Semanas 10–11
Transformações lineares

As secções marcadas com um asterisco (*) são secções contendo tópicos complementares, mais avançados, e não serão leccionados no curso nem serão alvo de avaliação.

4.1 Definições e resultados básicos

Definição 4.1 (transformação linear).— *Sejam U e V espaços lineares sobre $\mathbb{K}$. Uma função $T : U \to V$ é uma* transformação linear *ou um* homomorfismo *se, dados vectores* $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in U$ *e escalares* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *se tem:*

$$T(\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v}).$$

O conjunto das transformações lineares $T : U \to V$ denota-se $\mathrm{Hom}(U, V)$.

O espaço U diz-se o domínio de T *ou* espaço de partida *e denota-se* $\mathrm{dom}(T)$ *enquanto que V se designa de* espaço de chegada*.*

Lema 4.2.— *Sejam U e V espaços lineares sobre $\mathbb{K}$. Uma função $T : U \to V$ é uma* transformação linear *sse, dados* $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_n \in U$ *e escalares* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *se tem:*

$$T(\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{u}_n) = \alpha_1 T(\mathrm{u}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathrm{u}_n).$$

Demonstração.— A demonstração é uma simples indução no número de termos da combinação linear. ◪

Resulta imediatamente da definição que se $T : U \to V$ é uma transformação linear então $T(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ e $T(-\mathrm{u}) = -T(\mathrm{u})$.[1]

[1] De facto, $T(\mathbb{0}) = T(0\mathbb{0}) = 0T(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ e $T(-\mathrm{u}) = T((-1)\mathrm{u}) = (-1)T(\mathrm{u}) = -T(\mathrm{u})$.

Definição 4.3.— *Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$.*

(1) *Uma transformação linear $T : V \to V$ diz-se um* operador linear em V *ou um* endomorfismo de V. *O conjunto destes operadores denota-se* $\mathrm{Hom}(V)$.[2]

(2) *Uma transformação linear $T : V \to \mathbb{K}$ designa-se de* funcional linear em V. *O conjunto de todos os funcionais lineares em V designa-se de* espaço dual de V *e denota-se* V^*.[3]

[2] De acordo com a definição tem-se que $\mathrm{Hom}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$.

[3] Ou seja, $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$.

Definição 4.4.—

(1) *Uma transformação linear injectiva*[4] *diz-se um* monomorfismo.

(2) *Uma transformação linear sobrejectiva*[5] *diz-se um* epimorfismo.

(3) *Uma transformação linear bijectiva*[6] *diz-se um* isomorfismo.

(4) *Um endomorfismo que é um isomorfismo, diz-se um* automorfismo.

[4] Uma função f é injectiva se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

[5] Uma função $f : A \to B$ é sobrejectiva se para qualquer $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

[6] Ou seja, injectiva e sobrejectiva.

Definição 4.5.— *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. O* núcleo de T, *que se denota por* $\operatorname{Nuc}(T)$ *é definido por:*

$$\operatorname{Nuc}(T) := \{u \in U \mid T(u) = \mathbb{0}\}.$$

A imagem de T *que se denota por* $\operatorname{Im}(T)$ *é o conjunto definido por:*

$$\operatorname{Im}(T) := \{v \in V \mid (\exists u \in U) T(u) = v\} = \{T(u) \mid u \in U\}.$$

Teorema 4.6.— *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Tem-se que,* $\operatorname{Nuc}(T)$ *é um subespaço de U e* $\operatorname{Im}(T)$ *é um subespaço de V.*

Demonstração.— Ver apêndice 4.A. ☐

Teorema 4.7.— *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Tem-se:*

(1) *T é injectiva (um monomorfimo) se e só se* $\operatorname{Nuc}(T) = \{\mathbb{0}\}$.

(2) *T é sobrejectiva (um epimorfismo) se e só se $V = \operatorname{Im}(T)$.*

Demonstração.— Ver apêndice 4.A. ☐

Exemplo 1.— Consideremos o espaço linear real das funções reais de variável real que possuem derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$, que denotamos por $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. A função $D : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ que associa a cada função $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ a respectiva derivada, f', é uma transformação linear.[7]

[7] Com efeito o operador de derivação possui a seguinte propriedade:

$$\alpha f + \beta f)' = \alpha f' + \beta g'.$$

Exemplo 2.— Seja $\mathscr{C}[0, 1]$ o espaço linear das funções contínuas em $[0, 1]$. A função $T : \mathscr{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(f) := \int_a^b f(t)\,dt,$$

é um funcional linear.[8]

[8] Basta recorrer à seguinte propriedade do integral:

$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt.$$

Exemplo 3.— Seja $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. A função $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por

$$T_A(\mathrm{x}) = A\mathrm{x},$$

é uma transformação linear. Além disso tem-se que $\operatorname{Nuc}(T_A) = \operatorname{Nuc}(A)$ e $\operatorname{Im}(T_A) = \operatorname{EC}(A)$. A linearidade T_A decorre imediatamente das propriedades da álgebra de matrizes. Com efeito:

$$T_A(\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}) = \alpha A(\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}) = \alpha A\mathrm{x} + \beta A\mathrm{y} = \alpha T_A(\mathrm{x}) + \beta T_A(\mathrm{y}).$$

Por outro lado tem-se que $x \in \operatorname{Nuc}(T_A)$ se e só se $T_A(\mathrm{x}) = \mathbb{0}$, ou seja, se e só se $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$ que é o mesmo que dizer que $\mathrm{x} \in \operatorname{Nuc}(A)$.

Quanto a $\mathrm{Im}(T_A)$. Tem-se que $y \in \mathrm{Im}(T_A)$ se e só se existe x tal que $T_A(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ ou seja, se e só se $A\mathrm{x} = \mathrm{y}$. Recordemos neste ponto que se tem $A\mathrm{x} = \mathrm{y}$ sse y é a combinação linear das colunas de A que usa como coeficientes as entradas da coluna x. Assim, concluímos que $\mathrm{y} \in \mathrm{Im}(T_A)$ se e só se $\mathrm{y} \in \mathrm{EC}(A)$, ou seja $\mathrm{Im}(T_A) = \mathrm{EC}(A)$.

Teorema 4.8.— *Sejam U, V e W espaços lineares sobre $\mathbb{K}$. Tem-se:*

(1) *Os conjuntos* $\mathrm{Hom}(U, V)$ *com as operações usuais de adição de funções e de multiplicação de uma função por um escalar são espaços lineares sobre $\mathbb{K}$.*

(2) *Dadas transformações lineares $S \in \mathrm{Hom}(U, V)$ e $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ a composição $T \circ S$ que denotamos simplesmente por TS é uma transformação linear de U em W, i.e. $TS \in \mathrm{Hom}(U, W)$.*

(3) *Se $T \in \mathrm{Hom}(U, V)$ é um isomorfismo então, a função inversa, T^{-1}, é uma transformação linear i.e., $T^{-1} \in \mathrm{Hom}(V, U)$.*

(4) *Tomando como multiplicação, a composição de funções, o espaço linear* $\mathrm{Hom}(V)$ *é uma álgebra.*[9]

[9] Ou seja que é um espaço linear e, além disso, $T(S + R) = TS + TR$, $(S + T)R = SR + TR$, existe um endomorfismo que denotamos por $\mathbb{1} : V \to V$ tal que $T\mathbb{1} = \mathbb{1}T = T$ e $S(TR) = (ST)R$.

O resultado seguinte é de grande importância no contexto das transformações lineares. Ele estabelece que podemos definir uma transformação linear, essencialmente definindo as imagens dos vectores de uma qualquer base que se fixe no espaço de partida.

Teorema 4.9.— *Sejam U e V espaços lineares sobre $\mathbb{K}$ e seja $\boldsymbol{\beta}$ uma base de U. Dada uma qualquer função $f : \boldsymbol{\beta} \to V$ existe transformação linear $T_f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ que é única e que, para qualquer $\mathrm{u} \in \boldsymbol{\beta}$ satisfaz $T_f(\mathrm{u}) = f(\mathrm{u})$. A transformação T_f é definida de acordo com o seguinte:*

$$T_f\Big(\sum_{\mathrm{u}\in\boldsymbol{\beta}} \alpha_{\mathrm{u}}\mathrm{u}\Big) = \sum_{\mathrm{u}\in\boldsymbol{\beta}} \alpha_{\mathrm{u}} f(\mathrm{u}). \tag{4.1}$$

4.2 Espaços isomorfos

Definição 4.10 (espaços isomorfos).— *Sejam U, V espaços lineares sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que U e V são* isomorfos *e escreve-se $U \cong_{\mathbb{K}} V$ se existe um isomorfismo $T : U \to V$.*

A noção de isomorfismo é muito importante. Essencialmente, espaços isomorfos são equivalentes e, se existe um isomorfismo entre dois espaços então, vectores que se correspondam através do isomorfismo possuem as mesmas propriedades.

Lema 4.11.— *Sejam U, V e W espaços lineares sobre $\mathbb{K}$. Tem-se:*

(1) $U \cong_{\mathbb{K}} U$;

(2) *$U \cong_{\mathbb{K}} V$ se e só se $V \cong_{\mathbb{K}} U$;*

(3) *se $U \cong_{\mathbb{K}} V$ e $V \cong_{\mathbb{K}} W$ então, $U \cong_{\mathbb{K}} W$.*

Teorema 4.12 (invariância dimensional).— *Espaços isomorfos têm a mesma dimensão i.e., Se $U \cong_{\mathbb{K}} V$ então,* $\dim(U) = \dim(V)$.

A recíproca do resultado anterior também é verdadeira. Mais que isso, todos os espaços lineares sobre $\mathbb{K}$, de dimensão n, são a menos de isomorfismo o espaço $\mathbb{K}^n$.

