

# Semana 13

## Diagonalização

Iremos focar-nos na seguinte questão: dado um operador  $T : V \rightarrow V$ , existirá uma base,  $\beta$ , de  $V$ , relativamente à qual  $[T]_\beta$  seja simples e.g., *diagonal*? E, em caso afirmativo, como se poderá determinar uma tal base?

DEFINIÇÃO 6.1.— *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Dizemos que  $T$  é diagonalizável se existe uma base  $\beta$  de  $V$  relativamente à qual  $[T]_\beta$  é uma matriz diagonal.*

DEFINIÇÃO 6.2.— *Dada uma matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  dizemos que  $A$  é diagonalizável se o operador  $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  é diagonalizável.*

LEMA 6.3.— *Seja  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . A matriz  $A$  é diagonalizável se e só se existem, uma matriz invertível,  $P$ , e uma matriz diagonal,  $D$ , tais que  $A = PDP^{-1}$ .*

DEMONSTRAÇÃO.— Suponhamos que existem  $P, D$  como no enunciado do lema tais que  $A = PDP^{-1}$ . Note-se que se  $\beta_c$  é a base canónica de  $\mathbb{K}^n$  então,  $A = [T_A]_{\beta_c}$ . Por outro lado, como  $P$  é invertível as colunas de  $P$  constituem uma base  $\beta$  de  $\mathbb{K}^n$  e  $P = [\beta_c, \beta]$ . Tem-se então que

$$D = P^{-1}AP = [\beta_c, \beta]^{-1}[T_A]_{\beta_c}[\beta_c, \beta] = [\beta, \beta_c][T_A]_{\beta_c}[\beta_c, \beta] = [T_A]_\beta$$

ou seja  $T_A$  tem uma representação diagonal na base  $\beta$ , pelo que  $A$  é diagonalizável.

Reciprocamente, se  $A$  é diagonalizável i.e., se existe uma base  $\beta$  de  $\mathbb{K}^n$  tal que  $[T_A]_\beta = D$  é diagonal então seta  $P$  a matriz cujas colunas são os vectores de  $\beta$  ou seja, seja  $P = [\beta_c, \beta]$  onde  $\beta_c$  é a base canónica de  $\mathbb{K}^n$ . Tem-se que:

$$A = [\beta_c, \beta][T_A]_\beta[\beta_c, \beta]^{-1} = PDP^{-1},$$

como se pretendia. □

Como veremos de seguida a chave para a resposta às duas questões iniciais reside em duas noções fundamentais: as noções de *valor próprio* e de *vector próprio*.

### 6.1 VALORES E VECTORES PRÓPRIOS

Se  $T : V \rightarrow V$  é um operador diagonalizável então, existe uma base de  $V$ , digamos que  $\beta = (v_1, \dots, v_n)$  tal que, relativamente a esta base, a representação matricial de  $T$  é uma matriz diagonal, digamos que  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Esta situação implica que, para  $i = 1, \dots, n$  se tem que:

$$T(v_i) = \lambda_i v_i.$$

Inversamente, se  $\beta = (v_1, \dots, v_n)$  é uma base de  $V$  e para  $i = 1, \dots, n$  se tem  $T(v_i) = \lambda_i v_i$  então,

$$[T]_{\beta} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Tem-se assim o seguinte:

**TEOREMA 6.4.**— *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Tem-se que  $T$  é diagonalizável se e só se existem, uma base  $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ , de  $V$  e escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tais que, para  $1 \leq i \leq n$  se tem  $T(v_i) = \lambda_i v_i$ . Neste caso,*

$$[T]_{\beta} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Como se vê, vectores  $x$  tais que  $T(x) = \lambda x$  desempenham um papel crucial no processo de diagonalização. Isolamos esta noções mais claramente produzindo definições rigorosas.

**DEFINIÇÃO 6.5.**— *Seja  $T$  um operador em  $V$ . Um vector não nulo  $x \in V$  diz-se um vector próprio de  $T$  se existe um escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $T(x) = \lambda x$ . O escalar  $\lambda$ , nestas circunstâncias diz-se um valor próprio de  $T$  (associado a  $x$ ).*

**DEFINIÇÃO 6.6.**— *Seja  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  uma matriz. Um vector não-nulo  $x \in \mathbb{K}^n$  é um vector próprio de  $A$  se existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $Ax = \lambda x$ . O escalar  $\lambda$ , nestas circunstâncias diz-se um valor próprio de  $A$  (associado a  $x$ ).*

O teorema 6.4 pode agora reformular-se nos seguintes termos:

**TEOREMA 6.7.**— *Seja  $T$  um operador em  $V$ . Tem-se que  $T$  é diagonalizável se e só se existe uma base  $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ , constituída exclusivamente por vectores próprios de  $T$ . Neste caso  $[T]_{\beta} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , onde para cada  $1 \leq i \leq n$  se tem que  $\lambda_i$  é um valor próprio de  $T$  associado ao vector próprio  $v_i$ .*

Evidentemente, tem-se um resultado totalmente análogo para matrizes.

Precisamos então de ser capazes de determina valores e vectores próprios de operadores ou de matrizes. Na determinação dos valores próprios podemos focar-nos nas matrizes. Com efeito,  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$  se e só se existe um vector não-nulo  $x$  tal que  $T(x) = \lambda x$ . Se  $\beta$  é uma base de  $V$  então tem-se:

$$[T]_{\beta} x_{\beta} = (\lambda x)_{\beta} = \lambda x_{\beta}.$$

Ou seja,

**LEMA 6.8.**— *Se  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$  então  $\lambda$  é um valor próprio de uma qualquer das representações matriciais de  $T$ .*

Reciprocamente, se  $\beta$  é uma base de  $V$ ,  $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$ , e  $[T]_{\beta} x = \lambda x$  então,

$$T(x^{\beta}) = (\lambda x)^{\beta} = \lambda x^{\beta}.$$

Ou seja,

**LEMA 6.9.**— *Se  $\lambda$  é um valor próprio de uma representação matricial de  $T$  então  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$ .*

Resulta dos dois resultados precedentes que um operador  $T$  tem exactamente os mesmos valores próprios que qualquer uma das suas representações matriciais. Iremos por isso focar-nos na questão de determinar os valores próprios de uma matriz.

LEMA 6.10.— *Seja  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  uma matriz. Tem-se que  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  se e só se  $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ .*

DEMONSTRAÇÃO.— Tem-se que  $\lambda$  é valor próprio de  $A$ , se e só se existe  $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$  tal que  $Ax = \lambda x$ . Ora,

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda \mathbb{1})x = 0.$$

Ou seja,  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  se e só se  $\text{Nuc}(A - \lambda \mathbb{1})$  é não-trivial. Ora uma matriz quadrada tem núcleo não trivial precisamente quando o respectivo determinante é nulo. Conclui-se portanto que  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  se e só se  $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ .  $\square$

De acordo com este resultado, os valores próprios de uma matriz  $A$  são os valores de  $t$  que anulam a função  $\det(A - t \mathbb{1})$ .

