Mostre que  $B_1 \cup B_2$  é uma base de  $W_1 + W_2$ .

PROBLEMA 3.54.— Sejam  $V$  um espaço linear e  $U$  um subespaço de  $V$ . Mostre que existem  $W, \bar{W}$ , subespaços de  $V$ , tais que  $W \neq \bar{W}$  e

$$V = U \oplus W = U \oplus \bar{W}.$$

PROBLEMA 3.55.— Considere o exercício e a respectiva notação. Mostre que  $\dim(V/W) + \dim(W) = \dim(V)$ . (*Sugestão:* estenda uma base de  $W$  para obter uma base de  $V$ , descrevendo a partir daí uma base de  $V/W$ .)

# Apêndices

## 3.A DEMONSTRAÇÕES DOS RESULTADOS

DEMONSTRAÇÃO (DO LEMA 3.2).—

1. Tem-se que  $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$ . Adicionando  $-(0x)$  a ambos os membros da igualdade anterior obtém-se imediatamente que  $0 = 0x$ .

2. Tem-se que  $(x) + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = 0$ . Ora, como  $-x$  é único para a propriedade  $y + x = 0$ , concluímos que  $(-1)x = -x$ .

3. Consideremos  $x \neq 0$  e  $\alpha x = \beta x$  com  $\alpha \neq \beta$ . Ten-se então:

$$\alpha x = \beta x \Leftrightarrow \alpha x - \beta x = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)x = 0.$$

Como estamos a supor que  $\alpha \neq \beta$  temos  $\alpha - \beta \neq 0$  e podemos considerar  $(\alpha - \beta)^{-1}$ . Multiplicando a igualdade acima por este valor concluímos:

$$(\alpha - \beta)^{-1}(\alpha - \beta)x = 0,$$

ou seja  $x = 0$ , o que contradiz a suposição original. Temos então que ter  $\alpha = \beta$ .

4. Temos que

$$\alpha x = \alpha y \Leftrightarrow \alpha x - \alpha y = 0 \Leftrightarrow \alpha(x - y) = 0.$$

Como  $\alpha \neq 0$  podemos multiplicar ambos os membros da última igualdade por  $\alpha^{-1}$  obtemos  $x - y = 0$  ou seja  $x = y$ .  $\square$

DEMONSTRAÇÃO (DO TEOREMA 3.4).— Temos que verificar que nestas condições todos os axiomas de espaço linear são verdadeiros em  $U$  com as restrições das operações em  $V$ . Um dos axiomas que temos que estabelecer é a comutatividade da adição de vectores. A propriedade em causa estabelece que quaisquer que sejam  $x$  e  $y$  se tem  $x + y = y + x$ . A expressão *quaisquer que sejam* corresponde ao uso de quantificadores universais e, uma asserção que envolve apenas este tipo de quantificador diz-se *universal*. A asserção da comutatividade é assim uma asserção universal. Por que é que ela é verdadeira em  $U$ . Pela simples razão que dados  $x, y \in U$  eles se somam em  $U$  da mesma forma que se somam em  $V$ , e como a adição comuta para quaisquer vectores em  $V$  ela comuta também para quaisquer vectores em  $U$ .

O argumento anterior pode usar-se para qualquer para qualquer outra asserção universal (dados que, insistimos, as operações em  $U$  produzem os mesmos resultados que em  $V$ ).

Analisando os axiomas de espaço linear constatamos que, com poucas excepções, elas são asserções universais. As únicas que não são deste tipo são, a existência de simétrico, e a existência do vector nulo. Mas, tendo em conta que  $U \neq \emptyset$  é fechado para as operações tem-se que  $0x = 0 \in U$  e  $(-1)x = -x \in U$  (onde  $x$  é um qualquer elemento de  $U$ ). A condição é assim suficiente.



A condição também é necessária porque num espaço linear o resultado de qualquer operação envolvendo vectores tem que ser um elemento desse espaço (por definição).  $\square$

DEMONSTRAÇÃO (DO TEOREMA 3.5).— O vector nulo pode sempre ser escrito como uma combinação linear de quaisquer vectores, usando os coeficientes todos nulos. Tem-se assim que  $0 \in L_V(X)$ , pelo que  $L_V(X) \neq \emptyset$ .<sup>17</sup> Suponhamos agora que  $x_1, x_2 \in L_V(X)$ . Neste caso podemos considerar vectores  $x_{1,1}, \dots, x_{1,r}, x_{2,1}, \dots, x_{2,s} \in X$  tais que

$$x_1 = \sum_{i=1}^r \xi_i x_{1,i}, \quad x_2 = \sum_{i=1}^s \zeta_i x_{2,i}.$$

Sendo assim tem-se que:

$$x_1 + x_2 = \sum_{j=1}^{r+s} \alpha_j w_j,$$

onde, para  $1 \leq i \leq r$  se tem  $\alpha_i = \xi_i$  e  $w_i = x_{1,i}$  e para  $1 \leq i \leq s$  se tem  $\alpha_{r+i} = \zeta_i$  e  $w_{r+i} = x_{2,i}$ . Concluímos assim que  $x_1 + x_2$  é uma combinação linear de elementos de  $X$  ou seja,  $x_1 + x_2 \in L_V(X)$ .