TEOREMA 4.13.— *Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $\dim(V) = n$ então, $V \cong_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n$.*

COROLÁRIO 4.13.1.— *Se U, V são espaços lineares sobre $\mathbb{K}$ e $\dim(U) = \dim(V)$ então, $U \cong_{\mathbb{K}} V$.*

Das demonstrações dos dois teoremas precedentes decorre imediatamente que uma transformação linear $T : U \to V$ é um isomorfismo se e só se transforma bases em bases.[10]

[10] Ou, de forma totalmente equivalente, se transforma uma dada base numa base.

DEFINIÇÃO 4.14.— *Se $T : U \to V$ é linear e $X \subset U$ denotamos por $T(X)$ o conjunto:*

$$T(X) := \{T(x) \mid x \in X\},$$

ou seja, $T(X)$ consiste nas imagens dos elementos do conjunto X. (Face a esta notação tem-se $\mathrm{Im}(T) = T(U)$.)

Como já referimos, um isomorfismo $T : U \to V$ entre dois espaços, U e V evidencia uma equivalência estrutural entre os dois espaço. Essencialmente qualquer questão de álgebra linear num dos espaços pode ser *transferida* para o outro, aí resolvida, podendo finalmente essa solução ser convertida numa solução no espaço inicial, através do isomorfismo. O resultado seguinte resume alguns factos que ilustram esta situação, factos esses que já foram estabelecidos na sequência das demonstrações dos teoremas imediatamente precedentes.

TEOREMA 4.15.— *Suponhamos que $T : U \to V$ é um isomorfismo. Tem-se:*

(1) $T(L_U(\{x_1, \ldots, x_n\})) = L_V(\{T(x_1), \ldots, T(x_n)\})$;
(2) *$X \subset U$ é linearmente independente se e só se $T(X) \subset V$ é linearmente independente.*
(3) *X gera U se e só se $T(X)$ gera V;*
(4) *X é uma base de U se e só se $T(X)$ é uma base de V.*

TEOREMA 4.16.— *Consideremos uma transformação linear $T : U \to V$. Tem-se:*

(1) *Se $U = \mathrm{Nuc}(T) \oplus W$ (ou seja se W é um complemento de $\mathrm{Nuc}(T)$ em U) então $W \cong_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(T)$.*
(2) $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(U)$.

COROLÁRIO 4.16.1.— *Se $T : U \to V$ é linear e $\dim(U) = \dim(V)$ então T é injectiva se e só se é sobrejectiva (e então, se e só se é bijectiva).*

4.3 Representação matricial de transformações lineares

Começamos por recordar alguns factos já mencionados aquando a definição de *base ordenada* de um espaço linear. Consideremos um espaço linear, V, sobre $\mathbb{K}$, onde $\dim(V) = n$. Fixemos uma base ordenada de V, digamos $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n)$ (onde, para cada $i = 1, \dots, n$ se tem $\mathrm{v}_i \in V$). Cada vector $\mathrm{v} \in V$ pode escrever-se de forma única como combinação linear dos vectores da base $\boldsymbol{\beta}$ i.e., existe uma única sequência de escalares $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$\mathrm{v} = \alpha_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{v}_n.$$

O vector $\mathrm{v}_{\boldsymbol{\beta}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ designa-se de *vector de coordenadas de* v *na base* $\boldsymbol{\beta}$.

Do mesmo modo, qualquer vector $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ determina univocamente, relativamente à base ordenada $\boldsymbol{\beta}$, um vector de V, que se denota $(\beta_1, \dots, \beta_n)^{\boldsymbol{\beta}}$ e que se define:

$$(\beta_1, \dots, \beta_n)^{\boldsymbol{\beta}} = \beta_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n.$$

Teorema 4.17.— *Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n)$ uma base ordenada de V. Tem-se:*

(1) *A transformação linear $T_{\boldsymbol{\beta}} : V \to \mathbb{K}^n$ definida através da relação $T_{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}$ é um isomorfismo.*

(2) *A transformação linear $T^{\boldsymbol{\beta}} : \mathbb{K}^n \to V$ definida por $T^{\boldsymbol{\beta}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\boldsymbol{\beta}}$ é um isomorfismo.*

(3) *$T_{\boldsymbol{\beta}}$ e $T^{\boldsymbol{\beta}}$ são inversas uma da outra; em particular tem-se que:*

$$T_{\boldsymbol{\beta}}(T^{\boldsymbol{\beta}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

e

$$T^{\boldsymbol{\beta}}(T_{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{x})) = \mathrm{x}.$$

O resultado anterior é, do ponto de vista prático particularmente relevante: uma vez que possuímos algoritmos em $\mathbb{K}^n$ para e.g., determinar dimensões, obter bases ou verificar a independência ou dependência linear, estes isomorfismos permitem transportar este tipo de problemas para K^n, via coordenadas, e recorrer a esses algoritmos para os resolver. Ilustramos esta situação no exemplo seguinte.

Exemplo 4.— Fixemos o espaço $\mathbb{R}_3[x]$ dos polinómios reais na variável x com grau ≤ 3. Consideremos o subespaço

$$U = L_{\mathbb{R}_3[x]}(\{x - x^2, x + x^2 + x^3, x - x^3\}).$$

Qual a dimensão de U?

Fixemos a base canónica ordenada de $\mathbb{R}_3[x]$, ou seja a base $B = (1, x, x^2, x^3)$. Observe-se que em $\mathbb{R}_3[x]$ se tem que o vector (polinómio) $a + bx + cx^2 + dx^3$ se pode escrever como combinação linear dos vectores na base B da seguinte forma:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3,$$

ou seja tem-se que: $a + bx + cx^2 + dx^2)_B = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ e, na outra direcção, $(a, b, c, d)^B = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$.

Podemos usar os isomorfismos acima para dar resposta à questão. A estratégia nestes casos é a de *passar o problema para os espaços de coordenadas*. Isto é feito da seguinte forma: o isomorfismo converte o subespaço U de $\mathbb{R}_3[x]$ no subespaço

$U_B = L_{\mathbb{R}^4}(\{(x-x^2)_B, (x+x^2-x^3)_B, (x-x^3)_B\})$, ou seja no subespaço

$$U_B = L_{\mathbb{R}^4}(\{(0,1,-1,0),(0,1,1,-1),(0,1,0,-1)\}).$$

Podemos agora determinar uma base deste espaço (e a respectiva dimensão) em $\mathbb{R}^4$. Recorremos ao tradicional algoritmo. Colocamos estes vectores como linhas de uma matriz e procedemos à eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1+L_3 \to L_3]{-L_1+L_2\to L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_2+L_3\to L_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que se encontra em escada de linhas exibindo 3 linhas não nulas que são então uma base do espaço das linhas quer desta última matriz quer da matriz original e assim, também uma base de U_B. Usando o isomorfismo inverso, concluímos que a dimensão de U é 3 e que

$$U = L_{\mathbb{K}_3[x]}(\{(0,1,-1,0)^B, (0,0,1,-1)^B, (0,0,0,2)^B\})$$

ou seja que:

$$U = L_{\mathbb{K}_3[x]}(\{x-x^2, x^2-x^3, 2x^3\}).$$

Também podemos concluir que os geradores originais são linearmente independentes. (Porquê?)

Suponhamos que $T : U \to V$ é linear, $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$. Fixemos bases ordenadas $\boldsymbol{\beta}_U = (u_1, \ldots, u_n)$ de U e $\boldsymbol{\beta}_V = (v_1, \ldots, v_m)$. Desta forma, podemos associar a T uma função $\bar{T} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida através da relação:

$$\bar{T}(\mathrm{x}_{\beta_U}) = (T(\mathrm{x}))_{\beta_V}.$$

A transformação $\bar{T}$ é linear. Como iremos ver, as transformações entre espaços da forma $\mathbb{K}^n$ são representáveis através de matrizes e indirectamente (via coordenadas) qualquer transformação linear é representável desta forma.

Teorema 4.18.— *Suponhamos que $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ é linear. Nestas condições, existe uma matriz $[T]$ tal que:*

$$T(\mathrm{x}) = [T]\mathrm{x}. \tag{4.2}$$

Teorema 4.19.— *Sejam $U, V, \boldsymbol{\beta}_U, \boldsymbol{\beta}_V, T$ e $\bar{T}$ como acima. Nestas condições a transformação $\bar{T} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ é uma transformação linear. A matriz que representa T relativamente às bases $\boldsymbol{\beta}_U$ e $\boldsymbol{\beta}_V$ é a matriz $[\bar{T}]_{\beta_V,\beta_U}$ que também denotaremos por $[T]_{\beta_V,\beta_U}$. Tem-se:*

$$[T]_{B_V,B_U} x_{B_U} = (T(x))_{B_V}. \tag{4.3}$$

A relação (4.3), acima, caracteriza univocamente a matriz $[T]_{\beta_V,\beta_U}$ i.e., se A é uma matriz que satisfaz $A\mathrm{x}_{\beta_U} = (T(\mathrm{x}))_{\beta_V}$ então $A = [T]_{\beta_V,\beta_U}$. Estas considerações implicam o resultado seguinte:

Teorema 4.20.— *Suponhamos que $T : U \to V$ e $S : V \to W$ são lineares. Fixemos bases ordenadas $\boldsymbol{\beta}_U, \boldsymbol{\beta}_V$ e $\boldsymbol{\beta}_W$ em U, V e W, respectivamente. Tem-se:*

(1) $[ST]_{\beta_W,\beta_U} = [S]_{\beta_W,\beta_V}[T]_{\beta_V,\beta_U}$;

(2) *Se T é um isomorfismo* $[T^{-1}]_{\beta_U,\beta_V} = [T]^{-1}_{\beta_V,\beta_U}$.

Como se depreende das considerações anteriores, a representação matricial de uma transformação linear está intimamente ligada à escolha de bases no espaço de partida e no espaço de chegada. Se essa escolha de bases for diferente, a representação matricial muda em conformidade. Contudo, a nova matriz pode ser obtida através das matrizes de mudança de base.