LEMA 6.11.— *Seja  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  uma matriz. Tem-se:*

$$\det(A - t \mathbb{1}) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

para certos  $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{K}$ .

DEMONSTRAÇÃO.—

Em particular, a função  $\det(A - t \mathbb{1})$  é um polinómio de grau igual à ordem de  $A$ , na variável  $t$ .

DEFINIÇÃO 6.12.— *Seja  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  uma matriz. O polinómio  $c_T(t) = \det(A - t \mathbb{1})$  designa-se de polinómio característico de  $A$ .*

Como vimos antes, os valores próprios de um operador são exactamente as raízes do polinómio característico de qualquer uma das suas representações matriciais. Além disso, se  $A, B$  são representações matriciais de um mesmo operador  $T$  então  $A$  e  $B$  relacionam-se na forma  $A = P^{-1}BP$  onde  $P$  é uma matriz de mudança de base apropriada. Tem-se:

$$\begin{aligned} \det(A - t \mathbb{1}) &= \det(P^{-1}BP - t \mathbb{1}) = \det(P^{-1}BP - tP^{-1}P) = \\ &= \det(P^{-1}(B - t \mathbb{1})P) = \det(P^{-1}) \det(B - t \mathbb{1}) \det(P) = \det(B - t \mathbb{1}). \end{aligned}$$

Ou seja  $c_A(t) = c_B(t)$ . Desta forma, os polinómios característicos de duas representações matriciais de um operador não só têm as mesmas raízes como são exactamente iguais. esta situação justifica a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 6.13.— *Seja  $T$  um operador linear em  $V$ . O polinómio característico de  $T$ , que se denota  $c_T(t)$ , é o polinómio característico de uma qualquer das suas representações matriciais.*

TEOREMA 6.14.— *Seja  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Tem-se:*

- (1) a matriz  $A$  tem, no máximo,  $n$  valores próprios distintos;
- (2) se  $\lambda$  é um valor próprio então  $E_A(\lambda) = \text{Nuc}(A - \lambda \mathbb{1})$  é um subespaço de  $\mathbb{K}^n$  que se designa de espaço próprio de  $A$  associado a  $\lambda$  e consiste nos vectores próprios de  $A$  associados a  $\lambda$ ;

DEMONSTRAÇÃO.—

(1) Os valores próprios são as raízes do polinómio característico  $c_A(t)$ . Como  $c_A(t)$  tem grau  $n$  não pode ter mais que  $n$  raízes daí que não possam existir mais que  $n$  valores próprios de  $A$ .

(2) O núcleo de uma matriz em  $\mathbb{K}^{n \times n}$  é um subespaço de  $\mathbb{K}^n$ . □

O espaço próprio de uma matriz,  $A$ , associado a um valor próprio  $\lambda$  é, como vimos, o núcleo da matriz  $A - \lambda \mathbb{1}$  e contém os vectores próprios de  $A$  associados a  $\lambda$ . Analogamente, se  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$ , o espaço próprio de  $T$  associado a  $\lambda$  define-se:

$$E_T(\lambda) := \text{Nuc}(T - \lambda \mathbb{1}).$$

Fica claro a partir da definição anterior que  $E_T(\lambda)$  consiste nos vectores próprios de  $T$  associados ao valor próprio  $\lambda$ .

LEMA 6.15.— *Sejam,  $T$  um operador em  $V$ ,  $\beta$  uma base ordenada de  $V$  e  $A = [T]_\beta$ . Se  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$  (e de  $A$ ) então,*

$$E_T(\lambda) = (E_A(\lambda))^\beta.$$

DEMONSTRAÇÃO.— Basta ter em conta que  $T(x) = \lambda x$  se e só se  $Ax_\beta = \lambda x_\beta$  e  $Ax = \lambda x$  se e só se  $T(x^\beta) = \lambda x^\beta$ . □

## 6.2 DIAGONALIZAÇÃO

Já vimos antes que a possibilidade de diagonalizar um operador  $T : V \rightarrow V$  (resp. uma matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ) equivale à possibilidade de descrever uma base de  $V$  (resp. de  $\mathbb{K}^n$ ) constituída apenas por vectores próprios. Temos então que coleccionar vectores nos diferentes espaços próprios e tentar formar uma base. Em cada espaço próprio o máximo que conseguimos é coleccionar um número de vectores igual à dimensão desse espaço. O resultado seguinte garante que coleccionando o máximo de vectores em cada espaço próprio e juntando todas essas escolhas obtemos um conjunto linearmente independente que é portanto um conjunto de vectores próprios, linearmente independente e que contém o maior número possível de vectores que um conjunto deste tipo pode conter.

TEOREMA 6.16.— *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador (resp. uma matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ) e sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  valores próprios distintos. Suponhamos ainda que  $0 \neq v_i \in E(\lambda_i)$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Tem-se que  $\{v_1, \dots, v_k\}$  é um conjunto linearmente independente.*

DEMONSTRAÇÃO.— A demonstração é por indução em  $k$ . Não havendo nada a provar no caso em que  $k = 1$ , admitamos que o resultado é válido para  $k - 1$ ,

para tentar estabelecer que também é válido para  $k$ . Suponhamos que para os escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$  se tem

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Aplicando  $(T - \lambda_k \mathbb{1})$  a ambos os lados da igualdade acima obtemos,

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0.$$

Pela hipótese de indução, os vectores  $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  é linearmente independente e assim concluímos que:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k) = \dots = \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0.$$

Como os  $\lambda_i$  são todos distintos, concluímos que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$ . Neste caso a igualdade inicial fica reduzida a

$$\alpha_k v_k = 0$$

e, como  $v_k \neq 0$  concluímos que  $\alpha_k = 0$  ou seja, todos os escalares são nulos. Como se sabe isto equivale a dizer que os vectores são linearmente independentes como queríamos demonstrar.

