# Semana 12
# Determinantes

As secções marcadas com um asterisco (*) são secções contendo tópicos complementares, mais avançados, e não serão leccionados no curso nem serão alvo de avaliação.

## 5.1 O caso da dimensão 2

A noção de determinante de uma matriz, que iremos nas secções seguintes definir em termos gerais, possui um significado geométrico que queremos ilustrar de forma mais detalhada na dimensão 2.

Um paralelogramo em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de vectores da forma

$$\{\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v} \mid \alpha, \beta \in [0,1]\},$$

onde $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^2$. (Note-se que se o conjunto $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}$ for linearmente independente então os vectores da forma $\alpha\mathrm{u}+\beta\mathrm{v}$ estão sobre uma mesma recta e o *paralelogramo* obtido é degenerado. Ou seja, só quando u e v são independentes se obtém uma figura geométrica que corresponde a um paralelogramo genuíno.)

Como uma transformação linear preserva combinações lineares ela transforma paralelogramos em paralelogramos, mais precisamente, se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear então

$$T(\{\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v} \mid \alpha, \beta \in [0,1]\}) = \{\alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{v}) \mid \alpha, \beta \in [0,1]\},$$

ou seja, se $P$ é o paralelogramo determinado pelos vectores u e v então $T(P)$ é o paralelogramos determinado pelos vectores $T(\mathrm{u})$ e $T(\mathrm{v})$.

Denotamos por $P(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ o paralelogramo determinado pelos vectores u e v.

Os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^2$, i.e. $\boldsymbol{\beta} = ((1,0),(0,1))$, definem um paralelogramo (na verdade um quadrado) cuja área é 1. A imagem deste quadrado através de $T$ é o paralelogramo determinado pelos vectores $(a_1, a_2) = T(1,0)$ e $(b_1, b_2) = T(0,1)$. A razão entre as respectivas áreas é:

$$\frac{\text{área}(P((a_1,a_2),(b_1,b_2))}{\text{área}(P((1,0),(0,1))} = \text{área}(P((a_1,a_2),(b_1,b_2))$$

e pode ser vista como o factor de dilatação do quadrado unitário através da transformação $T$.

Considerações geométricas simples revelam que

$$\text{área}(P((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

Observe-se que considerando a base canónica de $\mathbb{R}^2$, a matriz que representa $T$ relativamente a essa base é precisamente a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Definição 5.1.— *Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. O determinante de $A$ que se denota* $\det(A)$ *ou* $|A|$ *é:*

$$|A| = \det(A) \coloneqq A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}B_{1,2}.$$

Porque não definimos simplesmente $\det(A) = |A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}B_{1,2}|$? A razão prende-se fundamentalmente com as propriedades de uma função definida desta forma. A nossa definição permite-nos trabalhar com uma função que é linear nas linhas (e nas colunas) da matriz $A$ e isso, como veremos na obtenção de métodos eficientes de cálculo do determinante, mesmo quando o generalizarmos a dimensões superiores.[1]

[1] De qualquer forma, a nossa definição permite obter sem dificuldade a área do paralelogramo determinado pelos vectores $\mathrm{u} = (A_{1,1}, A_{2,1})$ e $\mathrm{v} = (A_{1,2}, A_{2,2})$, que é $|\det(A)|$.

Teorema 5.2.— *A função* $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ *é linear em cada linha da matriz $A$. Mais precisamente têm-se as seguintes relações:*

$$\det\left(\begin{bmatrix} \alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v} \\ \mathrm{w} \end{bmatrix}\right) = \alpha \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{w} \end{bmatrix}\right) + \beta \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{v} \\ \mathrm{w} \end{bmatrix}\right)$$

*e*

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{u} \\ \alpha \mathrm{v} + \beta \mathrm{w} \end{bmatrix}\right) = \alpha \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{v} \end{bmatrix}\right) + \beta \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{w} \end{bmatrix}\right).$$

De modo análogo:

Teorema 5.3.— *A função* $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ *é linear em cada coluna da matriz $A$. Mais precisamente têm-se as seguintes relações:*

$$\det\left(\begin{bmatrix} \alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v} & \mathrm{w} \end{bmatrix}\right) = \alpha \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{u} & \mathrm{w} \end{bmatrix}\right) + \beta \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{v} & \mathrm{w} \end{bmatrix}\right)$$

*e*

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{u} & \alpha \mathrm{v} + \beta \mathrm{w} \end{bmatrix}\right) = \alpha \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{u} & \mathrm{v} \end{bmatrix}\right) + \beta \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{u} & \mathrm{w} \end{bmatrix}\right).$$

As seguintes propriedades do determinante podem verificar-se sem dificuldade por inspecção directa:

Teorema 5.4.— *Consideremos matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Tem-se que:*

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. $\det(A^\top) = \det(A)$.
3. *$A$ tem inversa se e só se* $\det(A) \neq 0$ *e, neste caso,* $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

Já mencionámos antes que se se $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ então a área do paralelogramo que este vectores determinam é dada pelo módulo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que a ordem pela qual os dois vectores são fornecidos determina o mesmo paralelogramo a mesma área pode ser dada pelo módulo do determinante da matriz
$$B = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}.$$
De facto, como se verifica sem dificuldade, $\det(A) = -\det(B)$ pelo que considerando o respectivo módulo obtemos, como esperado, o mesmo valor para a área do paralelogramo.

Contudo a questão impõe-se: existirá uma interpretação geométrica para o facto de se ter $\det(A) = -\det(B)$? Para respondermos à questão temos que considerar as matrizes $A$ e $B$ na perspectiva de que elas representam uma transformação linear relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ essas transformações lineares são, respectivamente $T_A(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$ e $T_B(\mathrm{x}) = B\mathrm{x}$. Tendo em conta a constituição das matrizes $A$ e $B$, $T_A(1,0) = (a_1, a_2)$ e $T_A(0,1) = (b_1, b_2)$, enquanto que $T_B(1,0) = (b_1, b_2)$ e $T_B(0,1) = (a_1, a_2)$. Ora, para ir de $(1,0)$ para $(0,1)$ é preciso *rodar* no sentido contrário aos poteiros do relógio (o sentido positivo) e, dada uma transformação linear $T$, ou isso continua acontecer com $T(1,0)$ e $T(0,1)$ e dizemos que $T$ *preserva a orientação* ou então passamos a ter que rodar no sentido dos ponteiros do relógio e, nesse caso dizemos que $T$ inverte a orientação. Ora a diferença de sinal nos determinantes de $A$ e $B$ reflecte precisamente o facto de uma transformações, $T_A$ ou $T_B$, preserva a orientação e a outra inverte-a. De facto, podemos até definir de uma forma natural a orientação de uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ que é 1 ou $-1$, ou *positiva* ou *negativa*, respectivamente, de acordo com o seguinte:

Definição 5.5.— *Seja $\boldsymbol{\beta} = ((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$. A orientação de $\boldsymbol{\beta}$ que se denota $o(\boldsymbol{\beta})$ define-se:*
$$o(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)}{\left|\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)\right|}.$$
Concluímos esta secção com um facto interessante: dada uma matriz $A$ ela representa na base canónica uma transformação linear $T$ tal que $T(1,0) = (A_{1,1}, A_{2,1})$ e $T(0,1) = (A_{1,2}, A_{2,2})$. Vimos no início que $|\det(A)|$ é o quociente entre as áreas do paralelogramo determinado pelos vectores $T(1,0)$ e $T(0,1)$ e do quadrado unitário (determinado pelos vectores $(1,0)$ e $(0,1)$). Ou seja, relativamente à transformação $T$, o $|\det(A)|$ constitui o factor pela qual a área do quadrado unitário é multiplicada para que se obtenha a área do paralelogramo que é a imagem por $T$ desse mesmo quadrado.

O interessante é que este coeficiente não é uma característica do quadrado unitário, na realidade é uma característica da própria transformação $T$, já que para qualquer paralelogramo $P$ se tem:
$$\frac{\text{área}(T(P))}{\text{área}(P)} = |\det(A)|.$$