Teorema 4.21.— *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Consideremos bases ordenadas $\boldsymbol{\beta}_U, \boldsymbol{\beta}'_U$ de U e $\boldsymbol{\beta}_V, \boldsymbol{\beta}'_V$ de V. Tem-se o seguinte:*

$$[T]_{\beta'_V,\beta'_U} = M_{\beta'_V,\beta_V}[T]_{\beta_V,\beta_U} M_{\beta_U,\beta'_U} = M_{\beta'_V,\beta_V}[T]_{\beta_V,\beta_U} M^{-1}_{\beta'_U,\beta_U}.$$

4.4* Subespaços invariantes

Dados, um endomorfismo $T : V \to V$ e um subespaço U de V. A restrição de T a U é a transformação $T_U : U \to V$ definida por $T_U(x) = T(x)$, para qualquer $x \in U$. Em geral, $\mathrm{Im}(T_U) \not\subset U$.

Definição 4.22.— *Sejam, $T : V \to V$ um operador em V e $U \leq V$. Dizemos que U é invariante para T, ou simplesmente T-invariante, se $\mathrm{Im}(T_U) \subset U$ i.e. T_U é um operador em U.*

Dado um endomorfismo $T : V \to V$, exemplos de subespaços T-invariantes são $\{\mathbb{0}\}$, V, $\mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{Nuc}(T)$.

Se $\mathrm{x} \neq \mathbb{0}$ é um vector em V então o *espaço cíclico gerado por* x é a expansão linear $W = L_V(\{\mathrm{x}), T(\mathrm{x}), T^2(\mathrm{x}), \dots\})$. É fácil verificar que este subespaço de V é T-invariante. Com efeito qualquer $\mathrm{w} \in W$ é da forma $\mathrm{w} = \alpha_1 T^{k_1}(\mathrm{x}) + \cdots + \alpha_s T^{k_s}(\mathrm{x})$, pelo que:

$$T(\mathrm{w}) = \alpha_1 T(T^{k_1}(\mathrm{x})) + \cdots + \alpha_s T(T^{k_s}(\mathrm{x})) = T^{k_1+1}(\mathrm{x})) + \cdots + \alpha_s T(T^{k_s+1}(\mathrm{x})) \in W.$$

Normalmente, denotaremos por C_x o espaço cíclico gerado por x.[11]

[11] Observe-se que C_x é o menor subespaço T-invariante de V que contém x.

NA definição de C_x este espaço é aparentemente gerado por um númro infinito de geradores: os vectores $T^n(\mathrm{x})$ para $n \in \mathbb{N}$. Na realidade esta infinitude é apenas aparente. Uma vez que V tem dimensão finita, podemos sempre determinar um primeiro $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(\mathrm{x}) = \alpha_0 \mathrm{x} + \alpha_1 T(\mathrm{x}) + \cdots + \alpha_{n-1} T^{n-1}(\mathrm{x}).$$

(De facto um tal n é no máximo $(\dim V) - 1$.)

Neste caso, tem-se que $C_\mathrm{x} = L_V(\{\mathrm{x}, \dots, T^{n-1}(\mathrm{x})\})$.

Lema 4.23.— *Se $\boldsymbol{\beta}_U = (\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r)$ e $\boldsymbol{\beta}_W = (\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_s)$ são bases ordenadas de subespaços $U, W \leq V$ tais que $U \cap W = \{\mathbb{0}\}$ então denotando por $\boldsymbol{\beta}_U * \boldsymbol{\beta}_W$ a sequência*

$$\boldsymbol{\beta}_U * \boldsymbol{\beta}_W \coloneqq (\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_r, \mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_s),$$

tem-se que $\boldsymbol{\beta}_U * \boldsymbol{\beta}_W$ é uma base ordenada de $U \oplus W$.

Teorema 4.24.— *Sejam, $T : V \to V$ um operador em V e W um subespaço T-invariante de V. Existe uma base de V, da forma $\boldsymbol{\beta}_W * \boldsymbol{\beta}$, onde $\boldsymbol{\beta}_W$ é uma base de W, na qual a representação matricial de T é uma matriz da forma*

$$[T]_{\beta_W * \beta} = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_3 \\ \hline \mathbb{0} & B_2 \end{array}\right]$$

Na demonstração anterior recorremos ao facto de $V = W \oplus U$, para algum U. Podemos assim considerar uma base ordenada $\boldsymbol{\beta}_U$ de U fazendo finalmente $\boldsymbol{\beta}_W * \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_W * \boldsymbol{\beta}_U$. Se o espaço U não for T invariante então ter-se-á $B_2 \neq \mathbb{0}$. Mas, se o próprio U também for T-invariante então, na base $\boldsymbol{\beta}_W * \boldsymbol{\beta}_U$ a representação matricial de T é ainda mais simples:

$$[T]_{\beta_W * \beta_U} = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & \mathbb{0} \\ \hline \mathbb{0} & B_2 \end{array}\right]$$

e, neste caso, $B_1 = [T_W]_{\beta_W}$ e $B_2 = [T_U]_{\beta_U}$.

Dadas matrizes quadradas B_1 e B_2, a respectiva soma directa é a matriz que se denota por $B_1 \oplus B_2$ e que se define:

$$B_1 \oplus B_2 := \left[\begin{array}{c|c} B_1 & \mathbb{0} \\ \hline \mathbb{0} & B_2 \end{array}\right].$$

As considerações precedentes mostram então que se $T : V \to V$ é um operador, $U, W \leq V$ são T-invariantes e $\boldsymbol{\beta}_U$ e $\boldsymbol{\beta}_W$ são bases ordenadas de U e W, respectivamente então,

$$[T]_{\beta_W * \beta_U} = [T]_{\beta_W} \oplus [T]_{\beta_U}.$$

Estas definições e resultados generalizam-se sem dificuldade ao caso que envolve mais parcelas na soma directa. Se $B_1, B_2, \dots, B_k$ são matrizes quadradas, então a soma directa $B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k$ define-se:

$$B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hline \mathbb{0} & B_2 & \cdots & \mathbb{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{0} & \mathbb{0} & \cdots & B_k \end{array}\right].$$

Também se tem o seguinte:

Teorema 4.25.— *Se $U_1, \dots U_k$ são subespaços T-invariantes de V, $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_k$ bases ordenadas de $U_1, \dots U_k$, respectivamente e se $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ então, relativamente à base ordenada $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 * \cdots * \boldsymbol{\beta}_k$ tem-se que:*

$$[T]_\beta = [T]_{\beta_1} \oplus \cdots \oplus [T]_{\beta_k}.$$

4.5* Espaços duais

Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$, as transformações lineares $T : V \to \mathbb{K}$ designam-se de *funcionais lineares*.

Exemplo 5.— A transformação $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \mathrm{tr}(A)$ é um funcional linear.[12]

[12] Recorde-se que $\mathrm{tr}(A)$ denota o traço da matriz A que é a soma das entradas na diagonal principal de A e que possui as seguintes propriedades:
1. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$;
2. $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$.

Se V é um espaço linear, $\boldsymbol{\beta}$ é uma base ordenada de V e $\mathrm{x} \in V$ então, denotamos por $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta},i}$ a i-ésima coordenada de x na base $\boldsymbol{\beta}$.

Nestas condições a função $\mathsf{C}_{\boldsymbol{\beta},i} : V \to \mathbb{K}$ definida por $\mathsf{C}_{\boldsymbol{\beta},i}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta},i}$ é um funcional linear.

Observe-se que se $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ então

$$\mathsf{C}_{\boldsymbol{\beta},i}(\mathrm{u}_j) = \delta_{i,j}, \tag{4.4}$$

onde $\delta_{i,j}$ é o denominado *delta de Kronecker*:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (\text{se } i = j) \\ 0 & (\text{se } i \neq j) \end{cases}.$$

Definição 4.26.— *Se V é um espaço linear então o espaço $L(V, \mathbb{K})$ consistindo de todos os funcionais lineares em V designa-se de* espaço dual de V *e denota-se V^*.*

Observe-se que

$$\dim(V^*) = \dim(L(V, \mathbb{K})) = \dim(V) \cdot \dim(V) = \dim(V),$$

pelo que os espaços V e V^* são isomorfos.

Teorema 4.27.— *Suponhamos que V é um espaço linear que possui uma base ordenada $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$. Para cada $1 \leq i \leq n$ denotamos por $\hat{\mathrm{u}}_i$ o funcional linear $\mathsf{C}_{\boldsymbol{\beta},i}$ (definido acima). Consideremos ainda $\boldsymbol{\beta}^* := (\hat{\mathrm{u}}_1, \ldots, \hat{\mathrm{u}}_n)$. Tem-se que $\boldsymbol{\beta}^*$ é uma base ordenada de V^* e, dado um qualquer funcional linear $\hat{\mathrm{x}} \in V^*$ tem-se:*

$$\hat{\mathrm{x}} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathrm{x}}(\mathrm{u}_i)\hat{\mathrm{u}}_i.$$

A base $\boldsymbol{\beta}^*$ descrita no teorema precedente designa-se de *base dual da base $\boldsymbol{\beta}$*.

Se $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ são espaços lineares sobre $\mathbb{K}$ onde se fixam bases ordenadas $\boldsymbol{\beta}_U$ e $\boldsymbol{\beta}_W$ então existe uma correspondência bijectiva entre as transformações lineares $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$ e as matrizes em $\mathbb{K}^{m \times n}$ onde $n = \dim(\boldsymbol{U})$ e $m = \dim(\boldsymbol{V})$. Essa correspondência faz corresponder a cada transformação $\boldsymbol{T}$ a matriz $[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{\beta}_V, \boldsymbol{\beta}_U}$.