A situação envolvendo uma matriz trata-se de forma totalmente análoga.  $\square$

**COROLÁRIO 6.16.1.**— *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador (resp. uma matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ) e sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  valores próprios distintos. Suponhamos ainda que  $X_i = \{v_1^i, \dots, v_{s_i}^i\} \subset E(\lambda_i)$  são linearmente independentes, para  $1 \leq i \leq k$ . Tem-se que:*

$$\bigcup_{i=1}^k X_i = \{v_1^1, \dots, v_{s_1}^1, \dots, v_1^k, \dots, v_{s_k}^k\}$$

*é um conjunto linearmente independente.*

**DEMONSTRAÇÃO.**— Suponhamos que:

$$\alpha_1^1 v_1^1 + \dots + \alpha_{s_1}^1 v_{s_1}^1 + \dots + \alpha_1^k v_1^k + \dots + \alpha_{s_k}^k v_{s_k}^k = 0$$

Considerando então  $w_i = \alpha_1^i v_1^i + \dots + \alpha_{s_i}^i v_{s_i}^i$ , para  $1 \leq i \leq k$  tem-se que  $w_i \in E(\lambda_i)$  e,

$$w_1 + \dots + w_k = 0$$

Pelo resultado anterior, isto só é possível se se tiver  $w_i = 0$  para todo o  $i = 1, \dots, k$ . Mas como cada conjunto  $\{v_1^i, \dots, v_{s_i}^i\}$  são linearmente independentes, isso implica que os escalares  $\alpha_1^i, \dots, \alpha_{s_i}^i$  são todos nulos. Como isto é válido para todo o  $i = 1, \dots, k$ , os escalares são todos nulos. Assim, o conjunto

$$\{v_1^1, \dots, v_{s_1}^1, \dots, v_1^k, \dots, v_{s_k}^k\}$$

é linearmente independente, como se pretendia estabelecer.  $\square$

**COROLÁRIO 6.16.2.**— *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador num espaço  $V$  de dimensão  $n$  (resp.  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , uma matriz) se  $T$  (resp.  $A$ ) tem  $n$  valores próprios distintos então  $T$  (resp.  $A$ ) é diagonalizável.*

**DEMONSTRAÇÃO.**— Se  $T$  tem  $n$  valores próprios distintos, digamos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  então, considerando um vector não-nulo  $v_i \in E_T(\lambda_i)$  então, pelo resultado anterior

tem-se que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é um conjunto linearmente independente de vectores em  $V$ . Como  $\dim(V) = n$  tem-se que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é uma base de  $V$  e é constituída exclusivamente por vectores próprios de  $T$ .

O caso das matrizes é análogo.  $\square$

O recíproco deste resultado é claramente falso. O único valor próprio de uma matriz identidade é 1 e essas matrizes, sendo diagonais são claramente diagonalizáveis (se  $D$  é diagonal então  $D = \mathbb{1}^{-1} D \mathbb{1}$ ).

DEFINIÇÃO 6.17.— *Um polinómio  $p(t) \in \mathbb{K}[t]$  decompõe-se em factores lineares se*

$$p(t) = \alpha(t - \xi_1)^{n_1} \dots (t - \xi_k)^{n_k},$$

*para certos  $\alpha, \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{K}$ .*

Por exemplo  $t^2 + 1$  pode ser visto como um polinómio em  $\mathbb{R}[t]$  ou em  $\mathbb{C}[t]$ . Em  $\mathbb{C}$  este factor decompõe-se em factores lineares:  $t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$ . Mas em  $\mathbb{R}$  isso não é possível ( $t^2 + 1$  não tem raízes reais).

TEOREMA 6.18.— *O polinómio característico de um operador (ou de uma matriz) diagonalizável decompõe-se em factores lineares.*

DEMONSTRAÇÃO.— Consideremos um operador  $T$  num espaço,  $V$ , de dimensão  $n$  (o caso das matrizes é idêntico). Seja  $\beta$  uma base ordenada de  $V$  tal que  $[T]_\beta = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  é uma matriz diagonal. Como já verificámos

$$c_T(t) = c_D(t) = \det(D - t\mathbb{1}).$$

Tem-se assim que

$$c_T(t) = \det(\text{diag}(\lambda_1 - t, \dots, \lambda_n - t)) = (-1)^n (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n).$$

Pelo que  $c_T(t)$  possui claramente uma decomposição em factores lineares, como se pretendia estabelecer.  $\square$

A condição enunciada no teorema precedente, sendo necessária não é suficiente (ver o exemplo ???).

DEFINIÇÃO 6.19.— *Seja  $\lambda$  um valor próprio de um operador ou de uma matriz cujo polinómio característico é  $c(t)$ . A multiplicidade algébrica de  $\lambda$ , que se denota  $m_{\text{alg}}(\lambda)$  é o maior natural  $k$  tal que  $(t - \lambda)^k$  divide  $c(t)$ .*

DEFINIÇÃO 6.20.— *Seja  $T$  um operador em  $V$  (resp. uma matriz em  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ) e  $\lambda$  um valor próprio de  $T$  (resp. de  $A$ ). A multiplicidade geométrica de  $\lambda$  que se denota  $m_{\text{geo}}(\lambda)$  é a dimensão de  $E_T(\lambda)$  (resp. de  $E_A(\lambda)$ ).*

TEOREMA 6.21.— *Seja  $T$  um operador em  $V$  (resp. uma matriz em  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ) e  $\lambda$  um valor próprio de  $T$  (resp. de  $A$ ). Tem-se que:*

$$1 \leq m_{\text{geo}}(\lambda) \leq m_{\text{alg}}(\lambda).$$

DEMONSTRAÇÃO.— Partido de uma base  $\{v_1, \dots, v_p\}$  de  $E_T(\lambda)$  podemos estendê-la a uma base  $\beta = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n)$  de  $V$ . Consideremos a matriz  $A =$

$[T]_{\beta}$ . Para  $1 \leq i \leq p$  os vectores  $v_i$  são vectores próprios de  $T$  associados a  $\lambda$ . Tem-se assim que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{1}_p & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbb{1}_p$  é a identidade de ordem  $p$ . Tem-se então que

$$\begin{aligned} c_T(t) &= \det(A - t\mathbb{1}_n) = \det \begin{bmatrix} (\lambda - t\mathbb{1}_p)\mathbb{1}_p & B \\ 0 & C - t\mathbb{1}_{n-p} \end{bmatrix} = \\ &= \det((\lambda - t)\mathbb{1}_p) \det(C - t\mathbb{1}_{n-p}) = \\ &= (\lambda - t)^p c_C(t). \end{aligned}$$

Tem-se então que  $(t - \lambda)^p$  divide  $c_T(t)$  e assim, pela definição da multiplicidade geométrica,  $m_{\text{geo}}(\lambda) = p \leq m_{\text{alg}}(\lambda)$ .  $\square$

**TEOREMA 6.22.**— *Seja  $T$  um operador sobre  $V$  de dimensão  $n$  (resp. uma matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ) cujo polinómio característico se decompõe em factores lineares. Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  os distintos valores próprios de  $T$ . Nestas condições,*

- (1)  *$T$  (resp.  $A$ ) é diagonalizável se e só se, para cada  $i = 1, \dots, k$  se tem  $m_{\text{geo}}(\lambda_i) = m_{\text{alg}}(\lambda_i)$ ;*
- (2) *Se  $T$  (resp.  $A$ ) é diagonalizável e  $\beta_i$  é uma base ordenada de  $E(\lambda_i)$  para cada  $i = 1, \dots, k$  então,  $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k$ , é uma base ordenada de  $V$  (resp. de  $\mathbb{K}^n$ ) que consiste de vectores próprios de  $T$  (resp. de  $A$ ).*