Para constatar este facto consideremos um paralelogramo, $P$, determinado pelos vectores $(\alpha_1, \alpha_2)$ e $(\beta_1, \beta_2)$. Tem-se então que:

$$\text{área}(P) = \left|\det\left(\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{bmatrix}\right)\right| = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|,$$

enqanto que, tendo-se

$$T(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix}A_{1,1} & A_{1,2}\\ A_{2,1} & A_{2,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{1,1}\alpha_1 + A_{1,2}\alpha_2\\ A_{2,1}\alpha_1 + A_{2,2}\alpha_2\end{bmatrix}$$

e,

$$T(\beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix}A_{1,1} & A_{1,2}\\ A_{2,1} & A_{2,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{1,1}\beta_1 + A_{1,2}\beta_2\\ A_{2,1}\beta_1 + A_{2,2}\beta_2\end{bmatrix}$$

se tem:

$$\begin{aligned}
\text{área}(T(P)) &= \left|\det\left(\begin{bmatrix}A_{1,1}\alpha_1 + A_{1,2}\alpha_2 & A_{1,1}\beta_1 + A_{1,2}\beta_2\\ A_{2,1}\alpha_1 + A_{2,2}\alpha_2 & A_{2,1}\beta_1 + A_{2,2}\beta_2\end{bmatrix}\right)\right| =\\
&= |(A_{1,1}\alpha_1 + A_{1,2}\alpha_2)(A_{2,1}\beta_1 + A_{2,2}\beta_2) - (A_{2,1}\alpha_1 + A_{2,2}\alpha_2)(A_{1,1}\beta_1 + A_{1,2}\beta_2)| =\\
&= |A_{1,1}A_{2,1}\alpha_1\beta_1 + A_{1,1}A_{2,2}\alpha_1\beta_2 + A_{1,2}A_{2,1}\alpha_2\beta_1 + A_{1,2}A_{2,2}\alpha_2\beta_2\\
&\qquad -(A_{2,1}A_{1,1}\alpha_1\beta_1 + A_{2,1}A_{1,2}\alpha_1\beta_2 + A_{2,2}A_{1,1}\alpha_2\beta_1 + A_{2,2}A_{1,2}\alpha_2\beta_2)| =\\
&= |A_{1,1}A_{2,2}\alpha_1\beta_2 - A_{1,1}A_{2,2}\alpha_1\beta_2 + A_{2,1}A_{1,2}\alpha_2\beta_1 - A_{1,1}A_{2,2}\alpha_2\beta_1| =\\
&= (A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,1}A_{2,2})\alpha_1\beta_2 - (A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2})\alpha_2\beta_1 =\\
&= |A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,1}A_{2,2}||\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1| =\\
&= |\det(A)| \cdot \text{área}(P).
\end{aligned}$$

Pelo que,

$$\frac{\text{área}(T(P))}{\text{área}(P)} = |\det(A)|,$$

como se pretendia estabelecer.

Procedemos aos cálculos anteriores tendo representado a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$, mas na realidade poderíamos ter considerado essa representação numa base qualquer. Se $B$ é a matriz que representa $T$ na base $\boldsymbol{\beta}$ de $\mathbb{R}^2$ então $A$ e $B$ estão relacionadas através da matriz de mudança da base $\boldsymbol{\beta}$ para a base canónica, $\boldsymbol{\beta}_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}^2$, $M = [\boldsymbol{\beta}_{\text{can}}, \boldsymbol{\beta}]$ da seguinte forma:

$$B = M^{-1}AM.$$

Mas então tem-se

$$|B| = |M^{-1}AM| = |M^{-1}||A||M| = \frac{1}{|M|}|A||M| = |A|.$$

Definição 5.6.— *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador em $\mathbb{R}^2$.*[2] *O determinante de $T$, que se representa* $\det(T)$ *ou $|T|$, é o determinante de uma qualquer matriz que representa $T$ relativamente a uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$.*

[2] Recorde-se que um operador é uma transformação linear de um espaço nele próprio.

Na secção seguinte iremos generalizar a noção de determinante a espaços $\mathbb{K}^n$, para $n$ arbitrário.

## 5.2 O determinante em espaços $\mathbb{K}^n$

Vamos agora tentar usar algumas das propriedades do determinante que discutimos na secção precedente para o caso particular de $\mathbb{R}^2$, para tentar definir uma função análoga para os espaços $\mathbb{K}^n$.

Definição 5.7.— *Consideremos o espaço $\mathbb{K}^n$. O n-paralelogramo determinado pelos vectores $x_1, \dots, x_n$ é o conjunto de vectores:*

$$\{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]\}.$$

A noção de $n$-paralelogramo estende assim a noção de paralelogramo a dimensões arbitrária. Note-se que um 3-paralelogramo corresponde ao que vulgarmente se designa de paralelepípedo (eventualmente degenerado).

Queremos então usar a generalização da noção de determinante para medir as $n$-áreas dos $n$-paralelogramos.[3]

[3] Uma vez mais, uma 3-área é um volume.

Teorema 5.8.— *Para cada n existe uma única função,*

$$\omega : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ vezes}} \to \mathbb{K}$$

*que satisfaz:*

(1) *para cada $i = 1, \dots, n$ tem-se*

$$\omega(\dots, \alpha u_i + \beta v_i, \dots) = \alpha\omega(\dots, u_i, \dots) + \beta\omega(\dots, v_i, \dots).$$

*Ou seja, $\omega$ é linear em cada um dos seus argumentos (ou como também se diz, é* multilinear*). Visto que os valores de $\omega$ são escalares, $\omega$ nestas condições diz-se uma* forma multilinear.

(2) $\omega(\dots, u_i, \dots, u_j, \dots) = -\omega(\dots, u_j, \dots, u_i, \dots)$ *(a forma é* alternada*).*

(3) *Sendo $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{can}} = (e_1, \dots, e_n)$ a base canónica de $\mathbb{K}^n$, tem-se:*

$$\omega(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Teorema 5.9.— *Seja $\omega : \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ a única forma linear alternada que satisfaz as condições do teorema precedente. Se $x_i \in L_{\mathbb{K}^n}(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\})$, ou seja, se um dos argumentos é combinação linear dos restantes, então $\omega(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

Definição 5.10.— *Dada uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ o seu determinante define-se:*

$$\det(A) = \omega(A_{1*}, \dots, A_{n,*}).$$

A partir da definição de $\omega$ é possível verificar que :

$$\det(A) = \omega(A_{1,*}, \dots, A_{n,*}) = \omega(A_{*,1}, \dots, A_{*,n}).$$

Em particular $\det(A) = \det(A^\top)$.

Tendo em conta o resultado do teorema 5.9 se as linhas da matriz $A$ forem linearmente dependentes tem-se que $\det(A) = 0$.

Podemos assim decidir se $\det(A) = 0$ recorrendo ao método de eliminação de Gauss. Acontece que as propriedades de $\omega$ (descritas no teorema 5.8) são suficientes para descrever a forma como as operações elementares afectam o determinante de uma matriz. Como consequência deste facto é possível usar o método de eliminação de Gauss para calcular o determinante de uma matriz (quadrada) qualquer.

Teorema 5.11.— *Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.*

(1) *Se $B$ se obtém de $A$ trocando duas linhas então $|B| = -|A|$.*

(2) *Se $B$ se obtém de $A$ trocando duas colunas então $|B| = -|A|$.*

(3) *Se $B$ se obtém de $A$, substituindo a linha $i$ de $A$ pelo resultado de lhe somar a linha $j \neq i$, previamente multiplicada por $\alpha$ então $|B| = |A|$.*

(4) *Se $B$ se obtém de $A$, substituindo a coluna $i$ de $A$ pelo resultado de lhe somar a coluna $j \neq i$, previamente multiplicada por $\alpha$ então $|B| = |A|$.*

(5) *Se $B$ resulta de $A$ multiplicando a linha $i$ de $A$ por $\alpha \neq 0$ então $|B| = \alpha|A|$.*

(6) *Se $B$ resulta de $A$ multiplicando a coluna $i$ de $A$ por $\alpha \neq 0$ então $|B| = \alpha|A|$.*

Tendo em conta o resultado precedente, usando o método de eliminação de Gauss, dada uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ existe uma matriz $B$ em escada de linhas e, portanto, triangular superior, tal que $|A| = \alpha|B|$, onde $\alpha$ é um escalar conveniente. Acontece que o determinante de uma matriz triangular se calcula trivialmente:

Teorema 5.12.— *Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ uma matriz triangular. Tem-se que*

$$\det(A) = A_{1,1}A_{2,2}\cdots A_{n,n}.$$

*Ou seja o determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas da diagonal principal de $A$.*

Exemplo 1.— Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembremo-nos que $|A| = |A^\top|$ o que na prática significa que podemos *no cálculo do determinante* usar simultaneamente operações sobre linhas e colunas durante a eliminação de Gauss. Dito isto tem-se:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 13 \end{vmatrix}$$

através da sequência de operações: $C_1 \leftrightarrow C_1$; $L_3 - L_1$; $C_2 \leftrightarrow C_3$; $L_2 \leftrightarrow L_3$; e $L_3 + 2L_2$.

Tem-se então que $|A| = 13$.

Lema 5.13.— *Sejam $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Nestas condições, $|\alpha A| = \alpha^n|A|$.*

Lema 5.14.— *Sejam $E, A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, onde $E$ é uma matriz elementar. Nestas condições,*

$$\det(EA) = \det(E)\det(A).$$

Demonstração.— Comecemos por observar que os determinantes da matrizes elementares são muito fáceis de calcular: $E_i(\alpha)$ e $E_{i,j}(\alpha)$ são triangulares. A diagonal da matriz $E_i(\alpha)$ consiste de 1's em todas as posições, excepto na $i$-ésima que contém o escalar $\alpha$. Assim $\det(E_i(\alpha)) = \alpha$. No caso de $E_{i,j}(\alpha)$ a diaginal é composta exclusivamente de 1's logo $|E_{i,j}(\alpha)| = 1$. Quanto às matrizes de permutação $E_{i,j}$ elas resuta, da identidade por troca de duas linhas logo $\det(E_{i,j}) = -\det(\mathbb{1}) = -1$. O resultado é agora claro tendo em conta que a multiplicação (à esquerda) de uma matriz elementar por uma matriz $A$, corresponde a efectuar uma operação do método de Gauss em $A$. Tendo em conta o efeito dessas operações no determinante de $A$ conclui-se imediatamente que:

$$\begin{aligned}
&\det(E_{i,j}A) = -\det(A) = \det(E_{i,j})\det(A);\\
&\det(E_i(\alpha)A) = \alpha\det(A) = \det(E_i(\alpha))\det(A);\\
&\det(E_{i,j}(\alpha)A) = \det(A) = \det(E_{i,j}(\alpha))\det(A),
\end{aligned}$$

como se pretendia, para concluir a demonstração. ◪

Podemos agora considerar o produto no caso geral.