Consideremos agora  $x \in L_V(X)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Como anteriormente, podemos considerar  $x_1, \dots, x_r \in X$  e escalares  $\xi_1, \dots, \xi_r$  tais que

$$x = \sum_{i=1}^r \xi_i x_i.$$

Neste caso,

$$\alpha x = \alpha \left( \sum_{i=1}^r \xi_i x_i \right) = \sum_{i=1}^r (\alpha \xi_i) x_i \in L_V(X).$$

Concluímos assim que  $L_V(X)$  é um subespaço de  $V$ .  $\square$

DEMONSTRAÇÃO (DO LEMA ??).— Tem-se que  $A0 = 0$  assim  $0 \in \text{Nuc}(A)$ . Por outro lado, se  $u, v \in \text{Nuc}(A)$  então,  $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av = 0 + 0 = 0$ , pelo que  $\alpha u + \beta v \in \text{Nuc}(A)$ . Desta forma  $\text{Nuc}(A)$  é fechado para combinações lineares. Conclui-se que é um subespaço de  $\mathbb{K}^n$ .  $\square$

### 3.B RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.1).— Podemos caracterizar genericamente os vectores que pertencem àquela expansão linear que são precisamente os  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$  para os quais o sistema

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 2 & 0 & 5 & z \\ 1 & 3 & 2 & w \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 15 & 2x - 4y + z \\ 0 & 0 & 0 & -x - ty - 2z + 3w \end{array} \right]$$

Basta agora verificar quais os vectores que satisfazem a condição:

$$-x - ty - 2z + 3w = 0.$$

<sup>17</sup> Uma das condições para verificar que  $U$  é subespaço de  $V$  é verificar que  $U \neq \emptyset$ . Uma boa forma de proceder a este teste é verificar que  $0 \in U$ . Com efeito se  $0 \in U$  conclui-se imediatamente que  $U \neq \emptyset$  e, se  $0 \notin U$  então podemos imediatamente concluir que  $U$  não é subespaço já que o vector nulo tem que pertencer a qualquer subespaço.

Observe-se entretanto que podemos concluir que  $(0, 0, 0, 0)$  pertence à extensão porque ela é um subespaço, neste caso de  $\mathbb{R}^4$ , e o vector nulo pertence a qualquer subespaço.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.2).— (a) Tem-se  $\{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 0, 0)\})$  dado que  $(a, 0, 0) = a(1, 0, 0)$ . Ora uma expansão linear é sempre um subespaço.

(b) O vector nulo não pertence ao conjunto dado logo ele não pode ser um subespaço.

(c) Tem-se que:

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + c = b\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + c - b = 0\}.$$

Este conjunto é o conjunto de soluções de um sistema, neste caso um sistema com a única equação  $a + c - b = 0$ , ou seja é o núcleo da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Como se sabe, o núcleo de qualquer matriz é sempre um subespaço de  $\mathbb{K}^n$  onde  $n$  é o número de colunas da matriz.

(d) Não é um subespaço porque embora seja fechado para a soma de vectores (a soma de inteiros continua a ser um inteiro) e contenha o vector nulo, o conjunto não é fechado para a multiplicação por escalar. Observe-se que os escalares que podemos considerar são todos os números reais, uma vez que o *espaço ambiente*,  $\mathbb{R}^3$ , é um espaço linear real. Assim, por exemplo,  $(1, 0)$  é um vector do conjunto dado mas  $\sqrt{2}(1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$  não é um elemento do conjunto dado.

(e) Não é um subespaço porque mais uma vez o vector nulo não pertence ao conjunto.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.3).— Consideramos a título de exemplo a matriz  $B$  (os outros casos são análogos). Por definição,  $EL(B)$  é o espaço gerado pelas linhas de  $B$ , e por isso, um conjunto gerador é

$$\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, -3)\}.$$

Para obtermos um segundo conjunto gerador observamos o seguinte: *quando aplicamos uma das operações elementares sobre linhas de uma matriz, o espaço das linhas não se modifica*. Transpondo esta informação para conjuntos geradores de espaços isso significa que:

1. se num conjunto gerador substituirmos um vector  $v$ , por um dos seus múltiplos  $\alpha v$ , com  $\alpha \neq 0$  então o novo conjunto gera o mesmo espaço.
2. se  $u, v$  são dois vectores distintos num conjunto gerador e substituirmos  $v$  por  $\alpha u + v$  ( $\alpha$  qualquer) então, o novo conjunto gera o mesmo espaço.

Assim, um segundo conjunto gerador, pode obter-se, entre outras possibilidades, multiplicando o primeiro vector por  $-1$ :

$$\{(0, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, -3)\}.$$

Par o espaço das colunas a situação é análoga. O espaço das colunas é, como o nome indica gerado pelas colunas:

$$\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, -3)\}.$$

Podemos agora modificar este conjunto gerador de acordo com as considerações acima. Fazendo isso e tendo em conta que o vector nulo pode sempre ser removido sem qualquer prejuízo de um conjunto gerador, obtemos um segundo conjunto gerador para  $EC(B)$ , designadamente:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

obtido suprimindo  $(0, 0, 0)$  e substituindo  $(0, 2, 0)$  por  $(1/2)(0, 2, 0)$  e  $0, 0, -3)$  por  $(-1/3)(0, 0, -3)$ .  $\square$

**SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.4).**— A resolução do exercício depende apenas da seguinte observação: nos espaços  $V = \mathbb{K}^n$  saber se um vector  $b$  pertence ou não a  $L_V(\{u_1, \dots, u_k\})$  pode sempre reduzir-se a saber se  $b$  pertence ou não ao espaço das colunas da matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times k}$  cujas colunas são os vectores  $u_1, \dots, u_k$ . Sabe-se, além disso, que a resposta à questão é positiva sse o sistema  $Ax = b$  é possível e, neste caso, qualquer solução do sistema fornece os coeficientes para uma combinação linear da  $u_1, \dots, u_k$  que coincide com  $b$ .

Feitas estas considerações prévias, resolvemos apenas as alíneas b) e c).

b)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

sendo o sistema impossível, ou seja o vector dado não pertence ao espaço das colunas de  $B$ .

c)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{array} \right]$$

Desta vez o sistema é possível tem-se portanto que  $b$  pertence ao espaço das colunas de  $C$  e, além disso, como a solução do sistema é  $(1/5, 0, 2/5)$  tem-se que

$$b = \frac{1}{5}(1, 0, -1) + 0(-1, 1, 2) + \frac{2}{5}(2, 0, 3).$$

**SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.5).**— Ao resolver o sistema  $[A|b]$  obtém-se  $[A^*|b^*]$  em escada de linhas. Se o sistema é determinado, isso significa que  $A^*$  tem quatro pivôs. Assim  $\text{car}(A) = \text{car}(A^*) = 4$ .