**DEMONSTRAÇÃO.**— Para cada  $i$  denotamos por  $m_i$  e  $d_i$  as multiplicidades algébrica e geométrica de  $\lambda_i$ . Se  $T$  é diagonalizável e  $\beta$  é uma base de vectores próprios de  $T$  então, considerando  $\beta_i = \beta \cap E(\lambda_i)$  resulta que se  $n_i$  é o número de vectores em  $\beta_i$  se tem  $n_i \leq d_i \leq m_i$ . Observe-se ainda que  $c_T(t)$  tem grau  $n$  e,  $c_T(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_k)^{m_k}$  resulta que:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n.$$

Temos então o seguinte:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \leq \sum_{i=1}^k d_i \leq \sum_{i=1}^k m_i = n$$

donde se conclui que

$$\sum_{i=1}^k (m_i - d_i) = 0.$$

A soma anterior é uma soma de números não negativos e, só pode ser nula se as parcelas forem todas nulas i.e.,  $m_i = d_i$  para todo o  $i = 1, \dots, k$ .

Inversamente, suponhamos que para todo o  $i = 1, \dots, k$  se tem  $m_i = d_i$ . Tem-se então que

$$\sum_{i=1}^k d_i = \sum_{i=1}^k m_i = n$$

Considerando em cada  $E(\lambda_i)$  uma base ordenada  $\beta_i$  (contendo portante  $d_i$  vectores) tem-se que

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k$$

é um conjunto linearmente independente com  $n$  vectores, ou seja, é uma base de vectores próprios de  $V$  e, consequentemente  $T$  é diagonalizável.

A situação envolvendo matrizes é totalmente análoga.  $\square$

### 6.3 SUBESPAÇOS INVARIANTES

Se  $v$  é um vector próprio de  $T : V \rightarrow V$  então  $T(L_V(\{v\})) \subset L_V(\{v\})$ . Diz-se que  $L_V(\{v\})$  é  $T$ -invariante. A definição geral é a seguinte:

DEFINIÇÃO 6.23.— *Sejam,  $T$  um operador linear em  $V$  e  $W \leq V$ . Diz-se que o subespaço  $W$  é  $T$ -invariante se  $T(W) \subset W$  i.e. se para qualquer  $w \in W$  se tem  $T(w) \in W$ .*

Cada  $x \in V$  gera um subespaço  $T$ -invariante de  $V$ , mais precisamente o espaço  $T$ -cíclico gerado por  $x$  que é:

$$\langle x \rangle := L_V(\{x, T(x), T^2(x), \dots\})$$

LEMA 6.24.— *Sejam  $T : V \rightarrow V$  um operador em  $V$  e  $x \in V$ . Seja ainda  $\langle x \rangle$  o espaço  $T$ -cíclico gerado por  $x$ . Tem-se*

- (1)  $\langle x \rangle$  é  $T$ -invariante;
- (2) existe um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $T^{k+1}(x) \in L_V(\{x, T(x), \dots, T^k(x)\})$ ;
- (3) se  $k$  é menor natural que satisfaz a alínea anterior então

$$\langle x \rangle = L_V(\{x, T(x), \dots, T^k(x)\}).$$

DEMONSTRAÇÃO.—

Observe-se que se  $W \leq V$  é  $T$ -invariante então a restrição de  $T$  a  $W$  que denotamos por  $T_W$  e se define para cada  $w \in W$  de acordo com:

$$T_W(w) = T(w),$$

é um operador linear em  $w$ . Uma vez que  $T_W$  e  $T$  calculam as imagens de elementos de  $W$  da mesma forma, o operador  $T_W$  herda naturalmente algumas propriedades de  $T$ . O resultado seguinte estabelece uma relação desse tipo entre  $T$  e  $T_W$ .

TEOREMA 6.25.— *Sejam  $T : V \rightarrow V$  um operador e  $W \leq V$ , um subespaço  $T$ -invariante de  $V$ . Nestas condições  $c_{T_W}(t)$  divide  $c_T(t)$ .*

TEOREMA 6.26.— *Sejam,  $T : V \rightarrow V$  um operador,  $0 \neq x \in V$  e  $W = \langle x \rangle$ . Suponhamos que  $\dim(W) = k$ . Nestas condições:*

- (1)  $\{x, T(x), \dots, T^{k-1}(x)\}$  é uma base de  $W$ .
- (2) se  $\alpha_0 x + \alpha_1 T(x) + \dots + \alpha_{k-1} T^{k-1}(x) = 0$  então,

$$c_{T_W}(t) = (-1)^k (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{k-1} t^{k-1} + t^k).$$

DEMONSTRAÇÃO.—

### 6.3.I O TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

TEOREMA 6.27 (DE CAYLEY-HAMILTON).— *Seja  $T$  um operador linear em  $V$  (resp.  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  uma matriz). Tem-se que  $T(T) = \mathbb{0}$  (resp.  $c_A(A) = \mathbb{0}$ ).*

DEMONSTRAÇÃO.— Consideramos a versão do teorema que envolve operadores (a versão matricial é análoga, tá que envolve  $T_A$ ). Mostraremos então que para qualquer  $x \in V$  se tem  $c_T(T)(x) = \mathbb{0}$ . O resultado é óbvio se  $x = \mathbb{0}$  já que qualquer transformação linear transforma o vector nulo no vector nulo. Suponhamos então que  $x \neq \mathbb{0}$  e seja  $W = \langle x \rangle$  i.e.  $W$  é o subespaço cíclico gerado por  $x$ . Suponhamos que  $\dim(W) = k$ . Existem então escalares  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$  tais que

$$\alpha_0 x + \alpha_1 T(x) + \dots + \alpha_{k-1} T^{k-1}(x) + T^k(x) = \mathbb{0}.$$

Tem-se então (de acordo com ???) que

$$c_{T_W}(t) = (-1)^k (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{k-1} t^{k-1} + t^k).$$

Pelo teorema ???  $c_T(t) = c_{T_W}(t)q(t)$  para um certo polinómio  $q(t)$  e, desta forma:

$$c_T(T)(x) = (q(T)c_{T_W}(T))(x) = q(T)(c_{T_W}(T)(x)) = q(T)(\mathbb{0}) = \mathbb{0},$$

como se pretendia. □

## 6.4 POLINÓMIO MÍNIMO

O Teorema de Cayley-Hamilton (Teorema ???) estabelece que  $c_T(T) = \mathbb{0}$  (ou  $C_A(A) = \mathbb{0}$ ) ou seja dado um operador uma matriz quadrada existe um polinómio do qual o operar ou a matriz são *raízes*. Como o grau de um polinómio é um número natural existe seguramente um polinómio naquelas condições que possui grau mínimo entre todos os polinómios,  $p(t)$ , que satisfazem  $p(T) = \mathbb{0}$  (resp.  $P(A) = \mathbb{0}$ ).