Teorema 4.28.— *Consideremos espaços lineares $\boldsymbol{U}$ e V onde se fixam bases ordenadas $\boldsymbol{\beta}_U$ e $\boldsymbol{\beta}_W$. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Nestas condições a transformação $\boldsymbol{T}^* : V^* \to \boldsymbol{U}^*$ definida através da relação*

$$\boldsymbol{T}^*(\hat{\mathrm{x}}) := \hat{\mathrm{x}} \circ \boldsymbol{T} \qquad (\hat{\mathrm{x}} \in V^*)$$

é uma transformação linear e, além disso,

$$[\boldsymbol{T}^*]_{\boldsymbol{\beta}_U^*, \boldsymbol{\beta}_V^*} = [\boldsymbol{T}]^{\top}_{\boldsymbol{\beta}_V, \boldsymbol{\beta}_U}.$$

Vamos agora mostrar como (no caso da dimensão finita) V e V^{**} se podem identificar.[13]

Dado um vector $\mathrm{x} \in V$ definimos $\check{\mathrm{x}} : V^* \to \mathbb{K}$ através de $\check{\mathrm{x}}(\hat{\mathrm{u}}) := \hat{\mathrm{u}}(\mathrm{x})$. Verifica-se sem dificuldade que $\check{\mathrm{x}}$ é um funcional linear em V^* e assim $\check{\mathrm{x}} \in V^{**}$.

O desejado isomorfismo entre V e V^{**} pode agora definir-se através da correspondência $\mathrm{x} \mapsto \check{\mathrm{x}}$.

[13] De facto existe um isomorfismo entre V e V^* e, consequentemente entre V^* e V^{**} mas esses isomorfismos dependem da fixação de uma base em V. No caso da identificação que estamos a referir, entre os espaços V e V^{**} ela é mais forte, na medida em que existe um isomorfismo entre aqueles dois espaços que é independente da escolha de quaisquer bases.

Exercícios

Problema 4.1.— Diga, justificando, quais das seguintes funções são lineares. © ESD

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$;

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$;

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2x_3, 3x_2^2, x_1 - 4x_3)$;

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$;

(f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + rx_2)$.

Problema 4.2.— Considere os vectores $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ e v_3 de um espaço linear U e seja $T : U \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que satisfaz: © ESD

$$T(\mathrm{v}_1) = (1, -1, 2); \quad T(\mathrm{v}_2) = (0, 3, 2); \quad T(\mathrm{v}_3) = (-3, 1, 2).$$

Determine $T(3\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 + 10\mathrm{v}_3)$.

Problema 4.3.— Relativamente à transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$, determine a matriz que a representa relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$. © ESD

Problema 4.4.— Sejam $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, lineares, tais que $T_1(x, y) = (x + y, x - y)$ e $T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y)$. © ESD

Mostre que a transformação linear T_2T_1 é invertível, e determine a matriz que a representa relativamente à base canónica.

Problema 4.5.— Considere as transformações lineares $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por $T_1(x, y) = (x - y, x + y)$ e $T_2(x, y) = (2x, y - x)$, respectivamente. © ESD

(a) Verifique que T_1 e T_2 são invertíveis e determine T_1^{-1} e T_2^{-1}.

(b) Determine a expressão de T_2T_1 e de T_1T_2.

(c) Determine a matriz que representa $(T_2T_1)^{-1}$ em relação às bases canónicas, fixadas na partida e na chegada.

Problema 4.6.— Sejam $v_1 = (1,3), v_2 = (-1,4)$ e © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

a matriz que representa $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base ordenada $\boldsymbol{\beta} = (v_1, v_2)$.

(a) Encontre $T(v_1)_B$ e $T(v_2)_{\boldsymbol{\beta}}$.

(b) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(c) Encontre a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ (na partida e na chegada), e determine uma fórmula para $T(x, y)$.

(d) Use a fórmula obtida na alínea anterior para calcular $T(1, 1)$.

Problema 4.7.— Seja $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ definida por $T(p) = p' - 3p$, onde $\mathbb{R}_2[t]$ designa o espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2, e p' designa a derivada de p. Considere em $\mathbb{R}_2[t]$ as bases ordenadas $\boldsymbol{\beta}_c = (1, t, t^2)$ e $\boldsymbol{\beta} = (1 - t, 2t + 1, 1 - t^2)$. Determine as seguintes representações matriciais de T. © ESD

(a) $A = [T]_{\boldsymbol{\beta}_c}$.

(b) $B = [T]_{\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}}$.

(c) $C = [T]_{\boldsymbol{\beta}}$.

Problema 4.8.— Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por © ESD

$$T(1, 1, 0) = (2, 1), \quad T(0, 1, 1) = (3, -1), \quad T(0, 0, 1) = (2, -1).$$

Escolha a opção correcta:

A) $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$ B) $T(x, y, z) = (y - x, x + 2z)$
C) $T(x, y, z) = (2z + x + y, x - z)$ D) $T(x, y, z) = (2x, x + z)$

Problema 4.9.— Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por: © ESD

$$T(x, y, z) = (x - 2y + z, 4x + 2y - z, -6y + 3z).$$

(a) Determine o núcleo e a imagem de T.

(b) Indique um vector de $\mathbb{R}^3$ que não pertença à imagem de T.

(c) Verifique o teorema da dimensão.

Problema 4.10.— Considere a matriz © AL

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

que representa $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base $\boldsymbol{\beta} = (w_1, w_2)$, onde $w_1 = (-1, 0)$ e $w_2 = (-4, 2)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $T(4, -2) = (16, -8)$; B) $T(-1, 0) = (-8, 4)$;
C) $T(-1, 0) = (-16, 6)$; D) $T(4, -2) = (8, -4)$.

Problema 4.11.— Nos seguintes casos determine a expressão de $T_2T_1(x, y)$ e indique se esta é uma transformação linear. Determine ainda o núcleo e a imagem de T_2T_1. © ESD

(a) $T_1(x, y) = (x, 2y)$, $T_2(x, y) = (x - y, y, x + y)$.

(b) $T_1(x, y) = (2x, -3y, x + y)$, $T_2(x, y, z) = (x - y, y + z)$.

Problema 4.12.— Seja $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o espaço das matrizes reais (2×2). Consideremos $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a aplicação $T(A) = A + A^\top$. © ESD

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Determine a matriz K que representa T em relação à base canónica, $\boldsymbol{\beta}$, de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:
$$\boldsymbol{\beta} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

(c) Determine bases para o núcleo e para a imagem de T.

(d) Diga, justificando, se T é injectiva ou sobrejectiva.

(e) Sendo
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
determine $T^{-1}(M)$.

Problema 4.13.— Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que é definida através da relação $T(x, y, z) = (7z, x + 3y)$. Então a afirmação correcta é: © AL

A) $(0, 0) \in \mathrm{Nuc}(T)$ e $(-1, 1) \in \mathrm{Im}(T)$;

B) $(3, 0) \in \mathrm{Nuc}(T)$ e $(0, 1, 1) \in \mathrm{Im}(T)$;

C) $(-3, 1, 0) \in \mathrm{Nuc}(T)$ e $(1, -1) \in \mathrm{Im}(T)$;

D) $(6, -2, 0) \notin \mathrm{Nuc}(T)$ e $(-1, 1) \in \mathrm{Im}(T)$.

Problema 4.14.— Considere as transformações $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $T(x, y, z) = (x + 1, y, 2z + x)$ e $S(x, y, z) = (2x, y - z)$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: © ESD

A) S e T são transformações lineares.

B) ST não é uma transformação linear.

C) O espaço de chegada de ST é $\mathbb{R}^3$.

D) T é uma transformação linear invertível.

Problema 4.15.— Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida através da relação $T(x, y, z) = (x + 2y + z, x + 3y + 2z)$, onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e considere as seguintes afirmações: © AL

I. T é injectiva,

II. T não é sobrejectiva,

III. T não é injectiva e $(1, -1, 1) \in \mathrm{Nuc}(T)$,

IV. T é sobrejectiva e $(1, -1, 1) \in \mathrm{Nuc}N(T)$,

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I; B) I e II; C) II e III; D) III e IV.

Problema 4.16.— Indique o valor lógico das seguintes proposições: © ESD

(a) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.

(b) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.

(c) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.

(d) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.

(e) Existem transformações lineares injectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes (2×2).

(f) Existem transformações lineares sobrejectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes (2×2).

(g) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ é sobrejectiva.

(h) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^4$ é sobrejectiva.

(i) Existe uma transformação linear bijectiva do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o das matrizes (2×2).

Problema 4.17.— Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, x + y + z)$, e as seguintes afirmações: © AL

I. T é injectiva,

II. T é sobrejectiva,

III. Existe um vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação $T(x, y, z) = (a, b)$ é impossível,

IV. Para qualquer vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ a equação $T(x, y, z) = (a, b)$ é possível e indeterminada.

Qual é a lista completa de afirmações falsas?

A) I; B) I e II; C) I e III; D) II e IV.

Problema 4.18.— Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por: © ESD

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 + x_2)$$

e $\boldsymbol{\beta}_1 = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$ a base ordenada de $\mathbb{R}^2$ formada por $\mathrm{v}_1 = (1, 1)$ e $\mathrm{v}_2 = (-1, 0)$.

(a) Determine a matriz $[T]_{\boldsymbol{\beta}_c}$ que representa T relativamente à base canónica, $\boldsymbol{\beta}_c$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule a matriz $[T]_{\boldsymbol{\beta}_1}$ que representa T relativamente à base $\boldsymbol{\beta}_1$.

(c) Calcule a imagem por T do vector $\mathrm{v} = (1, -1)$ usando a matriz $[T]_{\boldsymbol{\beta}_1}$ e confirme o resultado usando a expressão de T.