Como se tem  $\text{car}(A) = \dim(EC(A)) = \dim(EL(A))$  concluímos que as colunas de  $A$  são linearmente independentes. Mas  $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$  e quatro vectores linearmente independentes num espaço de dimensão 4 geram esse espaço.  $\square$

**SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.6).**— (a) Não é porque o vector nulo não pertence ao conjunto.

(b) É. Uma expansão linear é sempre um subespaço.

(c) Recorde-se que *uma união de subespaços é um subespaço sse um dos espaços está contido no outro (caso em que a união é o maior dos dois)*. Além disso, *se um conjunto de vectores estão contido num subespaço, a respectiva expansão linear também está*

contida nesse subespaço. Neste caso tem-se:

$$(1, 0, 1) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$$

logo,  $L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 0, 1)\}) \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$  pelo que a união em causa é um subespaço, neste caso o subespaço  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$ .

(d) Recordando as observações da alínea precedente, temos que

$$(1, -1, 0) \notin \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\}$$

e, por outro lado,  $(1, 1, 0) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\}$  mas, como este vector não é múltiplo de  $(1, -1, 0)$  tem-se

$$(1, -1, 0) \notin L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 0, 1)\})$$

ou seja, nenhum dos subespaços está contido no outro e, por isso,  $W$  não é um subespaço.

(e) A intersecção de dois subespaços é sempre um subespaço.

(f) Nas alíneas (c), (d) e (e), os conjuntos envolvidos na determinação de  $W$  são todos subespaços lineares (ou são expansões lineares ou núcleos de matrizes [o leitor deverá convencer-se deste facto]). No caso que estamos a considerar o segundo conjunto não é um subespaço, por isso não podemos concluir imediatamente que  $W$  é um subespaço. (Também não se pode concluir imediatamente o contrário. [O leitor deverá tentar fornecer um exemplo de dois conjuntos de vectores de  $\mathbb{R}^2$  que não são subespaços de  $\mathbb{R}^2$  mas cuja intersecção é um subespaço. Ou até um exemplo em que um deles é um subespaço, o outro não é mas a intersecção é um subespaço.]

Aqui, o vector nulo não pertence ao segundo conjunto, logo não pode pertencer à intersecção. Assim,  $W$  não é um subespaço.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.7).— Podemos recorrer aos seguintes factos:

$$\text{nul}(A) + \text{car}(A) = \text{número de colunas de } A;$$

$$\text{car}(A) = \dim(\text{EL}(A)) = \dim(\text{EC}(A));$$

$$\text{car}(A) = \text{car}(A^T);$$

onde  $\text{nul}(A)$  é a nulidade de  $A$ , i.e. a dimensão do núcleo de  $A$ . Observe-se que se  $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$  então  $A^T \in \mathbb{R}^{q \times p}$ . Temos então o seguinte: por I,  $\text{nul}(A^T) = 3$  o que significa que  $\text{car}(A^T) = \text{car}(A) = p - 3$ . Por II,  $1 = \dim(\text{EL}(A)) = \text{car}(A) = \text{car}(A^T)$ . Concluimos destas duas observações que  $p = 4$ . Finalmente por III, tem-se que  $\text{nul}(A) = 4$  e, como já sabemos que  $\text{car}(A) = 1$ , concluimos que  $q = 5$ . A resposta correcta é C).  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.8).— (a) Temos que

$$W = \{(2y - 3z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}).$$

Assim uma base ordenada de  $W$  pode ser  $B = ((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ . A dimensão de  $W$  é, portanto, 2.

(b) É fácil ver que as componentes do vector  $(1, 2, 1)$  satisfazem a equação que

caracteriza  $W$  e concluir que  $(1, 2, 1) \in W$ . Tem-se que  $(1, 2, 1)_B = (\alpha, \beta)$  sse

$$(1, 2, 1) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(-3, 0, 1).$$

Ora  $\alpha, \beta$  podem calcular-se, como habitualmente, resolvendo o sistema:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

obtendo-se  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ . Ou seja:  $(1, 2, 1)_B = (2, 1)$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.9).— (a) Os elementos de  $W$  são as soluções do sistema:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

ou seja:

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z \wedge y = 3z - w\} = \{(z, 3z - w, z, w) \mid z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Separando variáveis:

$$(z, 3z - w, z, w) = z(1, 3, 1, 0) + w(0, -1, 0, 1).$$

Desta forma,  $((1, 3, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$  é uma base ordenada de  $W$  (recorde-se que os vectores que, como acima, são obtidos por separação de variáveis, são linearmente independentes).

(b) Podemos fazer tudo de uma só vez. Se considerarmos o sistema

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

onde as duas primeiras colunas são os vectores da base de  $W$  e a coluna dos termos independentes é o vector que estamos a tentar averiguar pertencer ou não a  $W$  então, ele pertencerá a  $W$  se e só se o sistema acima é possível e a solução do sistema fornecerá os coeficientes da combinação linear que o permite obter a partir dos vectores da base, ou seja, o seu vector de coordenadas.

Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ora, o sistema é possível, logo  $v \in W$  e, além disso,  $v_B = (1, 1)$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.10).— É importante recordar que se o conjunto  $\{u_1, \dots, u_k\}$  é linearmente independente e  $v \notin L_V(\{u_1, \dots, u_k\})$  então  $\{v, u_1, \dots, u_k\}$  é linearmente independente. Por outro lado, se  $v \neq 0$  então  $\{v\}$  é linearmente independente. Recordados estes factos, por (a), sabemos que o conjunto  $\{v_1, v_2\}$  é linearmente independente. Por (b) sabemos que é possível obter  $0$  como uma combinação linear de  $v_1, v_2, v_3$  em que os coeficientes não são todos nulos, i.e.  $\{v_1, v_2, v_3\}$  é linearmente dependente. Da alínea (c) concluímos que  $v_4 \notin L_V(\{v_1, v_2\})$  pelo que

$\{v_1, v_2, v_4\}$  é linearmente independente. O mesmo argumento, aplicado à alínea (d) permite concluir que o conjunto  $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$  é linearmente independente.