Se  $n$  for esse grau mínimo e se  $p(t), q(t)$  são polinómios de grau  $n$  satisfazendo  $p(T) = q(T) = \mathbb{0}$  então efectuando a divisão inteira de  $p(t)$  por  $q(t)$ , obtemos que existem  $s(t)$  e  $r(t)$ , onde o grau de  $r(t)$  é estritamente menor que  $n$  tais que:

$$p(t) = q(t)s(t) + r(t).$$

Como o grau de  $p(t)$  e de  $q(t)$  é  $n$  e o grau de  $r(t)$  é  $< n$ , tem-se necessariamente que  $s(t)$  é uma constante, digamos  $\alpha$ . Ou seja tem-se:

$$p(t) = \alpha q(t) + r(t).$$

Por outro lado,  $\mathbb{0} = p(T) = \alpha q(T) + r(T)$  e como  $q(T) = p(T) = \mathbb{0}$ , tem-se  $r(T) = \mathbb{0}$ . Mas como estamos a assumir que  $n$  o menor grau que um polinómio (não nulo) pode ter de modo a ter  $T$  como *raíz*, tem-se que  $r(t)$  tem que ser o polinómio nulo. Assim  $p(t) = \alpha q(t)$ .

Estas considerações implicam que existe um único polinómio mónico (i.e. o coeficiente do termo de maior grau é 1) de grau mínimo entre os polinómios  $p(t)$  que admitem  $T$  como *raíz*.

DEFINIÇÃO 6.28.— *Seja  $T$  um operador em  $V$  (resp.  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  uma matriz). O polinómio mínimo de  $T$  (resp. de  $A$ ) é o polinómio mónico,  $p(t)$ , de menor grau que*

satisfaz  $p(T) = 0$  (resp.  $p(A) = 0$ ). Denota-se  $m_T(t)$  (resp.  $m_A(t)$ ), ou simplesmente por  $m(t)$ .

Como resulta claro da discussão que precede a definição qualquer operador ou qualquer matriz quadrada possuem um (único) polinómio mínimo.

TEOREMA 6.29.— *Seja  $T$  um operador em  $V$  (resp.  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  uma matriz). Se  $p(t) \in \mathbb{K}[t]$  é um polinómio tal que  $p(T) = 0$  (resp.  $p(A) = 0$ ) então  $m(t)$  divide  $p(t)$ .*

DEMONSTRAÇÃO.— Pelo algoritmo da divisão tem-se,

$$p(t) = m(t)s(t) + r(t)$$

onde o grau de  $r(t)$  é menor que o grau de  $m(t)$ . Mas a relação anterior implica que  $r(T) = 0$  e como o grau de  $r(t)$  é menor que o grau do polinómio mínimo isso, por sua vez, implica que  $r(t)$  é o polinómio nulo e assim

$$p(t) = m(t)s(t),$$

o que implica que  $m(t)$  divide  $p(t)$ .  $\square$

TEOREMA 6.30.— *Sejam,  $T$  um operador em  $V$ ,  $\beta$  uma base ordenada de  $V$  e  $A = [T]_\beta$ . Tem-se que  $m_T(t) = m_A(t)$ .*

COROLÁRIO 6.30.I.— *Para qualquer matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  tem-se que  $m_A(t) = m_{T_A}(t)$ .*

TEOREMA 6.31.— *Sejam  $T$  um operador em  $V$  (resp.  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  uma matriz). Tem-se que  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$  (resp. de  $A$ ) se e só se  $m_T(\lambda) = 0$  (resp.  $m_A(\lambda) = 0$ ). Desta forma o polinómio mínimo e o polinómio característico têm as mesmas raízes.*

DEMONSTRAÇÃO.— Tem-se que  $m(t)$  divide  $c(t)$  i.e., existe  $s(t) \in \mathbb{K}[t]$  tal que  $c(t) = s(t)m(t)$ . Desta forma qualquer raiz de  $m(t)$  é também raiz de  $c(t)$ , ou seja as raízes de  $m(t)$  são valores próprios de  $T$  (resp. de  $A$ ).

Reciprocamente se  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$  (ou de  $A$ ) então podemos fixar  $0 \neq x \in E(\lambda)$ . Se  $x \in E_T(\lambda)$  (resp.  $x \in E_A(\lambda)$ ) então  $x \in E_{p(T)}(p(\lambda))$  (resp.  $x \in E_{p(A)}(p(\lambda))$ ). Tem-se então que  $0 = m(T)(x) = p(\lambda)x$  e, como  $x \neq 0$  concluímos que  $p(\lambda) = 0$ , como se pretendia.  $\square$

COROLÁRIO 6.31.I.— *Se  $T$  é um operador em  $V$  (resp.  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  é uma matriz) e se*

$$c(t) = (\lambda_1 - t)^{n_1} (\lambda_2 - t)^{n_2} \cdots (\lambda_k - t)^{n_k}$$

onde os  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  são os distintos bvalores próprios de  $T$  (resp. de  $A$ ) então, existem naturais  $m_i \leq n_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$  tais que:

$$m(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k}.$$

TEOREMA 6.32.— *Suponhamos que  $T$  é um operador linear em  $V$  de dimensão  $n$ . Supondo que  $V = \langle x \rangle$  então,  $m_T(t)$  e  $c_T(t)$  têm o mesmo grau, pelo que*

$$m_T(t) = (-1)^n c_T(t).$$

DEMONSTRAÇÃO.— Nas condições indicadas  $\beta = (x, T(x), \dots, T^{n-1}(x))$  é uma base ordenada de  $V$ . Dado um qualquer polinómio  $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_k t^k$

de grau  $k < n$  (tendo-se, portanto, que  $\alpha_k \neq 0$ ) obtemos:

$$p(T)(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 T(x) + \cdots + \alpha_k T^k(x)$$

ou seja é uma combinação linear de vectores de  $\beta$  onde nem todos os escalares são nulos e, por isso,  $p(T)(x) \neq 0$  ou seja  $p(T) \neq 0$ . Em suma o menor grau de um polinómio que admite  $T$  como raiz é o grau do polinómio característico e, como  $(-1)^n c_T(t)$  é mónico, tem-se que  $m_T(t) = (-1)^n c_T(t)$ .  $\square$

TEOREMA 6.33.— *Seja  $T$  um operador em  $V$  (resp.  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  uma matriz). O operador  $T$  (resp. a matriz  $A$ ) é diagonalizável se e só se*

$$m(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_k)$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são os valores próprios distintos de  $T$  (resp.  $A$ ).