Teorema 5.15.— *Sejam $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Tem-se que*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Demonstração.— Se $A$ ou $B$ é singular então, o mesmo sucede com $AB$ e, nesse caso a igualdade no enunciado vale trivialmente. Podemos então supor que $A$ não é singular. Neste caso existe uma sequência de matrizes elementares tal que $A = E_1E_2\cdots E_r$. Tem-se então:

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_1E_2\cdots E_rB) = \det(E_1)\det(E_2\cdots E_rB)\\
&= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_rB)\\
&= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B)\\
&= \det(E_1\cdots E_r)\det(A)\\
&= \det(A)\det(B).
\end{aligned}$$

Corolário 5.15.1.— *Se $A$ não é singular então $det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.*

Demonstração.— Da relação $AA^{-1} = \mathbb{1}$ resulta que $\det(A)\det(A^{-1}) = \det\mathbb{1} = 1$. Ou seja $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, como se pretendia. ◪

Não existe nenhuma lei geral que nos permita calcular $\det(A+B)$ em função de $\det(A)$ e $\det(B)$.

## 5.3 Cofactores expansão de Laplace.

Já vimos antes como podemos usar o método de eliminação de Gauss para calcular determinantes. Até agora e em termos práticos esta é a única forma de calcular determinantes. Usar directamente a definição torna-se impraticável pois $S_n$ tem $n!$ elementos um número que se torna rapidamente demasiado grande até para o mais potente dos computadores. Existe um segundo método, que iremos descrever nesta secção, e que explora a possibilidade de calcular determinantes de forma recorrente reduzindo o cálculo de um determinante de uma matriz de ordem $n$ ao cálculo de $n$ determinantes de ordem $n-1$ até reduzir tudo ao cálculo de determinantes de ordem 2 que se calculam sem dificuldade recorrendo à igualdade:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Consideremos uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Cada posição da matriz determina um *menor* de $A$ que se denota por $A^{(i,j)}$ e que é a matriz que se obtém de $A$ suprimindo a linha $i$ e a coluna $j$. Cada posição $(i,j)$ da matriz determina ainda o cofator $(i,j)$ que é $\mathrm{cof}_{i,j}(A)$ ou simplesmente $\mathrm{cof}_{i,j}$ quando $A$ é clara no contexto. A definição é a seguinte: $\mathrm{cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j}\det(A^{(i,j)})$.

Teorema 5.16 (desenvolvimentos de Laplace).— *Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tem-se que:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\mathrm{cof}_{i,j}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\mathrm{cof}_{i,j}(A)$$

*A primeira soma corresponde ao denominado* desenvolvimento ao longo da linha $i$ *(e o segundo diz-se o* desenvolvimento ao longo da coluna $j$. *Os desenvolvimentos descritos nestas fórmulas podem ser feitos ao longo de qualquer linha ou de qualquer coluna.*

Demonstração.— Sabemos que:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma A_{1,\sigma(1)}\cdots A_{r,\sigma(r)}\cdots A_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{s=1}^{n} A_{r,s} \sum_{\sigma\in S_n, \sigma(r)=s} \varepsilon_\sigma A_{1,\sigma(1)}\cdots A_{r-1,\sigma(r-1)} a_{r+1,\sigma(r+1)}\cdots A_{n,\sigma(n)} \end{aligned}$$

Onde, o índice da segunda soma: $\sigma \in S_n, \sigma(r) = s$ se refere às permutações $\sigma \in S_n$ que transformam $r$ em $s$. Seja:

$$A'_{r,s} := \sum_{\sigma\in S_n,\sigma(r)=s} \varepsilon_\sigma A_{1,\sigma(1)}\cdots A_{r-1,\sigma(r-1)} a_{r+1,\sigma(r+1)}\cdots A_{n,\sigma(n)}.$$

Desta forma, $\det(A) = \sum_{s=1}^{n} A_{r,s}A'_{r,s}$. Uma expressão que é válida, independentemente da linha $r$ que se fixe previamente. Fixando a primeira linha de $A$ obtemos:

$$\det(A) = A_{1,1}A'_{1,1} + A_{1,2}A'_{1,2} + \cdots + A_{1,n}A'_{1,n}.$$

Analisando mais detalhadamente os $A'_{1,s}$ nesta expressão constatamos o seguinte:

$$A'_{1,1} = \sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=1} \varepsilon_\sigma A_{2,\sigma(2)}\cdots A_{n,\sigma(n)}.$$

No cálculo das parcelas desta soma intervêm exclusivamente os termos da matriz que não se encontram nem na linha 1 nem na coluna 1 (a linha e a coluna determinadas pela única entrada que multiplica pela soma, neste caso $A_{1,1}$). Cada entrada de $A$ ocorre numa linha e numa coluna de $A$ e, suprimindo na matriz essa linha e essa coluna, obtém-se uma matriz de ordem $(n-1)$ que, como referimos no início da secção se designa de *menor*-$(i,j)$ de $A$ e denota $A^{(i,j)}$. Observe-se que as entradas de $A^{(1,1)}$ se podem discriminar de acordo com o seguinte:

$$A^{(1,1)}_{i,j} = A_{i+1,j+1} \qquad (1 \le i,j \le n-1).$$

Podemos ainda associar a cada permutação $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(1) = 1$ uma permutação $\tau \in S_{n-1}$ definida por

$$\tau(i) = \sigma(i+1) - 1 \qquad (1 \leq i \leq n-1).$$

Observe-se que como $\sigma(1) = 1$, o número de inversões de $\sigma$ é o mesmo que o de $\tau$ pelo que $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau$. Além disso quando $\sigma$ percorre todas as permutações em $S_n$ tais que $\sigma(1) = 1$ se tem que $\tau$ percorre todas as permutações de $S_{n-1}$. Feitas estas considerações tem-se:

$$\begin{aligned} A'_{1,1} &= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1)=1} \varepsilon_\sigma A_{2,\sigma(2)} \cdots A_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_{n-1}} \varepsilon_\tau A^{(1,1)}_{1,\tau(1)} \cdots A^{(1,1)}_{n-1,\tau(n-1)} = \det(A^{(1,1)}). \end{aligned}$$

Podemos agora calcular um qualquer $A'_{r,s}$ reduzindo a situação a esta que acabámos de descrever. De facto calcular $A^prime_{r,s}$ corresponde a calcular $B'_{1,1}$ onde $B$ é a matriz que resulta de $A$ trocando a linha $r$ coma linha $s$ e a coluna $s$ com a coluna 1. Se fizermos isso preservando em $B$ a ordem que as colunas possuíam em $A$ e analogamente para as colunas, então o processo envolve $r-1$ trocas de linhas e $s-1$ trocas de colunas. Tem-se então que

$$\det(B) = (-1)^{(r-1)+(s-1)} \det(A) = (-1)^{r+s-2} \det(A) = (-1)^{r+s} \det(A),$$

ou seja

$$\sum_{j=1}^{n} B_{1,j} B'_{1,j} = (-1)^{r+s} \sum_{j=1}^{n} A_{r,j} A'_{r,j}. \tag{5.1}$$

Observe-se que os $B_{1,j}$ e os $A_{r,j}$ são os mesmos embora não sejam indexados da mesma forma.[4] Observe-se ainda que, se em $A$ substituirmos todas as entradas da da forma $A_{r,j}$ com $j \neq s$ por zeros, obtendo a matriz $C$ então $C'_{r,s} = A'_{r,s}$. Assim, e visto que estamos nesta altura apenas a tentar determinar $A_{r,s}$ vamos supor que todas as entradas da linha $r$ de $A$ são nulas sempre que não estejam na coluna $s$. Neste caso a equação (5.1) fica:

$$B_{1,1} B'_{1,1} = (-1)^{r+s} A_{r,s} A'_{r,s}$$

e como $B_{1,1} = A_{r,s}$ resulta que:

$$A'_{r,s} = (-1)^{r+s} B'_{1,1} = (-1)^{r+s} \det(B^{(1,1)}) = (-1)^{r+s} \det(A^{(r,s)}),$$

o que é suficiente para concluir a demonstração uma vez que o produto $(-1)^{r+s}\det(A^{(r,s)})$ é precisamente $\mathrm{cof}_{i,j}(A)$. Quanto ao desenvolvimento por colunas ele obtém-se a partir deste por transposição. ☐

[4] E.g. $B_{1,1} = A_{r,s}$.