Resumindo,  $\dim(L_V(\{v_1, v_2, v_4, v_5\})) = 4$  e  $v_3 \in L_V(\{v_1, v_2, v_4, v_5\})$  logo,

$$L_V(\{v_1, v_2, v_4, v_5\}) = L_V(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}) = W.$$

Assim  $\dim(W) = 4$ . A opção correcta é B).  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.11).— O espaço  $W$  tem dimensão 3. Neste caso,  $\{u_1, u_2, u_3\}$  será uma base de  $W$  se e só se for linearmente independente. Recorrendo à definição de independência linear, vejamos em que condições se pode obter  $\mathbb{0}$  como combinação linear de  $u_1, u_2, u_3$ . Temos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 &= \mathbb{0} \\ \Leftrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2) + \alpha_3(v_1 + v_2 + v_3) &= \mathbb{0} \\ \Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)v_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_2 + \alpha_3 v_3 &= \mathbb{0}.\end{aligned}$$

Como, por hipótese,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  é linearmente independente, a última igualdade é equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

que, como é fácil constatar, tem uma única solução  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Concluimos assim que  $\{u_1, u_2, u_3\}$  é linearmente independente.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.12).— A conversão de coordenadas de uma base para outra pode ser feita através das respectivas matrizes de mudança de base. Neste caso as matrizes  $M_{B \leftarrow B_1}$ ,  $M_{B \leftarrow B_2}$  e  $M_{B \leftarrow B_3}$  são fáceis de escrever porque podemos facilmente determinar os vectores de coordenadas dos vectores de  $B_i$  na base  $B$ . Por exemplo, no caso de  $B_1$ , temos que:

$$(u + v)_B = (1, 1, 0), \quad (u - v)_B = (1, -1, 0), \quad w_B = (0, 0, 1).$$

Assim:

$$M_{B \leftarrow B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{B \leftarrow B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_{B \leftarrow B_3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.13).— Faremos apelo às seguintes relações:

$$\dim(\text{Nuc}(A)) + \text{car}(A) = \text{número de colunas de } A$$

$$\text{car}(A) = \dim(\text{EL}(A)) = \dim(\text{EC}(A));$$

$$\text{car}(A) = \text{car}(A^T).$$

Nas condições do enunciado concluímos imediatamente que a dimensão do núcleo de  $A$  é 1. Assim a sua característica, que coincide com as dimensões dos espaços das linhas e das colunas é 3. Esta é também a característica de  $A^T$  e, como  $A^T$  tem 3 colunas, isso significa que a sua nulidade i.e., a dimensão do seu núcleo é 0. Finalmente a dimensão dos espaços das linhas e das colunas de  $A^T$  é também 3.

Desta forma, as afirmações correctas são a I e a II e a opção correcta é a opção B).  $\square$

**SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.13).**— Podemos obter bases para os espaços  $S$  e  $U$  a partir dos conjuntos geradores indicados. Podemos usar o método de eliminação de Gauss. Se colocarmos os vectores geradores como linhas de uma matriz e procedermos à eliminação de Gauss, no final, as linhas não nulas são uma base do espaço. Em alternativa as linhas iniciais que lhes correspondem tendo em conta eventuais trocas de linhas também constituem uma base do espaço. De qualquer forma a característica da matriz indica a dimensão do espaço em questão. Começando por  $S$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 1 \\ 19 & 10 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & 10 \\ 0 & -7 & 11 \end{bmatrix}$$

Não é necessário completar a eliminação de Gauss para constatar que a matriz final não terá nenhuma linha de zeros (a terceira linha não é múltipla da segunda). Assim a característica da matriz é 3 que é também a dimensão de  $S$ . No que respeita a  $U$  e procedendo analogamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -11 & -7 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -11 & -7 \\ 0 & 39 & 30 \end{bmatrix}$$

que tem característica 2 logo  $\dim(U) = 2$ .

Sabemos que  $U + S$  é gerado pelo conjunto que resulta da união dos conjuntos geradores de  $U$  e  $S$ , ou seja,

$$U + S = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 2, 3), (-3, 7, 1), (19, 10, -13), (1, -11, -7), (4, -5, 2)\}).$$

Poderíamos calcular a dimensão de  $U + S$  recorrendo ao procedimento anterior, contudo algumas simples observações poupar-nos-ão cálculos. Tem-se que  $U \subset U + S \subset \mathbb{R}^3$ , pelo que  $\dim(U) \leq \dim(U + S) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ . No entanto já vimos que  $\dim(U) = 3$ . Assim temos que concluir que  $U = U + S = \mathbb{R}^3$  e  $U \cap S = S$ , pelo que  $\dim(U \cap S) = 2$ . A escolha acertada é então D).  $\square$

**SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.15).**— Podemos resolver o problema no espaço de coordenadas de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  que é  $\mathbb{R}^9$ . Fixemos em  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  a base canónica  $B$ . Neste caso, se  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  então o respectivo vector de coordenadas é

$$A_B = (A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,1}, A_{2,2}, A_{2,3}, A_{3,1}, A_{3,2}, A_{3,3}).$$

O espaço  $S$  é constituído pelas matrizes da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

onde  $a + c + f = 0$ . O correspondente subespaço de  $\mathbb{R}^9$  consistindo nos vectores de coordenadas dos elementos de  $S$  é

$$S_B = \{(a, b, c, 0, d, e, 0, 0, f) \in \mathbb{R}^9 \mid a + c + f = 0\}$$

ou seja, os vectores em  $S_B$  são da forma  $(-c - f, b, c, 0, d, e, 0, 0, f)$ . Separando as variáveis obtemos facilmente que  $\dim(S_B) = 5$  e assim  $\dim(S) = 5$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.16).— Procedendo à eliminação de Gauss obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como  $\text{car}(A) = \dim(\text{EL}(A)) = \dim(\text{EC}(A))$  e a característica é 3, as três primeiras afirmações são verdadeiras. Note-se que quer o espaço das linhas quer o espaço das colunas de  $A$  são subespaços de  $\mathbb{R}^3$  que tem dimensão 3. Ora se  $U$  é subespaço de  $V$  e  $\dim(U) = \dim(V)$  então  $U = V$ .