Problema 4.19.— Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que: © AL

$$T(1, 0, 0) = (1, 2); \quad T(1, 1, 0) = (2, 4); \quad T(1, 1, 1) = (3, 4).$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) T é injectiva e sobrejectiva;

B) T é invertível mas não sobrejectiva;

C) T não é injectiva mas é sobrejectiva;

D) T não é injectiva nem sobrejectiva.

Problema 4.20.— Considere, em $\mathbb{R}^3$, a base canónica $\boldsymbol{\beta}_c = (e_1, e_2, e_3)$, e a base ordenada $\boldsymbol{\beta} = ((-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (0, 0, 1))$. © ESD

(a) Determine a matriz de mudança de base $[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}]$.

(b) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja representação matricial na base canónica é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz que representa T na base $\boldsymbol{\beta}$.

Problema 4.21.— No espaço linear $\mathbb{R}_2[t]$, dos polinómios reais de variável real de grau ≤ 2, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ definida pela correspondência $p(t) \mapsto 4p'(t) - p(t)$, onde p' designa a derivada de p. © ESD

(a) Determine a matriz que representa T em relação à base canónica $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{R}_2[t]$. A transformação linear T é invertível?

(b) Encontre o polinómio $p \in \mathbb{R}_2[t]$ tal que $T(p(t)) = (t - 1)^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Problema 4.22.— Seja $T : V \to V$ uma função linear e $\boldsymbol{\beta} = (u, v, w)$ uma base ordenada do espaço linear V, tal que $T(u - v) = 2u$, $T(2u + v) = v$ e $T(w) = u - v + w$. A matriz que representa T em relação à base $\boldsymbol{\beta}$ (no espaço de partida e de chegada) é: © ESD

A) $\begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2/3 & -4/3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Apêndices

4.A Demonstrações dos resultados

Demonstração (do teorema 4.6).— Tem-se que $T(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ concluindo-se desta igualdade que $\mathbb{0} \in \mathrm{Nuc}(T)$ e $\mathbb{0} \in \mathrm{Im}(T)$.[14] Por outro lado, se $u, v \in \mathrm{Nuc}(T)$ e se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ então,

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) = \alpha \mathbb{0} + \beta \mathbb{0} = \mathbb{0},$$

ou seja, também se tem que $\alpha u + \beta v \in \mathrm{Nuc}(T)$. Conclui-se deste modo que $\mathrm{Nuc}(T)$ é um subespaço de U.

Quanto a $\mathrm{Im}(T)$, se considerarmos $x, y \in \mathrm{Im}(T)$ sabemos, por definição, que existem $u, v \in U$ tais que $T(u) = x$ e $T(v) = y$. Desta forma, dados escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tem-se:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) = \alpha x + \beta y,$$

ou seja $\alpha x + \beta y \in \mathrm{Im}(T)$. Assim, $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço de V, como se pretendia. ◪

[14] Observe-se o abuso de notação: o que na realidade aqui se afirma é que $T(\mathbb{0}_U) = \mathbb{0}_V$, pelo que $\mathbb{0}_U \in \mathrm{Nuc}(T)$ enquanto que $\mathbb{0}_V \in \mathrm{Im}(T)$. O leitor deve contudo acostumar-se a este tipo de abuso e a ler no contexto a verdadeira natureza do objecto denotado.

Demonstração (do teorema 4.7).—
(1) Se T é injectiva então, dado que $T(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ e não pode existir outro vector com a mesma imagem resulta imediatamente que $\mathrm{Nuc}(T) = \{\mathbb{0}\}$. Por outro lado, se T não é injectiva então, existem $u \neq v$ tais que $T(u) = T(v)$. Neste caso tem-se:

$$T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = \mathbb{0} \Leftrightarrow T(u - v) = \mathbb{0}.$$

Neste caso tem-se que $u - v \neq \mathbb{0}$ e $u - v \in \mathrm{Nuc}(T)$, concluindo-se assim que $\mathrm{Nuc}(T) \neq \{\mathbb{0}\}$. Isto estabelece a equivalência pretendida.
(2) É óbvio, pois $\mathrm{Im}(T) = \{T(u) \mid \in U\}$ e afirmar que T é sobrejectiva é dizer, precisamente que $V = \{T(u) \mid \in U\}$. ◪

Demonstração (do teorema 4.8).—
(1) Sejam $S, T \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Queremos mostrar que $\lambda S + \mu T$ é uma transformação linear. Seja sejam então $u, v \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tem-se:

$$\begin{aligned}(\lambda S + \mu T)(\alpha u + \beta v) &= (\lambda S)(\alpha u + \beta v) + (\mu T)(\alpha u + \beta v)\\ &= \lambda S(\alpha u + \beta v) + \mu T(\alpha u + \beta v)\\ &= \lambda(\alpha S(u)) + \lambda(\beta S(v)) + \mu(\alpha T(u)) + \mu(\beta T(v))\\ &= \alpha(\lambda S(u) + \mu T(u)) + \beta(\lambda S(v) + \mu T(v))\\ &= \alpha(\lambda S + \mu T)(u) + \beta(\lambda S + \mu T)(v),\end{aligned}$$

como se pretendia.
(2) Sejam $x, y \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tem-se:

$$\begin{aligned}TS(\alpha x + \beta y) &= T(s(\alpha x + \beta y)) = T(\alpha S(x) + \beta S(y))\\ &= \alpha T(S(u)) + \beta T(S(v)) = \alpha TS(u) + \beta TS(v),\end{aligned}$$

comprovando que TS é linear.
(3) Suponhamos que $T : U \to V$ tem inversa. Consideremos $x, y \in V$ e $\alpha\beta \in \mathbb{K}$.

Temos:

$$T(\alpha T^{-1}(x) + \beta T^{-1}(y)) = \alpha T(T^{-1}(x)) + \beta T(T^{-1}(y)) = \alpha x + \beta y,$$

o que mostra que $T^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha T^{-1}(x) + \beta T^{-1}(y)$, ou seja que T^{-1} é linear.
(4) Resta-nos provar que $\mathrm{Hom}(U, V)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Alguns aspectos são imediatos: já sabemos que a composição de funções é associativa em geral. A função $\mathbb{1}$ é a função identidade i.e., a função $\mathbb{1} : V \to V$ que satisfaz $\mathbb{1}(x) = x$. Quanto às leis distributivas, verificamos uma delas a outra verifica-se de modo análogo. Tem-se:

$$[T(S + R)](x) = T((S + R)(x)) = T(S(x) + R(x)) = TS(x) + TR(x),$$

a última igualdade pelo fato de T ser linear. Como x é qualquer, concluímos que $T(S + R) = TS + TR$, como se pretendia. ☒

Demonstração (do teorema 4.9).— Verifiquemos em primeiro lugar que T_f definida por (4.1) é uma transformação linear. Ora, dados x, y $\in U$ eles são combinações lineares dos elementos da base β, i.e. existem escalares μ_{u}, λ_{u} (para u $\in$ β) tais que x $= \sum_{|U u\in\beta} \lambda_{\mathrm{u}}$u e y $= \sum_{\mathrm{u}\in\beta} \mu_{\mathrm{u}}$u. Assim, dados escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tem-se

$$\begin{aligned} T_f(\alpha x + \beta y) &= T_f\left(\alpha \textstyle\sum_{u\in B} \lambda_u u + \beta \sum_{u\in B} \mu_u u\right) \\ &= T_f\left(\textstyle\sum_{u\in B}(\alpha\lambda_u + \beta\mu_u)u\right) \\ &= \textstyle\sum_{u\in B}(\alpha\lambda_u + \beta\mu_u)f(u) \\ &= \textstyle\sum_{u\in B}(\alpha\lambda_u f(u) + \beta\mu_u f(u)) \\ &= \textstyle\sum_{u\in B} \alpha\lambda_u f(u) + \sum_{u\in B} \beta\mu_u f(u) \\ &= \alpha \textstyle\sum_{u\in B} \lambda_u f(u) + \beta \sum_{u\in B} \mu_u f(u) \\ &= \alpha T_f(x) + \beta T_f(y), \end{aligned}$$

mostrando, desta forma, que a relação (4.1) define uma transformação linear. Consideremos agora a questão da unicidade. Suponhamos que S, T são transformações lineares tais que, para cada $u \in B$ satisfazem $S(u) = T(u) = f(u)$. Dado $x \in U$ tem-se, para certos escalares λ_u que $x = \sum_{u\in B} \lambda_u u$. Assim:

$$\begin{aligned} S(x) &= S\left(\textstyle\sum_{u\in B} \lambda_u u\right) = \sum_{u\in B} \lambda_u S(u) = \sum_{u\in B} \lambda_u f(u) \\ &= \textstyle\sum_{u\in B} \lambda_u T(u) = S\left(\sum_{u\in B} \lambda_u u\right) \\ &= T(x). \end{aligned}$$

Como $x \in U$ é qualquer, concluímos que $S = T$, como se pretendia. ☒

Demonstração (do lema ??).—
(1) A transformação *identidade* i.e., $\mathbb{1} : U \to U$ definida por $\mathbb{1}(x) = x$ é linear e é um isomorfismo, como se constata sem dificuldade.
(2) Como já vimos, se $T : U \to V$ é um isomorfismo então a inversa $T^{-1} : V \to U$ é um isomorfismo.

(3) Se $S : U \to V$ e $TV \to W$ são isomorfismos, a composição TS é linear (como já foi estabelecido anteriormente) e, por outro lado, a composição de bijecções é uma bijecção. Assim $TS : U \to W$ é um isomorfismo. ⊠

Demonstração (do lema 4.12).— Suponhamos que $T : U \to V$ é um isomorfismo. Mostraremos que se $\boldsymbol{\beta} = \{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n\}$ é uma base de U então, o conjunto $\bar{\boldsymbol{\beta}} = \{T(\mathrm{e}_1), \dots, T(\mathrm{e}_n)\}$ é uma base de V logo $\dim(U) = \dim(V) = n$.