Dados $1 \leq i, j, \leq n$ (onde $n \in \mathbb{N}$) definimos:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (\text{se } i = j) \\ 0 & (\text{se } i \neq j) \end{cases}$$

Corolário 5.16.1.— *Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Tem-se que:*

$$\sum_{s=1}^{n} A_{ks} A'_{r,k} = \delta_{r,s} \det(A) \quad e \quad \sum_{r_1}^{n} A_{r,k} A'_{r,s} = \delta_{r,s} \det(A).$$

Demonstração.— Basta estabelecer uma relação, tal como anteriormente a outra obtém-se por transposição. O caso em que $k =$ é precisamente o resultado do teorema precedente e assim consideraremos apenas o caso em $k \neq r$. Neste caso, consideremos a matriz $\boldsymbol{B}$ que se obtém de $A$ substituindo em $A$ a sua $r$-ésima linha, pela sua $k$-ésima linha. Observe-se que $\boldsymbol{B}$ tem duas linhas iguais e, por isso $\det(\boldsymbol{B}) = 0$. Tem-se então:

$$0 = \det(\boldsymbol{B}) = \sum_{s=1}^{n} B_{r,s} B'_{r,s} = \sum_{s=1}^{n} B_{r,s} A'_{r,s} = \sum_{s=1}^{n} A_{k,s} A'_{r,s},$$

concluindo-se assim a demonstração. ◪

Exemplo 2.— Calcular $\det(A)$ dendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Recorremos ao desenvolvimento de Laplace ao longo da terceira coluna da matriz (apenas uma entrada nesta coluna não é nula o que significa que o desenvolvimento de Laplace terá, neste caso, uma única parcela—as outras anulam-se!). Tem-se:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Podemos prosseguir os cálculos, escolhendo um desenvolvimento ao longo de uma linha ou de uma coluna, escolhendo (para efeitos práticos e de economia de cálculos) uma linha ou uma coluna com um número máximo de zeros. Existem várias possibilidades, optamos pela coluna 1. Assim:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

e, finalmente

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

## 5.4 Matriz adjunta

Dada uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ a *matriz dos cofatores* de $A$ é a matriz do mesmo tipo, que se denota $(\mathrm{Cof}\ A)$ e que se define:

$$(\mathrm{Cof}\ A)_{i,j} \coloneqq \mathrm{cof}_{i,j}(A).$$

A *matriz adjunta de $A$* é a matriz que se denota $(\mathrm{Adj}\ A)$ e se define:

$$(\mathrm{Adj}\ A) = (\mathrm{Cof}\ A)^{\top}.$$

Teorema 5.17.— *Seja $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Tem-se a seguinte relação:*

$$A(\mathrm{Adj}\ A) = (\mathrm{Adj}\ A)A = \det(A)\mathbb{1}.$$

*Em particular, se* $A$ *não é singular (i.e.* $\det(A) \neq 0$*) então:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Adj}\, A).$$

Demonstração.— As primeira igualdade obtém-se directamente a partir da definição de produto de matrizes, notando que $\mathbb{1} = [\delta_{i,j}]$ e usando as relações $\sum_{s=1}^{n} A_{ks}A'_{r,k} = \delta_{r,s}\det(A)$ e $\sum_{r_1}^{n} A_{r,k}A'_{r,s} = \delta_{r,s}\det(A)$ estabelecidas no corolário 5.16.1. (Observe-se que, tendo em conta a notação, $A'_{r,s} = \mathrm{cof}_{r,s}(A)$.)

A segunda relação decorre da unicidade da inversa e do do facto de, no caso de se ter $\det(A) \neq 0$, resultar da primeira relação que:

$$\frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Adj}\, A) = \mathbb{1}$$

ou seja, $A^{-1} = (\det(A))^{-1}(\mathrm{Adj}\, A)$. ◪

Enfatizamos o facto de as relações $A(\mathrm{Adj}\, A) = \mathbb{1}$ e $(\mathrm{Adj}\, A)A = \det(A)\mathbb{1}$ permanecerem válidas em qualquer caso, mesmo quando a matriz $A$ é singular.

Estes resultados fornecem mais uma caracterização da característica de uma matriz.

Teorema 5.18.— *Sejam* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *e* $r$ *o maior natural tal que existe uma sub-matriz* $B \in \mathbb{K}^{r\times r}$ *com* $\det(B) \neq 0$*. Tem-se que* $\mathrm{car}(A) = r$*.*

Uma sub-matriz de $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ é uma matriz $B$ que se obtém da seguinte forma: fixamos linhas de $A$: $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ e colunas $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leq n$ e:

$$B = \begin{bmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_l} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_l} \end{bmatrix}.$$

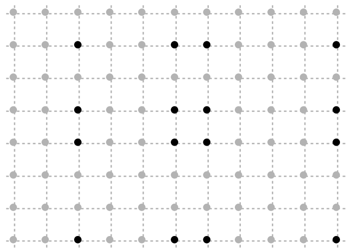

Figura 5.1: Uma sub-matriz $4 \times 4$.

(Ver figura 5.1.)

Demonstração.— Se $B \in \mathbb{K}^{r\times r}$ é uma sub-matriz de $A$ e $\det(B) \neq 0$ então as linhas de $B$ são linearmente independentes. Neste caso as linhas originais de $A$ que contêm as linhas de $B$ são igualmente linearmente independentes e assim,

$$\mathrm{car}(A) \geq r.$$

Já sabemos que $\mathrm{car}(A)$ coincide com $\dim(\mathrm{EC}(A)) = \dim(\mathrm{EL}(A))$.

Supondo que $\mathrm{car}(A) = r$. Fixando $r$ linhas linearmente independentes de $A$ e $r$ cplunas linearmente independentes de $A$, as entradas que elas determinam, definem uma sub-matriz $B \in \mathbb{K}^{r\times r}$ cujas linhas e colunas são todas linearmente independentes e, por isso, $\det(B) \neq 0$. ◪

## 5.5 Exercícios

Problema 5.1.— Use as propriedades do determinante relativas a operações elementares sobre as linhas de uma matriz, para verificar as igualdades: © ESD

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & b & f & g \\ a & h & i & j \end{vmatrix} = abcd; \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & d & l \\ 0 & 0 & c & e & m \\ 0 & b & f & g & p \\ a & h & i & j & u \end{vmatrix} = abcbdk.$$

Problema 5.2.— Considere a matriz: © ESD

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

tal que $\det(A) = -7$. Calcule:

$$\text{(a) } \det(3A); \quad \text{(b) } \det(2A^{-1}); \quad \text{(c) } \det(2A)^{-1}); \quad \text{(d) } \det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$$

Problema 5.3.— Para cada uma das matrizes, $A$, determine os valores do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A - \lambda \mathbb{1}$ não é invertível. © ESD

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Problema 5.4.— Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ se tem que: © ESD

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 5.5.— Sem calcular explicitamente o determinante mostre que: © ESD

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 5.6.— Sem calcular explicitamente o determinante escreva: © ESD

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes em cujas entradas não figurem adições.

Problema 5.7.— Diga, justificando, se é ou não verdadeira a igualdade: © ESD

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$

Problema 5.8.— Sem calcular os determinantes mostre que se têm as seguintes igualdades: © ESD

(a)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Problema 5.9.— Considere a seguinte lista de igualdades. © AL

$$\text{I} \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & 0 & c \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & c \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix};$$

$$\text{II} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ d & -3 & c \\ 2 & a & -3 \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & b \\ 2 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\text{III} \quad \begin{vmatrix} 0 & a & -5 \\ b & c & d \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} b & c \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} 0 & a \\ -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Qual a lista completa das igualdades correctas?

A) III; B) II C) I D) I e II.

Problema 5.10.— Considere a matriz: © ESD

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $\det(M)$;

(b) Calcule $\det(2M)$, $\det(2M^{-1})$ e $\det((2M)^{-1})$.

(c) Diga qual é a entrada $(3,4)$ da matriz $M^{-1}$.

Problema 5.11.— Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e © AL

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 \\ 2\lambda+1 & 2\lambda+2 & 2\lambda \end{vmatrix}$$

Qual o valor de $\Lambda$.

A) $-\lambda(10\lambda+9)$; B) $-3\lambda$; C) $-\lambda(\lambda+2)$; D) $-\lambda^3$.

Problema 5.12.— Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e © AL

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

Qual o valor de $\Lambda$.

A) $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$; B) $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$; C) $(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+4)$;
D) $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-4)$.

Problema 5.13.— Verifique que as matrizes $A$ e $B$ são invertíveis, onde: © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule:

(a) $\det(A^3(2B)^{-1})$;

(b) $\det(A^\top BA)$;

(c) $\det(A+2B)$;

(d) $\det(\operatorname{tr}(B)A)$.

Problema 5.14.— Para $a \in \mathbb{R}$, verifique a igualdade seguinte: © ESD

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 2 & 2 \\ a & a+1 & a+2 & 3 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 \end{vmatrix} = a^2$$

Problema 5.15.— Use o desenvolvimento de Laplace para calcular os determinantes das matrizes seguintes: © ESD

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, calcule as inversas de $A$ e $C$ usando a fórmula da inversa que envolve a matriz dos cofactores.

Problema 5.16.— Resolva os seguintes sistemas recorrendo à regra de Cramer. © ESD

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = -2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = -2 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Problema 5.17.— Resolva as equações: © ESD

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 5.18.— Seja © ESD

$$(\operatorname{Cof} A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Use a fórmula $A(\operatorname{Adj} A) = \det(A)\mathbb{1}$ para calcular $\det(A)$.

(b) Calcule a entrada $(3,2)$ da inversa.