Observe-se que a matriz  $A$  é invertível (tem característica máxima) e assim  $Au = b$  equivale a  $u = A^{-1}b$  pelo que o sistema tem uma única solução. Assim todas as afirmações são verdadeiras e a escolha certa é D).  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.17).— Este é o problema clássico em que temos um subespaço apresentado como uma expansão linear e o queremos caracterizar através de equações. Essas equações resultam das condições que exprimem a existência de soluções para o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & x \\ -1 & 0 & -2 & 10 & 8 & y \\ 1 & 0 & 2 & -10 & -8 & z \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 7 & w \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & x \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 7 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x-y+w \end{array} \right]$$

Pelo que concluímos que

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z = 0 \wedge -x - y + w = 0\}.$$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.18).— Basta recordar a definição de vector de coordenadas de um vector numa base: o vector de coordenadas de  $x$  numa base ordenada  $B$  é o vector  $x_B$  cujas componentes são os coeficientes da combinação linear dos vectores de  $B$  que permitem obter  $x$ .

Assim:

(a)  $x = 3(5, -1) - (1, -1)$

(b)  $x = 3(1, -1, 4) - (0, 1, 2) + (1, 2, 0).$   $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.19).— Podemos determinar em que condições um vector genérico  $(x, y, z)$  pertence ao espaço gerado por  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , ou seja, determinar as condições que as suas componentes devem satisfazer para que isso aconteça. Como se sabe isso equivale a saber sob que condições o sistema seguinte é possível:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & 2 & y \\ 1 & 3 & 2 & z \end{array} \right].$$

Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & 2 & y \\ 1 & 3 & 2 & z \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & -x+z \\ 0 & 0 & 0 & -x+y \end{array} \right]$$

ou seja, um vector  $(x, y, z) \in L_{\mathbb{R}^3}(\{v_1, v_2, v_3\})$  se e só se  $x = y$ . Pelo que a resposta correcta é a D).  $\square$



SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.20).— Basta colocar os vectores como linhas (ou colunas) de uma matriz e determinar a respectiva característica.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.21).—  $V$  é de facto um subespaço de  $\mathbb{R}^3$  de facto é o núcleo da matriz  $A = [2 \ 1 \ -1]$ , assim (a) é *falsa*. Para constituírem uma base de  $V$  os vectores têm que pertencer a  $V$ , gerar  $V$  e serem linearmente independentes. Ora a primeira condição falha para o conjunto indicado na alínea (b) (o vector  $(1, 2, 0) \notin V$ ) assim, (b) é *falsa*. Pela mesma razão (c) é *falsa*. Finalmente, na alínea (d) constata-se que os vectores são elementos de  $V$  e, como  $V$  tem dimensão 2 (recorde-se que é o núcleo de uma matriz com três colunas que tem característica 1) para ver se o conjunto indicado é uma base basta verificar se é linearmente independente. Ora isso é verdade porque nenhum dos vectores é múltiplo do outro assim (d) é *verdadeira*.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.22).— Sabemos que  $\dim(\text{Nuc}(A)) = 2$ , além disso,  $\text{Nuc}(A) \subset \mathbb{R}^4$  pelo que a matriz tem 4 colunas. Desta forma a característica de  $A$  é 2. Um vector  $(x, y, z, w)$  é elemento do núcleo de  $A$  se e só se o sistema

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 1 & w \end{array} \right]$$

é possível. Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 1 & w \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x - y \\ 0 & 0 & -2x + 2y + z \\ 0 & 0 & x - y + w \end{array} \right]$$

Concluimos assim que:

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(A) &= \{(x, y, z, w) \mid -2x + 2y + z = 0 \wedge x - y + w = 0\} \\ &= \{(x, y, z, w) \mid x + w = y \wedge z = -2w\}. \end{aligned}$$

constatando-se assim que as afirmações (a) e (d) são falsas. As únicas afirmações correctas são assim as afirmações (b) e (c) e a opção correcta é a D).  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.23).— (a) Como a soma das dimensões do espaço das colunas e do núcleo iguala o número de colunas. Se o espaço das colunas não é  $\mathbb{R}^4$  tem dimensão menor que 4 e assim a dimensão do núcleo é  $\geq 1$ , pelo que podemos afirmar que o núcleo não é trivial.

(b) Neste caso a dimensão do núcleo é pelo menos 1, pelo que o espaço das colunas é um subespaço próprio de  $\mathbb{R}^4$ .

(c) Neste caso a característica de  $A$  é 4 pelo que o sistema será sempre possível e determinado. (Como  $A$  é invertível, a única solução de  $Ax = b$  é  $x = A^{-1}b$ ).