A primeira observação a fazer é a seguinte: $\{\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n\}$ é linearmente independente se e só se $\{T(\mathrm{x}_1), \dots, T(\mathrm{x}_n)\}$ é linearmente independente. Com efeito, supondo que $\{\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n\}$ é linearmente independente mas $\{T(\mathrm{x}_1), \dots, T(\mathrm{x}_n)\}$ é linearmente dependente então, existem escalares não todos nulos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que $\alpha_1 T(\mathrm{x}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathrm{x}_n) = \mathbb{0}$. No entanto, $\alpha_1 T(\mathrm{x}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathrm{x}_n) = T(\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{x}_n)$ porque T é linear. Por outro lado, T é injectiva pelo que $T(\mathrm{v}) = \mathbb{0}$ implica $\mathrm{v} = \mathbb{0}$. Assim concluímos que $\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{x}_n = \mathbb{0}$ e, como os escalares não são todos nulos, isso mostra que os vectores $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n$ são linearmente dependentes contradizendo a hipótese inicial. Somos assim forçados a concluir que $\{T(\mathrm{x}_1), \dots, T(\mathrm{x}_n)\}$ é linearmente independente. Por outro lado se $\{T(\mathrm{x}_1), \dots, T(\mathrm{x}_n)\}$ é linearmente dependente então, existem escalares não todos nulos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que $\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{x}_n = \mathbb{0}$, assim $T(\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{x}_n) = \mathbb{0}$ ou seja, $\alpha_1 T(\mathrm{x}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathrm{x}_n) = \mathbb{0}$ sem que os escalares sejam todos nulos, i.e. $\{T(\mathrm{x}_1), \dots, T(\mathrm{x}_n)\}$ é linearmente dependente.

A demonstração fica concluída demonstrando que

$$V = L_{\mathbb{K}}(\{T(\mathrm{e}_1), \dots, T(\mathrm{e}_n)\}).$$

Ora, como $\mathrm{Im}(T) = V$, se $\mathrm{y} \in V$, existe $\mathrm{x} \in U$ tal que $T(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$. Contudo, tem-se que $\mathrm{x} = \alpha_1 \mathrm{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}_n$ para certos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e assim,

$$y = T(x) = T(\alpha_1 \mathrm{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}_n) = \alpha_1 T(\mathrm{e}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathrm{e}_n),$$

ou seja $\mathrm{x} \in L_{\mathbb{K}}(\{T(\mathrm{e}_1), \dots, T(\mathrm{e}_n)\})$ o que, como x é qualquer, nos permite concluir a demonstração. ⊠

Demonstração (do teorema 4.13).— Consideremos uma base $\boldsymbol{\beta} = \{\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_n\}$ em V e uma base $\bar{\boldsymbol{\beta}} = \mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_n$ em $\mathbb{K}^n$. Consideremos a função $f : \boldsymbol{\beta} \to \bar{\boldsymbol{\beta}}$ definida por $f(\mathrm{u}_i) = \mathrm{w}_i$ para $i = 1, \dots, n$. Pelo teorema 4.9, podemos considerar a transformação linear $T_f : V \to \mathbb{K}^n$ definida por:

$$T_f(\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{u}_n) = \alpha_1 \mathrm{w}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{w}_n.$$

Uma vez que $\alpha_1 \mathrm{w}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{w}_n = \mathbb{0}$ se e só se os escalares forem todos nulos, concluímos que $\mathrm{Nuc}(T_f) = \{\mathbb{0}\}$, ou seja T_f é injectiva. Por outro lado, se $\mathrm{w} \in \mathbb{K}^n$ então existem escalares $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que $\mathrm{w} = \beta_1 \mathrm{w}_1 + \cdots + \beta_n \mathrm{w}_n$. Neste caso,

$$\mathrm{w} = T(\beta_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \beta_n \mathrm{u}_n) \in \mathrm{Im}(T_f).$$

Conclui-se assim que T_f também é sobrejectiva, ou seja é bijectiva como pretendíamos demonstrar. ⊠

Demonstração (do teorema 4.15).—

Demonstração (do teorema 4.16).—
(1) Consideremos W tal que $U = \mathrm{Nuc}(T) \oplus W$. Tem-se que qualquer $\mathrm{x} \in U$ se pode escrever (de modo único) na forma $\mathrm{z}+\mathrm{w}$ onde $\mathrm{z} \in \mathrm{Nuc}(T)$ e $\mathrm{w} \in W$. Dado $\mathrm{y} \in \mathrm{Im}(T)$ existe então um vector $\mathrm{z}+\mathrm{w} \in U$ tal que $T(\mathrm{z}+\mathrm{w}) = y$. Tem-se no entanto que

$$\mathrm{y} = T(\mathrm{z}+\mathrm{w}) = T(\mathrm{z}) + T(\mathrm{w}) = \mathbb{0} + T(\mathrm{w}) = T(\mathrm{w}).$$

Ou seja, denotando por $T \restriction W$ a transformação linear $(T\restriction W) : W \to V$, definida por $(T \restriction W)(\mathrm{w}) = T(\mathrm{w})$, a igualdade acima mostra que $T \restriction W$ é uma sobrejecção $(T \restriction W : W \to \mathrm{Im}(T)$. A mesma transformação também é injectiva pois tendo em conta que $W \cap \mathrm{Nuc}(T) = \{\mathbb{0}\}$ tem-se que $(T \restriction W)(\mathrm{w}) = \mathbb{0}$ see $T(\mathrm{w}) = \mathbb{0}$ sse $\mathrm{w} \in \mathrm{Nuc}(T) \cap W$ sse $\mathrm{w} = \mathbb{0}$. Desta forma concluímos que $T \restriction W : W \cong_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(T)$. Em particular, $\dim(W) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.
(2) Como qualquer subespaço de U possui subespaços complementares, existe W tal que $U = \mathrm{Nuc}(T) \oplus W$. Pela alínea (a), tem-se então que:

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Nuc}(T)) + \dim(W) = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)),$$

ficando assim estabelecido o resultado. ◻

Demonstração (do corolário 4.16.1).— Se T for injectiva então,

$$\dim(U) = \dim(T(U)) = \dim(V)$$

o que implica imediatamente que $T(U) = V$ ou seja T é sobrejectiva. Por outro lado, se T é injectiva, conclui-se facilmente a partir do teorema anterior que necessariamente $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 0$, pelo que T é necessariamente injectiva. ◻

Demonstração (do teorema 4.18).— Se $(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$ é a base canónica de $\mathbb{K}^n$ então:

$$T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = T(\alpha_1 \mathrm{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}_n) = \alpha_1 T(\mathrm{e}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathrm{e}_n).$$

Ou seja, se $[T]$ for a matriz cujas colunas são os vectores $T(e_i)$ (com $i = 1, \dots, n$) então, a igualdade acima mostra que se tem $T(\mathrm{x}) = [T]\mathrm{x}$, como pretendido. ◻

Demonstração (do teorema 4.19).— Imediato a partir das considerações anteriores. ◻

4.B Resoluções dos exercícios

Solução (do exercício 4.1).— (a) Podemos usar directamente a definição.

$$\begin{aligned} T((a,b)+(c,d)) &= T(a+c,b+d) = (a+c+b+d, 3(a+c)-(b+d)) \\ &= ((a+b)+(c+d),(3a-b)+(3c-d) \\ &= (a+b,3a-b)+(c+d,3c-d) \\ &= T(a,b)+T(c,d). \end{aligned}$$

Quanto à multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} T(\alpha(x,y)) &= T(\alpha x,\alpha y) = (\alpha x+\alpha y, 3(\alpha x)-\alpha y) \\ &= (\alpha(x+y),\alpha(3x-y)) = \alpha(x+y,3x-y) \\ &= \alpha T(x,y). \end{aligned}$$

Concluindo-se assim que T é linear. Uma alternativa a este método, que usa directamente a definição, consiste em ver o cálculo de $T(x,y)$ como o resultado do produto por uma matriz conveniente. Neste caso constata-se sem dificuldade que

$$T(x,y) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \text{onde, } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja $T(x,y)=T_A(x,y)$ e já sabemos que as funções da forma T_A são transformações lineares.

(b) Uma transformação, se for linear tem que aplicar o vector nulo no vector nulo. Neste caso $T(0,0)=(0,-1)$, logo não pode ser linear.

Consideramos a título ilustrativo, mais um exemplo.

(e) Vejamos, por exemplo, a multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} T(\alpha(x_1,x_2,x_3)) &= T(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3) = (\alpha x_1+(\alpha x_2)(\alpha x_3), 5(\alpha x_2)^2) \\ &= \alpha(x_1+\alpha x_2x_3, 5\alpha x_2^2) \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\alpha T(\alpha(x_1,x_2,x_3)) = \alpha(x_1+x_2x_3,5x_2^2).$$

Em particular $T(2(0,1,0)) = T(0,2,0) = (0,4) \neq 2T(0,1,0) = 2(0,1) = (0,2)$. Assim, T não é linear. ☒

Solução (do exercício 4.2).— Uma vez que T é linear tem-se que T preserva combinações lineares. Tem-se assim que

$$T(3\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2+10\mathrm{v}_3) = 3T(\mathrm{v}_1)-T(\mathrm{v}_2)+10T(\mathrm{v}_3).$$

Solução (do exercício 4.3).— Como se trata da base canónica tanto no espaço de partida como no espaço de chegada, os vectores de coordenadas coincidem com os vectores. Assim: $T(1,0)=(2,1)$ e $T(0,1)=(-1,1)$ Desta forma, denotando por $\boldsymbol{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$ tem-se:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução (do exercício 4.4).— A transformação linear T_2T_1 é invertível se e só se a sua representação matricial for uma matriz invertível. Sendo $\boldsymbol{\beta}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$ tem-se que

$$[T_2T_1]_{\beta_c} = [T_2]_{\beta_c}[T_1]_{\beta_c}.$$

Tem-se então o seguinte: $T_1(1,0) = (1,1)$ e $T_1(0,1) = (1,-1)$. Por outro lado, $T_2(1,0) = (2,1)$ e $T_2(0,1) = (1.-2)$. Assim,

$$[T_1]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad [T_1]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Pelo que,

$$[T_2T_1]_{\beta_c} = [T_2]_{\beta_c}[T_1]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

As duas linhas da matriz são linearmente independentes (nenhuma é múltipla da outra) por isso a característica é 2 e assim a matriz é invertível. Então, o mesmo sucede com T_2T_1. ◪

Solução (do exercício 4.5).— Podemos usar as representações matriciais relativamente à base canónica, $\boldsymbol{\beta}_c$, de $\mathbb{R}^2$ para responder a todas as questões. Tem-se:

$$[T_1]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad [T_2]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que ambas as matrizes têm característica 2 sendo assim ambas invertíveis. Assim sendo T_1 e T_2 são transformações lineares invertíveis.