DEMONSTRAÇÃO.— Suponhamos que  $T$  é diagonalizável e sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  os distintos valores próprios de  $T$ . Consideremos o polinómio

$$p(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_k).$$

Tem-se que  $p(t)$  divide  $m(t)$ . Seja  $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  uma base ordenada de  $V$  consistindo exclusivamente de vectores próprios de  $T$ . Fixando  $v \in \beta$  tem-se que existe  $\lambda_j$  tal que  $(T - \lambda_j \mathbb{1})(v) = 0$ . Por outro lado,  $p(t) = q_j(t)(t - \lambda_j)$  e assim,  $p(T)(v) = q_j(T)(T - \lambda_j \mathbb{1})(v) = 0$ . Como  $v$  é qualquer em  $\beta$  concluímos que  $p(T) = 0$  o que nos força a concluir que  $m(t) = p(t)$ .

Inversamente, suponhamos que  $m(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_k)$  onde os  $\lambda_i$  são os valores próprios distintos de  $T$ . A demonstração é por indução em  $n = \dim(V)$ . Para  $n = 1$  não há nada a demonstrar suponhamos agora que  $T$  é diagonalizável se  $\dim(V) < n$  e consideremos que  $\dim(V) = n$ . Seja  $W = \text{Im}(T - \lambda_k \mathbb{1})$ . Como  $\lambda_k$  é um valor próprio de  $T$ , tem-se que  $T - \lambda_k \mathbb{1}$  não é sobrejectiva i.e.  $V \neq W$ . Se  $W = \{0\}$  então  $T = \lambda_k \mathbb{1}$  e é claramente diagonalizável. Caso contrário tem-se que  $0 < \dim(W) < n$ .

Tem-se que  $W$  é  $T$ -invariante. Além disso, para qualquer  $x \in W$ ,

$$(T - \lambda_1 \mathbb{1}) \cdots (T - \lambda_{k-1} \mathbb{1})(x) = 0.$$

Concluímos então que  $c_{T_W}(t)$  divide  $(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_{k-1})$  e, pela hipótese de indução  $T_W$  é diagonalizável. Tem-se ainda que  $\lambda_k$  não é um valor próprio de  $T_W$  e assim

$$W \cap E_T(\lambda_k) = W \cap \text{Nuc}(T - \lambda_k \mathbb{1}) = \{0\}.$$

Este facto e uma simples aplicação do teorema da dimensão a  $T - \lambda_k \mathbb{1}$ , mostram que existem bases  $\beta_1 = (v_1, \dots, v_m)$  de  $W$  e  $\beta_2 = (v_{m+1}, \dots, v_n)$  de  $\text{Nuc}(T - \lambda_k \mathbb{1})$  tais que  $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$  é uma base de  $V$ . Para estabelecer este facto é apenas necessário mostrar que  $\beta$  é um conjunto linearmente independente de vectores. Consideremos então escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tais que:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

considerando  $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$  e  $y = \sum_{i=1}^{n-m} \alpha_{m+i} v_{m+i}$  tem-se que  $x \in W$ ,  $y \in \text{Nuc}(T - \lambda_k \mathbb{1})$  e  $x + y = 0$ . Como  $V = W \oplus \text{Nuc}(T - \lambda_k \mathbb{1})$  isto implica que  $x = 0$  e  $y = 0$ . Daqui decorre imediatamente que os escalares são todos nulos e assim

que  $\beta$  é linearmente independente.  $V$  tem então uma base de vectores próprios de  $T$  que, por isso, é diagonalizável.  $\square$

## 6.5 EXERCÍCIOS

PROBLEMA 6.1.— Considere a matriz

© ESD

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine quais dos vetores seguintes são vetores próprios da matriz  $A$  e, em caso afirmativo, indique o valor próprio correspondente.

- a)  $(0, 2, 2)$ ;      b)  $(0, 5, 0)$ ;      c)  $(-1, -1, 2)$ ;      d)  $(-2, -2, 2)$ .

PROBLEMA 6.2.— Verifique se  $\lambda = 3$  é um valor próprio da matriz

© ESD

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

e, em caso afirmativo, determine um vetor próprio associado.

PROBLEMA 6.3.— Para cada uma das matrizes reais seguintes determine o polinómio característico, os valores próprios, indicando as suas multiplicidades algébrica e geométrica, e bases para os espaços próprios correspondentes.

© ESD

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} & \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & \text{c) } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix} \\ \text{d) } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{e) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{f) } \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

PROBLEMA 6.4.— Sem efectuar cálculos, indique os valores próprios das matrizes:

© ESD

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 20 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 6.5.— Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 2.

© ESD

- (a) Mostre que a equação característica de  $A$  (ou seja a equação  $c_A(t) = 0$ ) é:

$$t - (\text{tr } A)t + (\det A) = 0.$$

- (b) Determine  $(\text{tr } A)$  e  $\det A$  no caso de 5 e 8 serem valores próprios da matriz  $A$ .

PROBLEMA 6.6.— Calcule  $\det(A)$ , sabendo que o polinómio característico de  $A$  é dado por:

© ESD

$$(a) \ c_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t - 5 \quad (b) \ c_A(t) = t^4 - t^3 + 7.$$

PROBLEMA 6.7.— Suponha que  $v$  é um vetor próprio de uma matriz invertível  $M$ . Mostre que  $v$  também é um vetor próprio de  $M^{-1}$  e determine o valor próprio de  $M^{-1}$  que lhe está associado.

© ESD

PROBLEMA 6.8.— Suponha que a matriz  $M$  tem um vetor próprio  $v$  associado a um valor próprio  $\lambda$ . Mostre que  $v$  é um vetor próprio de  $M^2$  associado ao valor próprio  $\lambda^2$ . © ESD

PROBLEMA 6.9.— Mostre que as matrizes (quadradas)  $A$  e  $A^T$  têm os mesmos valores próprios. Dê um exemplo de uma matriz  $A$ , de ordem 2, que tenha um valor próprio igual a  $\lambda = 3$  com  $v$  um vetor próprio associado e tal que  $v$  não seja vetor próprio de  $A^T$  associado ao valor próprio  $\lambda = 3$ . © ESD

PROBLEMA 6.10.— Considere a matriz © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Determine os valores próprios e os espaços próprios de  $A$ .
- Determine os valores próprios e os espaços próprios de  $A + 3\mathbb{1}$ , onde  $\mathbb{1}$  é a matriz identidade.
- Compare os resultados das duas alíneas anteriores.
- Relacione os valores próprios e vectores próprios de uma matriz  $A$ , de ordem  $n$ , com os valores e vectores próprios da matriz  $A + k\mathbb{1}$ .

PROBLEMA 6.11.— Seja  $A$  uma matriz  $(3 \times 3)$  com valores próprios 0, 1 e 2. Diga, justificando, se esta informação é suficiente para: © ESD

- Calcular a característica de  $A$ ;
- Calcular o determinante de  $A^T A$ ;
- Calcular os valores próprios de  $(A + 2\mathbb{1})$ ;
- Calcular os valores próprios de  $(A + \mathbb{1})^{-1}$ .