(d) Como  $\text{Nuc}(A) = \{0\}$  implica que  $\dim(\text{Nuc}(A)) = 0$ , resulta que  $\text{EC}(A) = \mathbb{R}^4$  e estamos na situação de poder concluir como na alínea anterior.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.24).— (a) O número de linhas linearmente independentes de linhas na matriz deve ser 2 a ideia é portanto considerar dois vectores de

$\mathbb{R}^4$  linearmente independentes e colocá-los por exemplo como as duas primeiras linhas da matriz (embora seja indiferente as posições que ocupem) e depois acrescentar uma terceira linha que seja uma combinação linear das outras duas (pode por exemplo ser uma linha nula. Assim, duas possíveis hipóteses são:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Atendendo a que a nulidade de  $A$  (a dimensão do núcleo) somada com a característica de  $A$  iguala o número de colunas de  $A$ , para que a nulidade de  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  seja 2 a respectiva característica tem que ser 1. A dimensão do espaço das colunas (ou das linhas) tem então que ser 1. As seguintes matrizes são exemplos possíveis:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) Neste caso, dois dos vectores devem ser linearmente independentes e o terceiro uma combinação linear desses dois. Assim, uma possível solução é:

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (2, 0, 0, 3)\}$$

onde o terceiro vector é  $2(1, 0, 0, 0) + 3(0, 0, 0, 1)$  e os dois primeiros são linearmente independentes pois nenhum deles é múltiplo do outro.  $\square$

**SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.25).**— Sabe-se que se um sistema  $Ax = b$  é possível então a sua solução geral é da forma  $x_0 + \text{Nuc}(A)$ , onde  $x_0$  é uma das soluções (uma solução particular) do sistema  $Ax = b$ .<sup>18</sup>

Sabendo que as soluções do sistema homogéneo associado  $Ax = 0$  constituem exactamente o núcleo da matriz  $A$  temos que as soluções do sistema são exactamente os vectores em

$$\begin{aligned} & (1, 3, 2) + \{(x, y, z) \mid x = y - 4z\} \\ &= (1, 3, 2) + \{(y - 4z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= (1, 3, 2) + L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 1, 0), (-4, 0, 1)\}) \end{aligned}$$

ou seja, as soluções do sistema são da forma:

$$(1, 3, 2) + \alpha(1, 1, 0) + \beta(-4, 0, 1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.26).**— Podemos resolver o problema considerando coordenadas. Fixando a base canónica,  $B$ , no espaço  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,<sup>19</sup> temos que para o vector de coordenadas de uma matriz  $A$  na base  $B$  é

$$A_B = (A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}).$$

Trasportando o problema para o espaço de coordenadas,  $\mathbb{R}^4$ , queremos saber de que forma  $X_B$  se escreve como combinação linear de  $R_B, S_B, T_B$ . Isso pode fazer-se resolvendo o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

<sup>18</sup> Recorde-se que se  $x_0$  é um vector e  $U$  é um conjunto de vectores então,  $x_0 + U$  denota o conjunto cujos elementos são todas as somas da forma  $x_0 + u$  em que  $u \in U$  i.e.,

$$x_0 + U = \{x_0 + u \mid u \in U\}.$$

<sup>19</sup> Recorde-se que a base canónica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  é a base ordenada

$$(E^{(1,1)}, E^{(1,2)}, E^{(2,1)}, E^{(2,2)}),$$

onde  $E^{(i,j)}$  é a matriz cuja entrada  $(i, j)$  é 1 e as restantes são nulas.

Temos assim que,  $X_B = 3R_B - 4S_B + T_B$ . Mas nestas condições também se tem  $(X_B)^B = 3(R_B)^B - 4(S_B)^B + (T_B)^B$ , ou seja

$$X = 3R - 4S + T.$$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.27).— Mais uma vez podemos transportar a questão para o espaço de coordenadas. Fixando em  $\mathbb{R}_2[x]$  a base canónica  $B = (1, x, x^2)$ , tem-se que o vector de coordenadas de um polinómio  $a + bx + cx^2$  é

$$(a + bx + cx^2)_B = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Em termos de vectores de coordenadas o problema converte-se então em saber como podemos escrever  $(-5 + 19x - 8x^2)_B$  como combinação linear dos vectores  $(3x - x^2)_B$ ,  $(2 + 4x - x^2)_B$  e  $(1 - x + 3x^2)_B$ , ou seja, como podemos escrever  $(-5, 19, -8)$  como combinação linear de  $(0, 3, -1)$ ,  $(2, 4, -1)$  e  $(1, -1, 3)$ . Como estamos agora em  $\mathbb{R}^3$  a resolução deste problema corresponde a obter uma solução para o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & -1 & 19 \\ -1 & -1 & 3 & -8 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right]$$

Tem-se então que

$$(-5 + 19x - 8x^2)_B = \frac{28}{3}(3x - x^2)_B - \frac{7}{3}(2 + 4x - x^2)_B - \frac{1}{3}(1 - x + 3x^2)_B.$$

Desta forma também se tem:

$$-5 + 19x - 8x^2 = \frac{28}{3}p_1(x) - \frac{7}{3}p_2(x) - \frac{1}{3}p_3(x).$$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.28).— Fixando a base canónica  $B = (1, t, t^2)$  de  $\mathbb{R}_2[t]$  podemos resolver o problema correspondente no espaço de coordenadas ( $\mathbb{R}^3$ ). Assim pretendemos ver quais dos conjuntos  $(P_1)_B$ ,  $(P_2)_B$ ,  $(P_3)_B$  e  $(P_4)_B$  constituem bases de  $\mathbb{R}_2[t]$ .

Podemos desde logo descartar o conjunto  $P_1$  pois o número mínimo de vectores que é necessário para gerar  $\mathbb{R}_2[t]$  é 3. Assim  $P_1$  não pode ser base. Consideremos então  $(P_2)_B$ ,  $(P_3)_B$  e  $(P_4)_B$ . Como habitualmente, colocaremos os vectores como linhas (ou colunas) de uma matriz. Se a característica dessa matriz for três então estaremos perante 3 vectores linearmente independentes num espaço de dimensão 3 e podemos concluir que são base. Caso contrário serão linearmente dependentes e não podem ser uma base.

Começemos por notar que se tem  $(p_1(t))_B = (1, 0, 0)$ ,  $(p_2(t))_B = (1, 0, -1)$ ,  $(p_3(t))_B = (1, 1, -2)$  e  $(p_4(t))_B = (0, 1, -1)$ . Para  $(P_2)_B$  tem-se (colocando os vectores por linhas):

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

que tem característica 3, logo  $(P_2)_B$  é base de  $\mathbb{R}^3$  e assim  $P_2$  é base de  $\mathbb{R}_2[t]$ .