Problema 5.19.— Seja © ESD

$$(\operatorname{Cof} A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Use a fórmula $A(\text{Cof } A) = \det(A)\mathbb{1}$ para calcular $\det(A)$.

(b) Determine a inversa de $A$.

PROBLEMA 5.20.— Considere a matriz 

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d & c \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -3$$

Indique a resposta correcta:

A) $\det(A) = -3$; B) $\det(A) = -6$; C) $\det(A) = -9$; D) $\det(A) = 12$.

## 5.6* Permutações

Denotamos por $\mathbf{n}$ o conjunto $\mathbf{n} := \{1, \ldots, n\}$. O conjunto $S_n$ consiste nas funções $\sigma : \mathbf{n} \to \mathbf{n}$ que são bijectivas. Os elementos de $S_n$ também se designam de *permutações de* $\mathbf{n}$.

Definição 5.19.— *Seja $\sigma \in S_n$ (com $n \geq 2$)*

(a) *$\sigma$ diz-se um* ciclo *se existem $i_1 < \cdots < i_k$ todos em $\mathbf{n}$ tais que,*

   (a) $\sigma(x) = x$ *para* $x \in \mathbf{n} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$;
   (b) $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ *para* $j = 1, \cdots, k-1$;
   (c) $\sigma(i_k) = i_1$.

   *Um tal $\sigma$ representa-se na forma $(i_1 \cdots i_k)$.*

(b) *$\sigma \in S_n$ diz-se uma* transposição *se existem $1 \leq i < j \leq n$ de tal forma que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ e, se $k \neq i, j$ então, $\sigma(k) = k$ i.e. uma transposição troca dois elementos de $\mathbf{n}$ e deixa todos os outros fixos.*

(c) *Uma transposição que permuta dois números consecutivos, $i$ e $i+1$ designa-se de transposição básica.*

A função $\mathbb{1} : \mathbf{n} \to \mathbf{n}$ definida por $\mathbb{1}(k) = k$ para todo o $k \in \mathbf{n}$ é uma permutação (denomina-se de *identidade*). Se $\sigma$ é uma transposição então claramente $\sigma \circ \sigma = \mathbb{1}$. Em geral, representamos uma permutação $\sigma \in S_n$ na seguinte forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Claramente, se $\sigma, \tau \in S_n$ então $\sigma \circ \tau \in S_n$. (Neste contexto omitimos em geral o sinal de composição, escrevendo $\sigma\tau$ em lugar de escrever $\sigma \circ \tau$.) Por outro lado, se $\sigma \in S_n$ então $\sigma^{-1} \in S_n$. Lembramos ainda que a composição de funções não é comutativa (em geral) mas é associativa i.e. $(\sigma\tau)\theta = \sigma(\tau\theta)$.[5] Embora a composição de permutações não seja comutativa em geral, a composição de *ciclos disjuntos* comuta.

Definição 5.20.— *Sejam $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ e $\tau = (j_1, \ldots, j_s)$ dois ciclos em $S_n$. Estes ciclos dizem-se* disjuntos *se os conjuntos $\{i_1, \ldots, i_k\}$ e $\{j_1, \ldots, j_k\}$ forem disjuntos i.e., $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_k\} = \emptyset$.*

Lema 5.21.— *Se $\sigma, \tau \in S_n$ são siclos disjuntos, então $\sigma\tau = \tau\sigma$.*

Demonstração.—

Observe-se que as transposições são casos particulares de ciclos.

Lema 5.22.— *Tem-se que $|S_n| = n!$.*

Demonstração.—

Lema 5.23.— *Suponhamos que $n \geq 2$. Qualquer $\pi \in S_n$ pode ser escrito como um composição de ciclos disjuntos.*

[5] Consideremos um triplo $(X, *, \mathbb{1})$ onde $\mathbb{1} \in X \neq \emptyset$ e $*$ é uma operação binária em $X$ i.e., uma função $* : X \times X \to X$. Como é tradição no caso das operações binárias, em vez de escrevermos $x * y$ em lugar de escrever $*(x, y)$ e, quando é claro no contexto a que operação nos estamos a referir, simplificamos ainda mais a notação, escrevendo simplesmente $xy$ no lugar de $x * y$. O triplo $(X, *, \mathbb{1})$ diz-se um *grupo* se:
(1) $(xy)z = x(yz)$;
(2) $(\forall x) x\mathbb{1} = \mathbb{1}x = x$;
(3) $(\forall x)(\exists y) xy = yx = \mathbb{1}$.
O elemento $y$ que, para cada $x$ satisfaz $xy = yx = \mathbb{1}$ é único pois admitindo que $y'$ também satisfazia a mesma relação ter-se-ia

$$y = y\mathbb{1} = y(xy') = (yx)y' = \mathbb{1}y' = y'.$$

Dada a unicidade de $y$ relativamente a $x$ dizemos que $y$ é o *inverso* de $x$ e denotamo-lo por $x^{-1}$ relativamente à operação $*$. O elemento especial $\mathbb{1}$ também tem uma denominação especial, diz-se o *elemento neutro do grupo*. (Observe-se que nenhum outro elemento do grupo pode satisfazer a propriedade (2) dado que se $\bar{\mathbb{1}}$ também satisfizesse (2) então $\mathbb{1} = \bar{\mathbb{1}}\mathbb{1}$ porque $\bar{\mathbb{1}}$ satisfaz (2) e $\bar{\mathbb{1}}\mathbb{1} = \bar{\mathbb{1}}$, Lema 5.24.— *Suponhamos que $n \geq 2$. Qualquer $\pi \in S_n$ pode ser escrito como um composição de transposições.*

Lema 5.25.— *Tem-se que qualquer transposição pode ser escrita como uma composição de transposições básicas.*

Corolário 5.25.1.— *Suponhamos que $n \geq 2$. Qualquer $\pi \in S_n$ pode ser escrito como um composição de transposições básicas.*

Cada permutação $\sigma \in S_n$ possui um sinal que se denota por $\operatorname{sgn}(\sigma)$ e, $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$. A determinação desse sinal é feita de acordo com o seguinte processo.

Definição 5.26.— *Consideremos $n \geq 2$. Seja $\Delta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ a função definida por:*

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

*Este polinómio diz-se o* discriminante *de $(x_1, \dots, x_n)$.*

Se $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ é o discriminante de $(x_1, \dots, x_n)$ então, cada permutação $\sigma \in S_n$ permite-nos transformar $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ obtendo o polinómio $\Delta_\sigma(x_1, \dots, x_n)$ de acordo com

$$\Delta_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \Delta(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}).$$

Exemplo 3.— Consideremos

$$S_3 = \{\mathbb{1}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

e o discriminante $\Delta(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$.

Teorema 5.27.— *Se $\sigma \in S_n$ é uma transposição de* **n** *então*

$$\Delta_\sigma(x_1, \dots, x_n) = -\Delta(x_1, \dots, x_n).$$

*Assim, se $\sigma = \tau_r \cdots \tau_1$ é uma composição de transposições tem-se que:*

$$\Delta_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (-1)^r \Delta(x_1, \dots, x_n).$$

Definição 5.28.— *De acordo com o resultado anterior e com o facto de qualquer $\sigma \in S_n$ se poder escrever de modo único (a menos da ordem da composição) como uma composição de transposições, resulta que podemos definir:*

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := (-1)^r$$

*onde $\sigma$ é uma composição de transposições da forma: $\sigma = \tau_r \cdots \tau_1$.*

Lema 5.29.— *Seja $\sigma \in S_n$. Tem-se que $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ se e só se a decomposição de $\sigma$ em ciclos disjuntos contém um número ímpar de ciclos de comprimento par.*

Demonstração.—

Uma forma prática de calcular o sinal de uma permutação $\sigma \in S_n$ consiste em determinar o número de *inversões* promovidas por $\sigma$.

Definição 5.30.— *Seja $\sigma \in S_n$. Uma inversão promovida por $\sigma$ é um par $(i, j)$ com $1 \leq i < j \leq n$ tal que $\sigma(i) > \sigma(j)$. O número de inversões promovidas por uma permutação $\sigma$ denota-se por $I(\sigma)$.*

Lema 5.31.— *Seja $\sigma \in S_n$. Tem-se que $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.*

## 5.7* A existência do determinante

### 5.7.1 Formas $n$-lineares alternadas

Definição 5.32.— *Seja $V$ um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ tal que* $\dim(V) = n$. *Uma forma $n$-linear alternada em $V$ é uma função $\Delta : V^n \to \mathbb{K}$ que satisfaz:*

(1) *$\Delta$ é linear em cada argumento i.e.,*

$$\Delta(x_1, \dots, \alpha u_i + \beta v_i, \dots, x_n) = \alpha\Delta(x_1, \dots, u_i, \dots, x_n) + \beta\Delta(x_1, \dots, v_i, \dots, x_n).$$

(2) $\Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\Delta(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$, *para* $1 \leq i < j \leq n$.