(b) Calculando as representações matriciais de T_2T_1 e T_1T_2 obtemos:

$$[T_2T_1]_{\beta_c} = [T_2]_{\beta_c}[T_1]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e,

$$[T_1T_2]_{\beta_c} = [T_1]_{\beta_c}[T_2]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como relativamente à base canónica os vectores coincidem com os vectores de coordenadas, as matrizes das transformações permitem-nos obter directamente as imagens. Assim:

$$(T_2T_1)(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-2y \\ 2y \end{bmatrix} = (2x-2y, 2y),$$

enquanto que

$$(T_1T_2)(x,y) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-y \\ x+y \end{bmatrix} = (3x-y, x+y).$$

(c) Indicamos apenas as contas. Tem-se:

$$[T_2T_1]_{\beta_c}^{-1} = ([T_2]_{\beta_c}[T_1]_{\beta_c})^{-1} = [T_1]_{\beta_c}^{-1}[T_2]_{\beta_c}^{-1}.$$

Solução (do exercício 4.6).—

(a) Por definição de matriz que representa uma transformação relativamente a uma base, $\boldsymbol{\beta}$, tem-se que $T(\mathrm{v}_1)_{\beta}$ e $T(\mathrm{v}_2)_{\beta}$ são, respectivamente, a primeira e a segunda colunas de A. Tem-se assim que $T(\mathrm{v}_1)_{\beta} = (1,-2)$ e $T(\mathrm{v}_2)_{\beta} = (3,5)$.

(b) Temos que a matriz de mudança da base $\boldsymbol{\beta}$ para a base canónica que denotamos por $\boldsymbol{\beta}_c$ é

$$[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

assim,

$$T(\mathrm{v}_1)_{\boldsymbol{\beta}_c} = [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad T(\mathrm{v}_2)_{\boldsymbol{\beta}_c} = [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(c) Tem-se:

$$[T]_{\boldsymbol{\beta}_c} = [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}] A [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}]^{-1}.$$

Como em exemplo anteriores, o facto de na base canónicas os vectores de coordenadas se identificarem com os vectores permite-nos usar a matriz para obter directamente as imagens. Assim:

$$T(x, y) = [T]_{\boldsymbol{\beta}_c} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

(d) Imediato. ◪

Solução (do exercício 4.7).—
(a) Relativamente à base canónica $\boldsymbol{\beta}_c$ temos que:

$$T(1) = 1' - 3 = -3;\ T(t) = t' - 3t = 1 - 3t;\ T(t^2) = (t^2)' - 3t^2 = 2t - 3t^2.$$

Desta forma:

$$[T]_{\boldsymbol{\beta}_c} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(b) Tem-se que:

$$[T]_{\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}} = [T]_{\boldsymbol{\beta}_c} [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}]$$

onde $[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}]$ é a matriz de mudança da base $\boldsymbol{\beta}$ para a base canónica $\boldsymbol{\beta}_c$:

$$[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) Tem-se:

$$[T]_{\boldsymbol{\beta}} = [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_c][T]_{\boldsymbol{\beta}_c}[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}]^{-1}[T]_{\boldsymbol{\beta}_c}[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}].$$

Solução (do exercício 4.8).— Os dados do problema mostram que a matriz que representa T relativamente à base $\boldsymbol{\beta} = ((1,1,0),(0,1,1),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\boldsymbol{\beta}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é

$$[T]_{\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para podermos usar a representação matricial para calcular directamente $T(x, y, z)$ temos que considerar a representação relativa às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ que denotamos por $\boldsymbol{\beta}_c^3$ e de $\mathbb{R}^2$ que já denotámos antes por $\boldsymbol{\beta}_c^2$. Temos então:

$$[T]_{\boldsymbol{\beta}_c^2, \boldsymbol{\beta}_c^3} = [T]_{\boldsymbol{\beta}_c^2, \boldsymbol{\beta}}[\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_c^3] = [T]_{\boldsymbol{\beta}_c^2, \boldsymbol{\beta}}[\boldsymbol{\beta}_c^3, \boldsymbol{\beta}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

ou seja,

$$[T]_{\beta_c^2,\beta_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma tem-se que:

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x + y + 2z, x - z)$$

Solução (do exercício 4.9).— Fixando a base canónica de $\mathbb{R}^3$ que denotamos por $\boldsymbol{\beta}_c$ tem-se:

$$[T]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Como estamos a considerar a representação matricial de T relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ temos que $\mathrm{Nuc}(T) = \mathrm{Nuc}([T]_{\beta_c})$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{EC}([T]_{\beta_c})$.

(a) O núcleo da matriz é o conjunto de soluções do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Neste caso tem-se que

$$\mathrm{Nuc}(T) = \{(x, y, z) \mid x = 0 \wedge z = 2y\} = \{(0, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

ou seja $\mathrm{Nuc}(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(0, 2, 1)\})$.

A imagem de T é gerada pelas colunas de A e, aproveitando a eliminação de Gauss anterior, vemos que são as primeira e segunda colunas de $[T]_{\beta_c}$ que possuem os pivôs, concluindo-se que:

$$\mathrm{Im}(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 4, 0), (-2, 2, 6)\}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 4, 0), (-1, 1, 3)\})$$

(b) Para encontrar um vector que não pertença à imagem de T ou seja, ao espaço das colunas de $[T]_{\beta_c}$ temos que encontrar um vector (x, y, z) para o qual o sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 4 & 1 & y \\ 0 & 3 & z \end{array}\right]$$

seja *impossível*. Tem-se então:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 4 & 1 & y \\ 0 & 3 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 4x - y + 2z \\ 0 & 0 & -12x + 3y - 5z \end{array}\right].$$

Basta-nos então escolher um vector (x, y, z) tal que $-12x + 3y - 5z \neq 0$. Por exemplo $(0, 1, 0)$.

(c) Temos que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ e $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 1$. E estes valores que confirmam a identidade:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Nuc}(T)).$$

Solução (do exercício 4.10).— Para calcular directamente imagens de vectores precisamos da representação matricial relativamente à base canónica, $\boldsymbol{\beta}_c$ de $\mathbb{R}^2$. Essa representação pode ser obtida a partir de A e das matrizes de mudança de base:

$$[T]_{\beta_c} = [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}][T]_{\boldsymbol{\beta}}[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}]^{-1} = [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}]A[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}]^{-1}.$$

Assim:

$$[T]_{\beta_c} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Tem-se então:

$$T(4, -2) = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ -4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = (-16, 6) \quad T(-1, 0) = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ -4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-8, 4)$$

Pelo que a opção B) é a resposta correcta. ◪

Solução (do exercício 4.11).— Resolvemos a título de exemplo a alínea (b). Tem-se

$$\begin{aligned} T_2T_1(x, y) &= T_2(T_1(x, y)) = T_2(2x, -3y, x + y) \\ &= (2x - (-3y), -3y + (x + y)) = (2x + 3y, x - 2y). \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$T_2T_1(x, y) = T_A(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ora, sabemos que as transformações da forma T_A são sempre transformações lineares e assim podemos concluir que T_2T_1 é linear. Além disso, como é fácil constatar A é ainda a representação matricial de T_2T_1 relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$. Assim,

$$\mathrm{Nuc}(T_2T_1) = \mathrm{Nuc}(A), \qquad \mathrm{Im}(T_2T_1) = \mathrm{EC}(A).$$

Quanto ao núcleo de A:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

Pelo que $\mathrm{Nuc}(T) = \{(0, 0)\}$ e, neste caso $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ (porque é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ de dimensão 2). ◪

Solução (do exercício 4.12).—

(a) Basta usar as propriedades da transposição e da adição de matrizes:

$$\begin{aligned} T(\alpha A + \beta B) &= (\alpha A + \beta B) + (\alpha A + \beta B)^\top \\ &= \alpha A + \beta B + (\alpha A)^\top + (\beta B)^\top \\ &= \alpha A + \beta B + \alpha A^\top + \beta B^\top = (\alpha A + \alpha A^\top) + (\beta B + \beta B^\top) \\ &= \alpha(A + A^\top) + \beta(B + B^\top) = \alpha T(A) + \beta T(B). \end{aligned}$$

(b) Tem-se:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e ainda,

$$T\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[T]_\beta=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

(c) Calculando $\mathrm{Nuc}([T]_B)$ temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Ou seja $\mathrm{Nuc}([T]_\beta)=\{(x,y,z,w)\mid x=w=0\wedge z=-y\}$. Tem-se então que

$$\mathrm{Nuc}([T]_\beta)=L_{\mathbb{R}^4}(\{(0,1,-1,0)\})$$

e assim

$$\mathrm{Nuc}(T)=L_{\mathbb{R}^4}(\{(0,1,-1,0)^\beta\})=L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\right\}\right).$$

Quanto à imagem de T ela pode ser calculada através do espaço das colunas de $[T]_\beta$. Tem-se:

$$\mathrm{EC}([T]_\beta)=L_{\mathbb{R}^4}(\{(2,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,2)\})$$

e assim

$$\mathrm{Im}(T)=L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}(\{(2,0,0,0)^\beta,(0,1,1,0)^\beta,(0,0,0,2)^\beta\}),$$

ou seja,

$$\mathrm{Im}(T)=L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right\}\right).$$

(d) A transformação T não é injectiva porque o núcleo não é trivial. Como a dimensão da imagem de T (que é 3) é inferior à dimensão do espaço de chegada (que é 4) T também não é sobrejectiva.