Para  $(P_3)_B$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Que tem característica 2 e assim concluímos que  $P_3$  não é base de  $\mathbb{R}_2[t]$ .

Finalmente,  $(P_4)_B$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que também tem característica 3, pelo que  $P_4$  também é base de  $\mathbb{R}_2[t]$ . A resposta correcta é assim a C).  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.29).— Fixando a base canónica,  $B$ , em  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  o problema resume-se a conhecer a dimensão de

$$L_{\mathbb{R}^4}(\{R_B, S_T, T_B\}) = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 1, -1, 9), (1, 2, -2, 1), (1, -1, 1, 1)\}),$$

e de saber se  $A_B \in L_{\mathbb{R}^4}(\{R_B, S_T, T_B\})$ , ou seja de saber se

$$(1, 0, -1, 1) \in L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 1, -1, 9), (1, 2, -2, 1), (1, -1, 1, 1)\}).$$

Podemos resolver o problema, respondendo de uma só vez às duas questões. Para responder à segunda questão temos que ver se o sistema

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 9 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

é possível. Fazendo a eliminação de Gauss:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 9 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

concluímos então que o sistema é impossível ou seja  $A_B \notin L_{\mathbb{R}^4}(\{R_B, S_T, T_B\})$  e assim também se tem que  $A \notin L_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}(\{R, S, T\})$ . Mas também podemos constatar que a característica da matriz cujas colunas são  $R_B, S_B, T_B$  é três, ou seja estes vectores são linearmente independentes e

$$\dim(L_{\mathbb{R}^4}(\{R_B, S_T, T_B\})) = 3.$$

Então, também se tem que

$$\dim(L_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}(\{R, S, T\})) = 3.$$

A resposta correcta é então a D).  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA ??).— As equações que caracterizam  $S$  são as que caracterizam o facto de o sistema:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & -2 & 1 & z \\ 0 & -1 & -1 & 0 & w \end{array} \right]$$

ser possível. Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & -2 & 1 & z \\ 0 & -1 & -1 & 0 & w \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & -1 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x+y-z+w \end{array} \right]$$

Ou seja,

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y - z + w = 0\}.$$

A opção correcta é então a B), pois as equações lineares  $-x + y - z + w = 0$  e  $x - y + z - w = 0$  são equivalentes.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.31).— (a) Dado que podemos escolher uma base ordenada, escolhemos naturalmente a base canónica  $B = (1, t, t^2)$  já que é aquela em que é trivial calcular vectores de coordenadas. Tem-se:

$$((1-t)(1+t))_B = (1-t^2)_B = (1, 0, -1).$$

(b) O conjunto em questão não pode ser uma base de  $S$  porque, sendo  $S$  um subespaço de dimensão 3 a sua dimensão não pode exceder 3. O conjunto de vectores dado tem 4 vectores logo é forçosamente linearmente dependente. Para encontrar uma base de  $S$  mais vale pensar em termos de coordenadas e encontrar uma base de  $S_B$  (onde  $B$  continua a ser a base canónica de  $\mathbb{R}_2[t]$ ).

Tem-se  $S_B = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, -2, 0), (1, 0, 1), (1, 2, -3), (0, 0, 1)\})$ . Colocando os vectores geradores como colunas de uma matriz e procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

Como os pivôs se encontram nas três primeiras colunas do resultado da eliminação de Gauss, as três primeiras colunas da matriz original constituem uma base do seu espaço de colunas, ou seja de  $S_B$ . Assim,

$$((1, -2, 0), (1, 0, 1), (1, 2, -3))$$

é uma base ordenada de  $S_B$  e, desta forma,

$$(1 - 2t^2, 1 + t^2, 1 + 2t - 3t^2)$$

é uma base ordenada de  $S$ .

(c) Continuando a considerar  $B$  a base canónica e denotando por  $\bar{B}$  a base da alínea precedente temos que  $(5 + t^2)_B = (5, 0, 1)$ . A matriz de mudança da base  $B$  para a base  $\bar{B}$  é

$$M_{\bar{B} \leftarrow B} = M_{B \leftarrow \bar{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$$

e assim

$$(5 + t^2)_{\bar{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(d) O polinómio nulo satisfaz a condição pelo que pertence a  $W$ . Por outro lado,

se  $p, q \in W$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  então,

$$(\alpha p + \beta q)(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = 0,$$

pelo que  $\alpha p + \beta q \in W$ , ou seja,  $W$  é fechado para combinações lineares. Concluímos assim que  $W$  é um subespaço de  $\mathbb{R}_2[t]$ .

Temos que  $a + bt + ct^2 \in W$  sse  $(a + bt + ct^2)(0) = 0$  ou seja, sse  $a = 0$ . Tem-se então que:

$$W = \{bt + ct^2 \mid b, c \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{t, t^2\}).$$

Ora o conjunto  $\{t, t^2\}$  é linearmente independente (os polinómios não têm o mesmo grau, logo nenhum deles é múltiplo do outro) e assim  $\{t, t^2\}$  é uma base de  $W$ . Conclui-se assim que  $\dim(W) = 2$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.32).— (a) Os polinómios em questão são da forma:

$$a_0 - a_0t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 = a_0(1 - t) + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5$$

op que significa que o conjunto em questão é

$$L_{\mathbb{R}_5[t]}(\{1 - t, t^2, t^3, t^4, t^5\})$$

e é por isso um subespaço de  $\mathbb{R}_5[t]$ . Por outro lado, o conjunto  $\{1 - t, t^2, t^3, t^4, t^5\}$  é linearmente independente porque os polinómios têm todos grau diferente. Assim,  $\{1 - t, t^2, t^3, t^4, t^5\}$  é uma base e a dimensão daqueles subespaço é 4.

(b) Não é subespaço porque a soma de duas matrizes invertíveis não tem que ser invertível e.g.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Não é subespaço porque não é fechado para a multiplicação por escalar e.g.,  $1 \in W$  mas  $\sqrt{2}1 \notin W$ .