Da definição resultam imediatamente algumas propriedades relevantes:

Teorema 5.33.— *Suponhamos que $V$ é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ tal que* $\dim(V) = n$ *e que $\Delta$ é uma forma $n$-linear alternada em $V$. Tem-se:*

(1) *Se $\sigma \in S_n$ então* $\Delta(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\Delta(x_1, \dots, x_n)$;

(2) $\Delta(x_1, \dots, u, \dots, u, \dots, x_n) = 0$, *onde o vector* u *ocupa as posições de $i$-ésimo e $j$-ésimo argumentos ($1 \leq i < j \leq n$).*

(3) *Se* $x_1, \dots, x_n$ *são linearmente dependentes então* $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 0$.

(4) *Tem-se que:*

   (a) $\Delta(x_1, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_j, \dots, x_n) = \Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$;

   (b) $\Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j + \lambda x_i, \dots, x_n) = \Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$.

   *onde* $1 \leq i < j \leq n$.

Demonstração.—

Fixemos agora uma base $\boldsymbol{\beta} = (e_1, \dots, e_n)$ de $V$. Dados $x_1, \dots, x_n \in V$ existem escalares $\xi_{i,j}$ (onde $1 \leq i, j \leq n$) tais que

$$(x_j)_{\boldsymbol{\beta}} = (\xi_{1,j}, \dots, \xi_{n,j}).$$

Usando a $n$-linearidade de $\Delta$, constata-se que

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(\lambda)} \xi_1^{\lambda_1} \cdots \xi_n^{\lambda_n} \Delta(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n}), \tag{5.2}$$

onde $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é uma permutação da sequência $(1, \dots, n)$, ou seja, da forma $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ onde $\sigma \in S_n$. A relação (5.2) pode então reescrever-se na forma:

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \xi_1^{\sigma(1)} \cdots \xi_n^{\sigma(n)} \Delta(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}). \tag{5.3}$$

Ora, já vimos anteriormente que $\Delta(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\Delta(e_1, \dots, e_n)$. Assim, (5.3) pode ainda reescrever-se:

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \Delta(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \xi_1^{\sigma(1)} \cdots \xi_n^{\sigma(n)}. \tag{5.4}$$

Teorema 5.34.— *Sejam, $V$ um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ de dimensão $n$ e $\Delta$ uma forma $n$-linear alternada sobre $V$, não trivial i.e. que não é identicamente nula em $V^n$. Nestas condições, dados vectores* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n \in V$ *tem-se que* $\Delta(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) = 0$ *se e só se os vectores* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ *são linearmente dependentes.*

Demonstração.— Já vimos que se os vectores $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ são linearmente dependentes então $\Delta(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) = 0$. Por outro lado, a relação (5.4) mostra que se uma forma se anula numa base ela é trivial, ou seja, se não é trivial não se anula em nenhuma base e quaisquer $n$ vectores linearmente independentes em $V$ são uma base de $V$. ☐

Um outro facto interessante envolvendo formas $n$-lineares alternadas é que existe essencialmente um único de tais objectos mais precisamente, dadas duas de tais formas elas diferem por um factor escalar (num sentido que tornaremos preciso já de seguida).

Suponhamos que $\Delta$ e $\nabla$ são duas formas $n$-lineares não triviais sobre $V$ onde fixamos uma base $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$. Como entretanto estabelecemos, dados $\mathrm{x}_i \in V$ com vectores de coordenadas $(\mathrm{x}_j)_{\boldsymbol{\beta}} = (\xi_{1,j}, \ldots, \xi_{n,j})$, $(1 \leq j \leq n)$ são válidas as relações:

$$\Delta(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) = \Delta(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \xi_1^{\sigma(1)} \cdots \xi_n^{\sigma(n)}$$

e

$$\nabla(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) = \nabla(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \xi_1^{\sigma(1)} \cdots \xi_n^{\sigma(n)}.$$

Como estamos a assumir que $\nabla$ é não trivial tem-se que $\nabla(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n) \neq 0$ pelo que, considerando

$$\alpha = \frac{\Delta(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)}{\nabla(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)}$$

obtemos que $\Delta(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) = \alpha \nabla(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$. Como esta igualdade vale para quaisquer $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ escrevemos $\Delta = \alpha \nabla$.

Destas considerações resulta então que, uma vez fixada uma forma $n$-linear alternada, não trivial, sobre $V$, todas as outras se obtêm desta, multiplicando-a por um escalar.

Chegados a este ponto coloca-se naturalmente o problema da existência de formas $n$-lineares alternadas não triviais. Para responder a esta questão observamos que se existe uma forma nestas condições então existe certamente uma, $\Delta$, tal que $\Delta(\boldsymbol{\beta}) = 1$, ou seja, nesse caso, e considerando que para cada $1 \leq j \leq n$ se tem $(\mathrm{x}_j)_{\boldsymbol{\beta}} = (\xi_{1,j}, \ldots, \xi_{n,j})$ a função

$$\Delta(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \xi_{1,\sigma(1)} \cdots \xi_{n,\sigma(n)},$$

seria uma forma $n$-linear, alternada, e não trivial. Assim, resta-nos estabelecer que este é efectivamente o caso.

Teorema 5.35.— *Sejam, $V$ um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e* $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ *uma base de $V$. A função $\Delta : V^n \to \mathbb{K}$ definida por*

$$\Delta(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \xi_{1,\sigma(1)} \cdots \xi_{n,\sigma(n)}$$

*onde, para cada $1 \leq i \leq n$, $(\xi_i, 1, \dots, \xi_{i,n})$ é o vector de coordenadas de $\mathrm{x}_i$ na base $\boldsymbol{\beta}$, é uma forma $n$-linear, alternada e não trivial.*

Demonstração.— Não é difícil constatar que $\Delta$ tal como é definida no enunciado é $n$-linear. Além disso não é trivial pois $\Delta(\boldsymbol{\beta}) = 1$ (todos os termos da soma se anulam excepto o termo $\varepsilon\xi_{1,1} \cdots \xi_{n,n}$ que é igual a 1 pois neste caso $\sigma$ é a identidade e o respectivo sinal é 1).

Finalmente temos que mostrar que é alternada. Mostraremos um facto equivalente. Seja $\tau \in S_n$ uma permutação de $\{1, \dots, n\}$. Tem-se:

$$\Delta(\mathrm{x}_{\tau(1)}, \dots, \mathrm{x}_{\tau(n)}) = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \xi_{\tau(1),\sigma(\tau(1))} \cdots \xi_{\tau(n)}^{\sigma(\tau(n))}.$$

Podemos rearranjar os termos de modo a que surjam pela *ordem natural* e assim obter:

$$\Delta(\mathrm{x}_{\tau(1)}, \dots, \mathrm{x}_{\tau(n)}) = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \xi_1^{\sigma\tau^{-1}(1)} \cdots \xi_n^{\sigma\tau^{-1}(n)}.$$

Observe-se que $\sigma$ percorre todas as permutações possíveis em $S_n$ então os termos $\varrho = \sigma\tau^{-1}$ também percorrem todas as possíveis permutações em $S_n$. Além disso, $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\varrho\tau} = \varepsilon_\varrho \varepsilon_\tau$. Assim:

$$\Delta(\mathrm{x}_{\tau(1)}, \dots, \mathrm{x}_{\tau(n)}) = \varepsilon_\tau \sum_{\varrho} \varepsilon_\varrho \xi_1^{\varrho(1)} \cdots \xi_n^{\varrho(n)} = \varepsilon_\tau \Delta(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n).$$

Isto conclui a demonstração. ◻

### 5.7.2 O determinante de uma transformação linear

Sejam, $T : V \to V$ uma transformação linear e $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$ uma base ordenada de $V$. Se consideramos uma forma $n$-linear, $\Delta$, alternada e não trivial em $V$ constata-se sem dificuldade que $\Delta_T : V^n \to \mathbb{K}$ definida por

$$\Delta_T(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n) = \Delta(T(\mathrm{x}_1), \dots, T(\mathrm{x}_n))$$

é também uma forma $n$-linear, alternada e não trivial sobre $V$. Como duas formas deste tipo, sobre um mesmo espaço, coincidem a menos de um factor escalar, tem-se que $\Delta_T = \alpha\Delta$, para um certo $\alpha \neq 0$.

A primeira observação interessante que pdoe ser feita acerca deste escalar é que ele não depende da escolha particular da forma $\Delta$. Com efeito, se $\nabla$ é outra forma deste tipo tem-se, para um certo escalar $\lambda$, que $\nabla = \lambda\Delta$ e assim:

$$\nabla_T = \lambda\Delta_T = \lambda\alpha\Delta = \alpha(\lambda\Delta) = \alpha\nabla.$$

Estes factos justificam a seguinte definição:

Definição 5.36.— *Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. O determinante de $T$, que se denota $\det(T)$ ou por $|T|$ define-se:*

$$|T| = \det(T) = \frac{\Delta_T(\boldsymbol{\beta})}{\Delta(\boldsymbol{\beta})},$$

*onde $\boldsymbol{\beta}$ é uma base ordenada de $V$.*

Tendo em conta a definição anterior, $\Delta_T = \det(T)\Delta$ e $\det(T)$ é o único escalar $\alpha$ tal que $\Delta_T = \alpha\Delta$.