(e) Podemos resolver o problema pela via matricial. Dessa perspectiva queremos determinar os (x,y,z,w) tais que

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\end{bmatrix}$$

ou seja, procuramos as soluções do sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 0 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 0 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

O conjunto solução é $\{(x,y,z,w)\mid x=w=1\wedge z=2-y\}$, ou seja,

$$\{(1,y,2-y,1)\mid y\in\mathbb{R}\}.$$

Assim sendo

$$T^{-1}(M) = \{(1, y, 2-y, 1)^{\beta} \mid y \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & y \\ 2-y & 1 \end{bmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solução (do exercício 4.13).— Relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ a transformação T é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A) A afirmação é falsa porque o núcleo de T é um subespaço do espaço de partida, neste caso $\mathbb{R}^3$, e $(0,0) \notin \mathbb{R}^3$.

B) A afirmação é falsa pelas mesmas razões da alínea precedente.

C) Tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo que $(-3, 1, 0) \in \mathrm{Nuc}(T)$. Por outro lado, calculando a imagem de T tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 7 & x \\ 1 & 3 & 0 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & y \\ 0 & 0 & 7 & x \end{array}\right]$$

que é um sistema sempre possível, concluindo-se que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ e, em particular $(1, -1) \in \mathrm{Im}(T)$. Esta é portanto a afirmação verdadeira. ☐

Solução (do exercício 4.14).—
A) É falsa $T(0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$ e assim T não é linear.

B) Calculando:

$$ST(0,0,0) = S(T(0,0,0)) = S(1,0,0) = (2,0) \neq (0,0)$$

pelo que ST não é linear. Esta é pois a afirmação verdadeira. ☐

Solução (do exercício 4.15).— Relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, a matriz que representa T é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Como as linhas da matriz são linearmente independentes (nenhuma delas é múltipla da outra) tem-se que $\mathrm{car}(A) = 2$ e $\mathrm{nul}(A) = 1$. Assim sendo a dimensão da imagem de T é 2 enquanto que a dimensão do núcleo de T é 1. Como o núcleo não é trivial, T não é injectiva. Por outro lado como a dimensão de $\mathrm{Im}(T) = 2$ e esta é a dimensão do espaço de chegada, tem-se que T é sobrejectiva. Assim I. e II. são falsas e resta-nos decidir se o vector $(1, -1, 1)$ pertence ou não ao núcleo de T. Como estamos a considerar a base canónica no espaço de partida tem-se que $\mathrm{Nuc}(T) = \mathrm{Nuc}(A)$ e calculando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo que $(1, -1, 1) \in \mathrm{Nuc}(T)$. Deste modo a resposta correcta é a D). ☐

Solução (do exercício 4.16).—
(a) Falsa! Como neste caso a dimensão da imagem é no máximo 2 (a dimensão do espaço de chegada), a dimensão do núcleo é pelo menos 3, ou seja, não é trivial.

(b) É verdadeira! Por exemplo a transformação linear definida por

$$T(x, y, z, w, t) = (x, y, z).$$

(c) É verdadeira! Por exemplo a transformação linear

$$T(x, y, z) = (x, y, z, 0, 0).$$

(d) Falsa! A dimensão da imagem de T é no máximo a dimensão do espaço de partida, ou seja 3.

(e) A afirmação é verdadeira. De uma maneira geral se a dimensão do espaço de partida não excede a do espaço de chegada então existem transformações injectivas. Neste caso, o espaço de partida e de chegada têm a mesma dimensão e podemos considerar a transformação que relativamente à bases canónicas nos dois espaços é representada pela matriz identidade de ordem 4. Esta matriz tem nulidade igual a 0 logo a transformação que representa é injectiva.

(f) Verdade! Basta considerar a mesma transformação da alínea precedente. A matriz que a representa tem característica 4 e por isso a imagem tem dimensão 4 e por isso a transformação é sobrejectiva.

(g) É verdadeira! Uma transformação linear entre espaços da mesma dimensão que seja injectiva é também sobrejectiva. Reciprocamente, uma transformação linear entre espaços da mesma dimensão que seja sobrejectiva é também injectiva.

(h) Verdadeira! A mesma justificação da alínea anterior.

(i) Verdadeira! A transformação linear definida na alínea (e) serve de exemplo. ◪

Solução (do exercício 4.17).— Relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, a transformação T é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A característica da matriz é 2 pelo que dimensão da imagem de T é 2, ou seja T é sobrejectiva. Neste caso sabemos que a dimensão do núcleo de T é 1 e, portanto, T não é injectiva. Assim I. é falsa, enquanto que II. é verdadeira. Repare-se que a firmação $T(x, y, z) = (a, b)$ é possível para um dado (a, b) é equivalente a dizer que $(a, b) \in \operatorname{Im}(T)$. Ora, já vimos que T é sobrejectiva. Assim aquela equação é possível para qualquer (a, b) e assim sendo, III. é falsa e IV. é verdadeira. A resposta correcta é então a D). ◪

Solução (do exercício 4.18).—
(a) De acordo com a definição da matriz que representa uma transformação linear, as colunas de $[T]_{\beta_c,\beta_c}$ consistem nos vectores de coordenadas em β_c, das imagens dos vectores da base de partida que é também β_c. Tem-se que $T(1, 0)_{\beta_c} =$

$(1,1)_{\beta_c} = (1,1)$ enquanto que $T(0,1)_{\beta_c} = (-2,1)_{\beta_c} = (-2,1)$.

$$[T]_{\beta_c,\beta_c} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) As colunas da matriz $[T]_{\beta_1}$ são os vectores de coordenadas em $\boldsymbol{\beta}_1$ das imagens dos vectores da base de partida (que é também $\boldsymbol{\beta}_1$). Tem-se $T(1,1) = (-1,2) = 2(1,1) - 3(-1,0)$, o que significa que

$$T(1,1)_{\beta_1} = (2,-3);$$

e $T(-1,0) = (-1,-1) = -1(1,1) + 0(-1,0)$ pelo que

$$T(-1,0)_{\beta_1} = (-1,0).$$

Assim,

$$[T]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Para calcular $T(1,-1)$ através da matriz $[T]_{\beta_1}$ convém recordar que a matriz relaciona cooredenadas, ou seja, $T(1,-1)_{\beta_1} = [T]_{\beta_1}(1,-1)_{\beta_1}$. Ou seja, multiplicando o vector de coordenadas de $(1,-1)$ pela matriz $[T]_{\beta_1,\beta_1}$, obtemos o vector de coordenadas de $T(1,-1)$ em $\boldsymbol{\beta}_1$. A partir deste vector de coordenadas será depois fácil determinar $T(1,-1)$. Assim, antes de mais, precisamos de obter o vector de coordenadas de $(1,-1)$ na base $\boldsymbol{\beta}_1$. Neste caso as contas são simples

$$(1,-1) = -(1,1) - 2(-1,0), \text{ ou seja, } (1,-1)_{\beta_1} = (-1,-2).$$

Tem-se então,

$$T(1,-1)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Daqui resulta que:

$$T(1,-1) = (T(1,-1)_{\beta_1})^{\beta_1} = (0,3)^{\beta_1} = 0(1,1) + 3(-1,0) = (-3,0).$$

Solução (do exercício 4.19).— Podemos considerar a base

$$\boldsymbol{\beta} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$$

no espaço de partida e a base canónica no espaço de chegada.A matriz que representa T relativamente a estas bases é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

As linhas desta matriz são independentes pelo que $\text{car}(A) = 2$ e $\text{nul}(A) = 1$. Depreende-se deste resultado que $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ e $\dim(\text{Nuc}(T)) = 1$. Como a dimensão da imagem iguala a dimensão do espaço de chegada a transformação é sobrejectiva. Mas não é injectiva pois o respectivo núcleo não é trivial.

A resposta correcta é assim a C). ⊠

Solução (do exercício 4.20).—
(a) Tem-se:

$$[\boldsymbol{\beta}_c \boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$[T]_\beta = [\beta, \beta_c]A[\beta_c, \beta] = [\beta_c, \beta]^{-1}A[\beta_c, \beta]$$

ou seja,

$$[T]_\beta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução (do exercício 4.21).—
(a) A matriz pretendida é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação T é invertível sse A é invertível. A matriz A tem claramente característica 3, logo é invertível.

(b) Em termos de coordenadas na bas canónica de $\mathbb{R}_2[t]$ estamos à procura de (a, b, c) tal que

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, procuramos uma solução do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

a que corresponde $p(t) = 25 - 6t + t^2$. ◪

Solução (do exercício 4.22).— A matriz pode construir-se conhecendo $T(u), T(v)$ e $T(w)$ que são os vectores da base β. Tem-se

$$2u + v = T(u - v) + T(2u + v) = T((u - v) + (2u + v)) = T(3u) = 3T(u)$$

assim $T(u) = (2/3)u + (1/3)v$. Por outro lado

$$2u = T(u - v) = T(u) - T(v) = (2/3)u + (1/3)v - T(v).$$

pelo que $T(v) = (-4/3)u + (1/3)v$. As coordenadas destes vectores na base β ocupam as colunas da matriz pretendida pelo que a resposta correcta é a B). ◪