(d) Uma expansão linear é sempre um subespaço resta ver se o conjunto gerador é ou não linearmente independente. Vejamos em que condições se pode ter:

$$\alpha(\cos^2 t) + \beta(\cos 2t) + \delta(\sin^2 t) = 0.$$

Observe-se que na igualdade acima o que se quer dizer é que o lado esquerdo da igualdade coincide com a função nula, ou se se quiser que o lado esquerdo é nulo para qualquer valor de  $t$ . Dito isto, o lado esquerdo tem que se anular, em particular, para  $t = 0$ ,  $t = \pi/4$  e  $t = \pi/2$ , ou seja, tem que se ter:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 & (\text{com } t = 0) \\ \alpha(1/2) + \delta(1/2) = 0 & (\text{com } t = \pi/4) \\ -\beta = 0 & (\text{com } t = \pi/2) \end{cases}$$

Ora o sistema acima implica que  $\alpha = \beta = \delta = 0$ , concluindo-se que o conjunto é linearmente independente e, por isso é uma base. A dimensão é 3.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.33).— Para concluir que a soma é directa basta verificar se a intersecção dos dois subespaços é  $\{0\}$ . As diferentes alíneas são semelhantes consideraremos portanto a resolução de uma delas, neste caso a alínea (c).

Tem-se que

$$W = \{(w, y, 2y, w) \mid y, w \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 2, 0)\})$$

e a dimensão de  $W$  é 2. Desta forma

$$U + W = L_{\mathbb{R}^4}(\{(0, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, -2), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 2, 0)\}).$$

Para encontrar uma base deste espaço, consideramos uma matriz cujas linhas são estes vectores geradores e procedemos à eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma base de  $U + W$  é então  $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 0)\}$  e  $U + W$  tem dimensão

3. Para determinar  $U \cap W$  é mais conveniente apresentar ambos os espaços por equações. Esse tipo de apresentação está disponível para  $W$  e, para  $U$ :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -2 & x \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & -2 & w \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & -2 & x \\ 0 & 0 & w - x \\ 0 & 0 & y \end{array} \right]$$

pelo que:

$$U = \{(x, y, z, w) \mid w - x = 0 \wedge y = 0\}$$

e assim,

$$U \cap W = \{(x, y, z, w) \mid y = 0 \wedge x + 2y - z - w = 0 \wedge x - w = 0\}$$

(uma das equações estava repetida e foi suprimida). Concluimos então que:

$$U \cap W = \{(w, 0, 0, w) \mid w \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, 0, 1)\})$$

concluimos assim que  $\dim(U \cap W) = 1$ . □

**SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.34).**— Denotando por  $B_c$  a base canónica de  $\mathbb{R}^2$  tem-se que

$$M_{B_c \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ pelo que } M_{B \leftarrow B_c} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1},$$

e assim

$$w_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.35).**— (a) Denotando por  $B_c$  a base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , a matriz pretendida é:

$$M_{B \leftarrow B_c} = M_{B_c \leftarrow B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

(b) Tem-se:

$$v_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.36).— Basta saber como é que  $v$  se escreve como combinação linear dos vectores da base  $B$  e, para isso, basta resolver o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

A respectiva solução  $(-1, -2, 4)$  é então o vector de coordenadas de  $v$  na base  $B$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.37).— Fixando a base canónica  $B$  em  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  podemos converter o problema num problema acerca de vectores de coordenadas.

Tem-se que

$$S_B = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, -1), (1, 1, 2, 1)\})$$

Para responder à questão inicial basta agora determinar se se tem  $(M_i)_B \in S_B$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Trata-se de saber da possibilidade de quatro sistemas em que a matriz dos coeficientes é sempre a mesma e, por isso podemos abordá-los todos numa mesma eliminação de Gauss:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

assim, o sistema só é possível para  $(M_3)_B$  e  $(M_4)_B$ . Retomando o problema original, os vectores que não pertencem a  $S$  são  $M_1$  e  $M_2$   $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.38).— Uma vez que temos os  $v$ 's escritos como combinações lineares dos  $u$ 's tem-se que é fácil escrever a matriz de mudança da base  $B'$  para a base  $B$ . Tem-se

$$(v_1)_B = (u_1 + u_2 - u_3)_B = (1, 1, -1)$$

$$(v_2)_B = (u_1 - u_2)_B = (1, -1, 0)$$

$$(v_3)_B = (u_1 - u_3)_B = (1, 0, -1).$$

Assim:

$$M_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz  $M_{B' \leftarrow B}$  é a inversa da que acabámos de calcular.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.39).— Denotando por  $B_c$  a base canónica de  $\mathbb{R}_2[t]$  tem-se que:

$$M_{B_c \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

desta forma,

$$(2 - 3t + t^2)_B = M_{B \leftarrow B_c}(2 - 3t + t^2)_{B_c} = M_{B_c \leftarrow B}^{-1}(2 - 3t + t^2)_{B_c}$$

ou seja,

$$(2 - 3t + t^2)_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.40).— Temos que:

$$M_{B_2 \leftarrow B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{B_2 \leftarrow B_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Desta forma:

$$M_{B_3 \leftarrow B_2} = M_{B_2 \leftarrow B_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

e

$$M_{B_3 \leftarrow B_1} = M_{B_3 \leftarrow B_2} M_{B_2 \leftarrow B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para responder à alínea (b), para calcular  $v_{B_1}$  não há grandes contas a fazer já que  $v$  está escrito como combinação linear dos vectores da base  $B_1$  e tem-se que  $v_{B_1} = (2, 5, -3)$ . Quanto aos outros vectores de coordenadas:

$$v_{B_2} = M_{B_2 \leftarrow B_1} v_{B_1} \quad \text{e} \quad v_{B_3} = M_{B_3 \leftarrow B_1} v_{B_1}.$$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.41).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.42).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.43).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.44).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.45).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.46).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.47).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.48).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.49).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.50).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.51).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.52).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.53).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.54).—

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 3.55).—