Em particular, temos

$$\Delta(T(\boldsymbol{\beta})) = \det(T)\Delta(\boldsymbol{\beta})$$

pelo que, se $T$ é um automorfismo, se tem que os vectores $T(\boldsymbol{\beta}) = (T(\mathrm{e}_1), \ldots, T(\mathrm{e}_n))$ constituem uma base de $V$. Desta forma tem-se que $\Delta(T(\boldsymbol{\beta})) \neq 0$ (pois, como vimos antes, uma forma $n$-linear, alternada e não trivial não se anula em nenhuma base de $V$). Desta forma, conclui-se imediatamente que $\det(T) \neq 0$.

Inversamente, suponhamos que $\det(T) \neq 0$. Tem-se então que

$$\Delta(T(\boldsymbol{\beta})) = \det(T)\Delta(\boldsymbol{\beta}) \neq 0.$$

Tem-se então que os vectores em $T(\beta)$ são linearmente independentes e, desta forma $T$ é um automorfismo. Acabámos de estabelecer o seguinte:

Teorema 5.37.— *Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Tem-se que $T$ é um automorfismo se e só se* $\det(T) \neq 0$.

Consideremos agora duas transformações lineares $S, T : V \to V$. Neste caso $ST : V \to V$ é linear. Tem-se, neste caso, o seguinte:

$$\Delta(ST(\mathbf{x})) = \det(S)\Delta(T(\mathbf{x})) = \det(S)\det(T)\Delta(\mathbf{x}).$$

Isto permite estabelecer o seguinte:

Teorema 5.38.— *Sejam $S, T : V \to V$, transformações lineares. Tem-se que:*

$$\det(ST) = \det(S)\det(T).$$

Corolário 5.38.1.— *Seja $S : V \to V$ linear. Se $S$ é invertível então* $\det(S^{-1}) = \det(S)^{-1}$.

Demonstração.— Tem-se nestas condições que

$$1 = \det(\mathbb{1}) = \det(SS^{-1}) = \det(S)\det(S^{-1}).$$

Conclui-se desta forma que

$$\det(S^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

como se pretendia. ◪

### 5.7.3 Determinante de uma matriz

Consideremos um espaço linear $V$ e uma base ordenada $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ de $V$, bem como uma transformação linear $T : V \to V$. Relativamente à base $\boldsymbol{\beta}$, seja $A = [T]_{\boldsymbol{\beta}}$ a matriz que representa $T$. Tem-se então que:

$$T(\mathrm{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\mathrm{e}_i.$$

Temos assim que:

$$\begin{aligned}\Delta(T(\mathrm{e}_1), \ldots, T(\mathrm{e}_n)) &= \Delta(\textstyle\sum_i A_{i,1}\mathrm{e}_i, \ldots, \sum_i A_{i,n}\mathrm{e}_i) \\ &= \Delta(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n) \textstyle\sum_\sigma \varepsilon_\sigma A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)} \\ &= \det(T)\Delta(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n).\end{aligned}$$

Daqui resulta que:

$$\det(T) = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)},$$

Ou seja o determinante de $T$ pode ser expresso em termos das componentes de uma matriz que represente $T$ numa base de $V$.

Aproveitamos este facto para definir o determinante de uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Definição 5.39.— *Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ uma matriz. O determinante de $A$, que se denota* $\det(A)$ *ou* $|A|$ *define-se:*

$$|A| = \det(A) := \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)}.$$

Tendo em conta a definição anterior tem-se que:

$$\det(T) = \det([T]_{\beta},$$

qualquer que seja $\beta$. Além disso, também se tem, para quaisquer $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; e,

(2) $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

O determinante de uma matriz $A$ pode ser visto como uma função das linhas da matriz $A$. Se Fixarmos a base canónica em $\mathbb{K}$ e considerarmos a transformação linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ onde $T(\mathrm{e}_j) = A_{i,*}$ então, considerando a forma $n$-linear, alternada e não trivial que assume o valor 1 nesta base tem-se:

$$\Delta(A_{1,*}, \dots, A_{n,*}) = \Delta(T(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n) = \det(T).$$

Tem-se então que

$$det(A) = \Delta(A_{1,*}, \dots, A_{n,ast})$$

constatando-se assim que $\det(A)$ é uma função das linas da matriz $A$.

Um argumento inteiramente análogo mostra que $\det(A)$ é função das colunas de $A$.

Além disso, como a transformação $T$ que considerámos no caso das linhas é representada pela matriz $A^{\top}$ também se conclui imediatamente que $\det(A) = \det(A^{\top})$.

### 5.7.4 Cofatores

Se numa matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ substituirmos a entrada $A_{i,j}$ por 1 e as restantes entradas na linha $i$ e na coluna $j$ por 0 obtemos a matriz $\tilde{A}^{(i,j)}$:

$$\tilde{A}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,j-1} & 0 & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ A_{i-1,1} & \cdots & A_{i-1,j-1} & 0 & A_{i-1,j+1} & \cdots & A_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{i+1,1} & \cdots & A_{i+1,j-1} & 0 & A_{i+1,j+1} & \cdots & A_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,j-1} & 0 & A_{n,j+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Definição 5.40.— *Dada uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, o cofactor de ordem $i,j$ de $A$. denota-se* $\mathrm{cof}_{i,j}(A)$ *e é:*

$$\mathrm{cof}_{i,j}(A) = \det(\tilde{A}^{(i,j)}).$$

Observe-se que

$$\mathrm{cof}_{i,j}(A) = \Delta(A_{1,*}, \dots, A_{i-1,*}, \mathrm{e}_j, A_{i+1,*}, \dots, A_{n,*}$$

onde $\mathrm{e}_j$ denota o $j$-ésimo vector da base canónica de $\mathbb{K}^n$.

Multiplicando cada uma das entradas da linha $i$ pelos respectivos cofactores obtemos:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_j A_{i,j}\mathrm{cof}_{i,j}(A) &= \Delta\Big(A_{1,*}, \dots, A_{i-1,*}, \textstyle\sum_j A_{i,j}\mathrm{e}_j, A_{i+1,*}, \dots, A_{n,*}\Big)\\ &= \Delta(A_{1,*}, \dots, A_{i-1,*}, A_{i,*}, A_{i+1,*}, \dots, A_{n,*})\\ &= \det(A).\end{aligned}$$

Definição 5.41.— *A adjunta da matriz $A$ que se denota por* $\mathrm{Adj}(A)$ *é a transposta da matriz dos cofatores i.e.*

$$\mathrm{Adj}(A) = [\mathrm{cof}_{i,j}(A)]^\top.$$

Teorema 5.42.— *Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ uma matriz. Tem-se que:*

$$A\,\mathrm{Adj}(A) = |A|\mathbb{1}.$$

Demonstração.— Seja $B = A\,\mathrm{Adj}(A)$. Tem-se que

$$B_{i,j} = A_{i,1}\mathrm{cof}_{j,1}(A) + A_{i,2}\mathrm{cof}_{j,2}(A) + \cdots + A_{i,n}\mathrm{cof}_{j,n}(A) = \sum_k A_{i,k}\mathrm{cof}_{j,k}(A).$$

como

$$\mathrm{cof}_{j,k}(A) = \Delta(A_{1,*}, \dots, A_{i-1,*}, \mathrm{e}_k, A_{i+1,*}, \dots, A_{n,*}$$

desta igualdade e da anterior concluímos que

$$B_{i,j} = \Delta(A_{1,*}, \dots, A_{j-1,*}, A_{i,*}, A_{j+1,*}, \dots, A_{n,*}$$

ou seja, $B_{i,j} = |A|$ se $i = j$ e $B_{i,j} = 0$ caso contrário. Ou seja, $B = |A|\mathbb{1}$. ☐

Denotando por $A^{(i,j)}$ a submatriz de $A$ que se obtém eliminando a linha $i$ e a coluna $j$ de $A$ tem-se que

$$\mathrm{cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j}\det(A^{(i,j)}).$$

Podemos estabelecer este facto da seguinte forma. Começando por considerar o caso $i = j = 1$ temos que:

$$\det(A^{(1,1)}) = \sum_{\varrho\in S(\{2,\dots,n\})} \varepsilon_\varrho A_{2,\varrho(2)} \cdots A_{n,\varrho(n)}$$

Por outro lado tem-se que

$$\begin{aligned}\mathrm{cof}_{1,1}(A) &= \Delta((1,0,\dots,0),\dots,(0,A_{n,2},\dots,A_{n,n}))\\ &= \sum_\sigma \varepsilon_\sigma A_{2,\sigma(2)} \cdots A_{n,\sigma(n)}\end{aligned}$$

onde $\sigma$ varia entre todas as permutações tais que $\sigma(1) = 1$. Mas a cada uma destas permutações corresponde uma e uma só permutação $\varrho$ do conjunto $\{2,\dots,n\}$ e ambas têm o mesmo sinal. Concluímos assim que $\det(A^{(1,1)} = \mathrm{cof}_{1,1}(A)$.

O caso geral pode reduzir-se a este, ou seja partindo da matriz $\tilde{A}^{(i,j)}$ e trocando a linha $i$ com as linhas que a precedem e depois a coluna $i$ com as colunas que a precedem promovemos $i + j$ trocas de sinal. Pelo que, recorrendo ao caso precedente concluímos que:

$$\mathrm{cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j}\det(A^{(i,j)}).$$

Para cada $i, j$ a matriz $A^{(i,j)}$ designa-se de *menor-(i,j) de* $A$.

Conjugando todos os resultados entretanto obtidos obtemos os dois desenvolvimentos seguintes para o determinante de uma matriz. O primeiro, ao longo da linha $i$, é:

$$\det(A) = \sum_j (-1)^{i+j} A_{i,j} \det(A^{(i,j)}); \tag{5.5}$$

o segundo, ao longo da coluna $j$ é:

$$\det(A) = \sum_i (-1)^{i+j} A_{i,j} \det(A^{(i,j)}); \tag{5.6}$$

Os desenvolvimentos anteriores são conhecidos como *desenvolvimentos de* Laplace.

# Apêndices

## 5.A Resoluções dos exercícios

Solução (do pronlema 5.1).— Em ambos os casos podemos transformar as matrizes em matrizes triangulares, trocando linhas. Assim,

(a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & b & f & g \\ a & h & i & j \end{vmatrix} \xlongequal{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_4} -\begin{vmatrix} a & h & i & j \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & b & f & g \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xlongequal{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3} \begin{vmatrix} a & h & i & j \\ 0 & b & f & g \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcbd.$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & d & l \\ 0 & 0 & c & e & m \\ 0 & b & f & g & p \\ a & h & i & j & u \end{vmatrix} \xlongequal{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_5} -\begin{vmatrix} a & h & i & j & u \\ 0 & 0 & 0 & d & l \\ 0 & 0 & c & e & m \\ 0 & b & f & g & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \xlongequal{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_4} \begin{vmatrix} a & h & i & j & u \\ 0 & b & f & g & p \\ 0 & 0 & c & e & m \\ 0 & 0 & 0 & d & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = abcbdk$$

Solução (do problema 5.2).— (a) $\det(3A) = 3^3 \det(A)$.

(b) $\det(2A^{-1}) = 2^3 \det(A^{-1}) = \dfrac{2^3}{\det(A)}$.

(c) $\det((2A)^{-1}) = \det\left(\dfrac{1}{2}A^{-1}\right) = \dfrac{1}{2^3}\dfrac{1}{\det(A)}$.

(d)

$$\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}^{\top} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\det(A).$$

Solução (do problema 5.3).— A título ilustrativo consideramos a alínea (c). Tem-se que:

$$A - \lambda \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & 5 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}.$$

Esta matriz não é invertível exactamente quando o seu determinante for nulo. Tem-se:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 5 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

Assim $A - \lambda \mathbb{1}$ não é invertível sse $\lambda \in \{2, 3, 4\}$. ▨

Solução (do problema 5.4).— Para $x = 0$ tem-se:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

porque as linhas da matriz são linearmente dependentes: $L_1 = (-2/3)L_3$.

Fazendo $x = 2$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Mais uma vez porque as linhas são linearmente dependentes: $L_1 = 2L_2$. $\boxslash$

Solução (do problema m5.5).— Tem-se que:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_2+L_1\to L_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

porque $L_1 = (a+b+c)L_3$ e assim, as linhas são linearmente independentes. $\boxslash$

Solução (do problema 5.6).— O determinante é linear, tanto por linhas como por colunas. Recorrendo, neste caso à linearidade por colunas, obtemos:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1+d_1 \\ a_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1+d_1 \\ b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Solução (problema 5.7).— A igualdade é falsa em geral, como se conclui considerando, por exemplo $A = B = \mathbb{1}$. $\boxslash$

Solução (do problema 5.8).— Ilustramos o processo de resolução considerando a alínea (b). Usamos o facto de o determinante se poder obter usando o método de eliminação de Gauss e o facto de $\det(A) = \det(A^\top)$ o que significa que no cálculo do determinante tanto podemos usar operações elementares sobre linhas como sobre colunas. Assim,

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{C_2+C_1\to C_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ 2a_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ 2a_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{(1/2)C_1}{=\!=\!=} 2\begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{-C_2}{=\!=\!=} -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1-a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-a_2 & c_2 \\ a_3 & b_3-a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1+C_2\to C_2}{=\!=\!=} -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

como se pretendia. $\boxslash$

Solução (do problema 5.9).— I. Desenvolvendo o determinante ao longo da primeira coluna tem-se:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & 0 & c \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & c \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$$

pelo que I nem sempre é verdadeira.

II. Tem-se que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ d & -3 & c \\ 2 & a & -3 \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} d & -3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = b(ad+6)$$

enquanto que:

$$d\begin{vmatrix}0 & b\\ a & -3\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}0 & b\\ 2 & -3\end{vmatrix} = -abd + 6b.$$

os valores são portanto simétricos e, nem sempre são iguais.

III. Esta igualdade é verdadeira (corresponde ao desenvolvimento de Laplace ao longo da terceira coluna).

A opção correcta é a A). ◪

Solução (do problema 5.10).— (a)

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -2$$

onde no primeiro caso considerámos o desenvolvimento de Laplace ao longo da primeira coluna e no segundo o desenvolvimento ao longo da primeira linha.

(b) Tem-se $\det(2M) = 2^4\det(M)$; $\det(2M^{-1}) = 2^4(1/\det(M))$; e, por fim, $\det((2M)^{-1}) = \det((1/2)M^{-1}))(1/2^4)(1/\det(M)$.

(c) Tem-se que

$$M^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } M) = \frac{1}{|M|}(\text{Cof } M)^\top.$$

Desta forma a entrada $(3,4)$ da matriz $M^{-1}$ é:

$$\frac{\text{cof}_{4,3}(M)}{|M|} = \frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0.$$

Solução (do problema 5.11).— Tem-se:

$$\begin{vmatrix}\lambda & \lambda & \lambda\\ \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3\\ 2\lambda+1 & 2\lambda+2 & 2\lambda\end{vmatrix} \xlongequal{-L_1+L_2\to L_2} \begin{vmatrix}\lambda & \lambda & \lambda\\ 1 & 2 & 3\\ 2\lambda+1 & 2\lambda+2 & 2\lambda\end{vmatrix} \xlongequal{-L_1+L_2\to L_2} \begin{vmatrix}\lambda & \lambda & \lambda\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -3\lambda.$$

A opção correcta é então a B). ◪

Solução (do problema 5.12).— Tem-se:

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & 5 & 0\\ 1 & \lambda+1 & 2\\ 1 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 7-2\lambda & 1-\lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ 1 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}7-2\lambda & 1-\lambda^2\\ \lambda-1 & 1-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= (7-2\lambda)(1-\lambda) - (\lambda-1)(1-\lambda^2) = (\lambda-1)(\lambda_2)(\lambda+4).$$

Pelo que a resposta correcta é a A). ◪

Solução (do problema 5.13).— Para verificar a invertibilidade basta calcular os determinantes e constatar que não são nulos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Os restantes cálculos fazem-se de acordo com o seguinte:

(a) $\det(A^3(2B)^{-1}) = (1/2)^2|A|^3(1/|B|)$.

(b) $\det(A^\top BA) = |A^\top||B||A| = |A|^2|B|$.

(c)

$$\det(A+2B) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \\ 11 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}.$$

(d) $\det(\mathrm{tr}(B)A) = (\mathrm{tr}(B))^3|A|$. ◪

Solução (do problema 5.14).— Tem-se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 2 & 2 \\ a & a+1 & a+2 & 3 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 2 & 2 \\ a & a+1 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 2 \\ a & a+1 & a+2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= a^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a+1 \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2.$$

Solução (do problema 5.15).— Consideramos a título exemplificativo a alínea (c). Tem-se (desenvolvendo ao longo da segunda coluna) que:

$$|C| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

A inversa de $C$ pode ser obtida através da relação:

$$C^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}\ A) = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Cof}\ A)^\top.$$

Tem-se que:

$$(\mathrm{Cof}\ A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Solução (do problema 5.16).— A título de exemplo consideramos apenas a alínea (b). A matriz dos coeficientes e a colunas dos termos independentes deste sistema são:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Pela regra de Cramer tem-se então que:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Solução (do problema 5.17).— A título ilustrativo consideramos a alínea (b).

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 x$$

A equação $(1-x)^3 x = 0$ tem como soluções $x = 0$ ou $x = 1$. ◻

Solução (do problema 5.18).— (a) Da relação $A(\mathrm{Adj}\ A) = \det(A)\mathbb{1}$ resulta que

$$|A||(\mathrm{Cof}\ A)^\top| = |\det(A)\mathbb{1}| = |A|^4.$$

Assim $|\mathrm{Cof}\ A| = |A|^3$, ou $|A| = \sqrt[3]{|\mathrm{Cof}\ A|}$. (Observe-se que se tem $|\mathrm{Adj}\ A| = |(\mathrm{Cof}\ A)^\top| = |\mathrm{Cof}\ A|$.)

(b) Como $A^{-1} = (1/|A|)(\mathrm{Cof}\ A)^\top$ tem-se que a entrada $(3,2)$ da inversa é

$$A^{-1}_{3,2} = \frac{(\mathrm{Cof}\ A)^\top_{3,2}}{|A|} = \frac{(\mathrm{Cof}\ A)_{2,3}}{|A|} = \frac{1}{|A|}.$$

Solução (do problema 5.19).— Essencialmente como no exercício precedente. ◻

Solução (do problema 5.20).— Tem-se:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d & c \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & -1 & -4 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 0 & d & c \\ -1 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -3.$$

Assim, a opção correcta é a A). ◻