PROBLEMA 6.12.— Seja  $A$  uma matriz  $(n \times n)$  tal que a soma das entradas de cada linha de  $A$  é constante igual a  $k$ . Mostre que  $k$  é um valor próprio de  $A$ . (Sugestão: determine um vetor próprio). © ESD

PROBLEMA 6.13.— Sem efectuar quaisquer cálculos, determine um valor próprio e dois vectores próprios linearmente independentes para a matriz © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

PROBLEMA 6.14.— Considere as afirmações seguintes relativas à matriz © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Os valores próprios de  $A$  são 2,  $-4$  e 1;
- O vector  $(3, 2, 0, 0)$  é um vector próprio de  $A$  e 2 é o valor próprio associado;
- O vector  $(3, 2, 0, 0)$  é um vector próprio de  $A$  e 4 é o valor próprio associado;

IV. A matriz tem valores próprios de multiplicidade algébrica superior a 1.

A lista completa das afirmações corretas é

- A) I e IV;      B) II;      C) II e IV;      D) III e IV.

PROBLEMA 6.15.— Seja  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  uma matriz quadrada que tem o número 3 como valor próprio. Sendo  $\mathbb{1}$  a matriz identidade de ordem 3, qual dos seguintes determinantes pode garantir que se anula? © AL

- A)  $\det(A^2 - 3A + 6\mathbb{1})$ ; B)  $\det(A^2 - 4A - 6\mathbb{1})$ ; C)  $\det(A^2 - 3\mathbb{1})$ ; D)  $\det(A^2 - 3A)$ .

PROBLEMA 6.16.— Determine quais das matrizes seguintes são diagonalizáveis. Em caso afirmativo, encontre uma matriz  $P$  que diagonaliza a matriz  $A$  dada e escreva explicitamente  $P^{-1}AP = D$ . © ESD

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} & \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} & \text{d)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{d)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \end{array}$$

PROBLEMA 6.17.— Seja  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que os valores próprios de  $A$  são  $-1, 0$  e  $1$ . Considere as seguintes afirmações, em que  $\mathbb{1}$  representa a matriz identidade de ordem 3: © AL

- I.  $A$  é invertível;
- II. O espaço das colunas de  $A$  tem dimensão 2;
- III. O núcleo de  $A - \mathbb{1}$  tem dimensão 1;
- IV.  $A - \mathbb{1}$  é invertível.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

- A) II;      B) II e III;      C) I e IV;      D) II, III e IV.

PROBLEMA 6.18.— Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Verifique que  $A$  é diagonalizável e determine uma matriz diagonal  $D$  e uma matriz  $P$  tal que  $A = PDP^{-1}$ .
- (b) Use a alínea anterior para calcular  $A^{25}$ , determinando ainda os seus valores próprios e bases para os espaços próprios.

PROBLEMA 6.19.— Seja  $A$  uma matriz quadrada real de ordem  $n$ . Determine se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes. Justifique! © ESD

- (a) Se existe uma base de  $\mathbb{R}^n$  formada por vectores próprios de  $A$ , então  $A$  é diagonalizável.

- (b)  $A$  é diagonalizável se tem  $n$  vectores próprios.
- (c)  $A$  é diagonalizável se e só se tem  $n$  valores próprios contando as suas multiplicidades.
- (d) Se  $A$  é diagonalizável, então tem  $n$  valores próprios distintos.
- (e) Se  $A$  tem  $n$  valores próprios distintos, então é diagonalizável.
- (f) Se  $A$  é diagonalizável, então é invertível.
- (g) Se  $n = 3$  e  $A$  tem dois valores próprios tal que a dimensão de cada espaço próprio é 1, então  $A$  é diagonalizável.
- (h)  $A$  é uma matriz  $(5 \times 5)$  com dois valores próprios tais que a dimensão de um espaço próprio é 3 e a do outro é 2. Então,  $A$  é diagonalizável.

PROBLEMA 6.20.— De uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sabe-se o seguinte: © AL

1.  $T$  tem apenas um valor próprio,  $\lambda$ ;
2.  $(1, 1, 0) \in E_T(\lambda)$ ;
3. se  $B$  é a base canónica de  $\mathbb{R}^3$  então  $[T]_B$  é triangular superior;
4.  $T(1, 1, 1) = (2, 2, 1)$ .

Nestas condições, para qualquer  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , a expressão correcta é:

- A)  $T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$ ,
- B)  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, y + z)$ ,
- C)  $T(x, y, z) = (x + z, y + z, z)$ ,
- D)  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$ .

PROBLEMA 6.21.— Seja  $A$  uma matriz  $(3 \times 3)$  que verifica:

© ESD

$$\text{Nuc}(A - 2\mathbb{1}) = \{0\}, \quad \text{Nuc}(A) = \{0\} \quad \text{e} \quad \dim(\text{Nuc}(A - 3\mathbb{1})) = 1.$$

Diga quais das afirmações seguintes são verdadeiras:

- (a) 2 não é valor próprio de  $A$ .
- (b)  $A$  não é invertível.
- (c) Zero não é um valor próprio de  $A$ .
- (d) 3 é um valor próprio de  $A$  cuja multiplicidade geométrica é 2.
- (e) Se se tiver  $\dim(\text{Nuc}(A)) = 2$  em vez de  $\dim(\text{Nuc}(A)) = 0$ , então a matriz  $A$  é semelhante à matriz diagonal  $\text{diag}(0, 0, 3)$ .
- (f) A matriz  $A - 2\mathbb{1}$  é invertível.

PROBLEMA 6.22.— Seja  $T : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$  uma transformação linear cuja representação em relação à base canónica  $B = (1, t, t^2)$  de  $\mathbb{R}_2[t]$  é a matriz © AL

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Qual dos seguintes polinómios é vector próprio de  $T$ ?

- A)  $1 + 4t - t^2$ ,      B)  $1 + 2t + t^2$ ,      C)  $1 - 3t + t^2$ ,      D)  $1 - 2t + t^2$ .

PROBLEMA 6.23.— Seja

© AL

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que  $\lambda = 7$  é valor próprio de  $A$  qual dos seguintes conjuntos contém os outros valores próprios?

- A)  $\{2, 3\}$ ,      B)  $\{-1, 4\}$ ,      C)  $\{0, 1\}$ ,      D)  $\{-2, 6\}$ .

PROBLEMA 6.24.— Sejam  $u, v$  e  $w$  vetores não nulos de  $\mathbb{R}^3$  e  $A$  uma matriz  $(3 \times 3)$  tal que  $Au = 2u$ ,  $Av = 0$  e  $Aw = w$ . Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:      © ESD

- (a)  $B = (u, v, w)$  não é uma base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) A matriz  $A$  não é invertível.
- (c) A matriz  $A$  não é diagonalizável.
- (d)  $\lambda = 1$  não é um valor próprio de  $A$ .

## SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.1).— Temos:

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad A \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Assim, os vectores das alíneas (a), (b) e (d) são vectores próprios de  $A$ , associados aos valores próprios 3, 2 e 1, respectivamente.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.2).— Para resolver a questão basta determinar  $\text{Nuc}(A - 3\mathbb{I})$  e verificar que não é trivial. Temos então:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tem-se então que

$$\text{Nuc}(A - 3\mathbb{I}) = \{(x, y, z) \mid z = 0 \wedge y = x\}.$$

Um exemplo de vector próprio associado ao valor próprio 3 pode ser  $(1, 1, 0)$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.3).— A título de exemplo consideramos as alíneas (e) e (f), cujas matrizes designamos por  $A$  e  $B$ , respectivamente.

(e) Temos que:

$$\begin{aligned} c_A(t) = |A - t\mathbb{I}| &= \begin{vmatrix} -t & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} -t & 0 & 2 \\ 1 & -t & 1 \\ 0 & 1 & -2-t \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} 1 & -t & 1 \\ -t & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2-t \end{vmatrix} = \\ &= (t-1) \begin{vmatrix} 1 & -t & 1 \\ 0 & -t^2 & t+2 \\ 0 & 1 & -2-t \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} -t^2 & t+2 \\ 1 & -(t+2) \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+2)^2. \end{aligned}$$

Tem-se assim que  $\Lambda(A) = \{-2, 1\}$ . Quanto aos espaços próprios tem-se:

$$\begin{aligned} E_A(1) &= \text{Nuc}(A - \mathbb{I}) = \{(x, y, z, w) \mid z = x \wedge y = 3x\} \\ &= L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 3, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}); \end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} E_A(-2) &= \text{Nuc}(A + 2\mathbb{I}) = \{(x, y, z, w) \mid y = w = 0 \wedge z = -x\} \\ &= L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, -1, 0)\}). \end{aligned}$$

(f) Tem-se

$$c_B(t) = |B - t\mathbb{I}| = (2-t) \begin{vmatrix} 2-t & 1+i \\ 1-i & 3-t \end{vmatrix} = -(t-2)(t-4)(t-1).$$

Assim  $\Lambda(B) = \{1, 2, 4\}$ . Calculando os espaços próprios pelo processo habitual obtém-se que:

$$\begin{aligned} E_1(B) &= L_{\mathbb{C}^3}(\{(-1-i, 1, 0)\}); \\ E_2(B) &= L_{\mathbb{C}^3}(\{(0, 0, 1)\}); \\ E_4(B) &= L_{\mathbb{C}^3}(\{(1+i, 2, 0)\}). \end{aligned}$$

A título de exemplo mostramos o cálculo de  $E_4(B)$ . Para determinar este espaço temos que determinar o núcleo de  $B - 4\mathbb{1}$  ou seja resolver o sistema abaixo:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1+i & 0 & 0 \\ 1-i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -(1+i)/2 & 0 & 0 \\ 1-i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(i-1)L_1+L_2 \rightarrow L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -(1+i)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{aligned} E_4(B) &= \{(x, y, z) \mid z = 0 \wedge x = (1+i)y/2\} \\ &= L_{\mathbb{C}^3}(\{(1+i)/2, 1, 0\}) = L_{\mathbb{C}^3}(\{(1+i, 2, 0)\}). \end{aligned}$$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.4).— A resolução baseia-se numa simples observação: se  $A$  é uma matriz triangular então  $A - t\mathbb{1}$  também é triangular e assim  $c_A(t)$  pode escrever-se como um produto de factores da forma  $(d - t)$  onde  $d$  é um elemento da diagonal principal de  $A$ .

Tem-se:  $\Lambda(A) = \{0, 2, 4\}$  e  $\Lambda(B) = \{1, 2, 7\}$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.5).— (a) Consideremos:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Neste caso temos que  $\text{tr } A = a + d$  e  $|A| = ad - bc$ . Calculando o polinómio característico de  $A$  temos:

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix} = (t-a)(t-d) - bc = t^2 - (a+d)t + ad - bc = t^2 - (\text{tr } A)t + \det(A),$$

Como se pretendia.

(b) Se 5 e 8 são valores próprios de  $A$  então  $c_A(t) = (t-5)(t-8) = t^2 - 13t + 40$ . Assim, pela alínea anterior temos que o traço de  $A$  é 13 e o determinante de  $A$  é 40.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.6).— Basta observar que  $c_A(0) = |A - 0\mathbb{1}| = |A|$ . Assim, no caso de (a)  $|A| = -5$  e no caso (b),  $|A| = 7$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA ??).— Suponhamos que  $v \in E_M(\lambda)$ . Tem-se assim que  $Mv = \lambda v$ . Multiplicando ambos os membros desta igualdade por  $M^{-1}$  obtemos  $v = \lambda M^{-1}v$ , ou seja

$$M^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v.$$

(Observe-se que se tem necessariamente  $\lambda \neq 0$  pois caso contrário,  $E_M(0) = \text{Nuc}(A)$  seria não trivial e  $M$  não seria invertível.)

Concluimos então que  $v$  é vector próprio de  $M^{-1}$  e está associado ao valor próprio  $1/\lambda$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.8).— Tem-se que:

$$M^2v = M(Mv) = M\lambda v = \lambda Mv = \lambda^2v.$$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.9).— Para a primeira parte basta observar o seguinte:

$$c_{A^\top}(t) = |A^\top - t\mathbb{1}| = |A^\top - (t\mathbb{1})^\top| = |(A - t\mathbb{1})^\top| = |A - t\mathbb{1}| = c_A(t).$$

Assim,  $A$  e  $A^\top$  têm o mesmo polinômio característico, pelo que têm os mesmos valores próprios.

No que respeita à segunda parte, considerando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ela tem os valores próprios 1 e 3 (o mesmo sucedendo para  $A^\top$ ). Calculando os espaços próprios  $E_{A^\top}(3)$  e  $E_A(3)$ , obtemos:

$$E_A(3) = \text{Nuc} \left( \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \{(x, y) \mid y = 2x\} = L_{\mathbb{R}^2}(\{(1, 2)\})$$

enquanto que:

$$E_{A^\top}(3) = \text{Nuc} \left( \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \{(x, y) \mid x = 0\} = L_{\mathbb{R}^2}(\{(0, 1)\}).$$

Tem-se claramente que  $E_A(3) \neq E_{A^\top}(3)$ . □

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.10).— Consideramos apenas a alínea (d). Quanto aos valores próprios tem-se o seguinte:

$$c_{A+k\mathbb{1}}(t) = |A + k\mathbb{1} - t\mathbb{1}| = |A - (t - k)\mathbb{1}| = c_A(t - k).$$

Ou seja  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  se e só se  $\lambda + k$  é valor próprio de  $A + k\mathbb{1}$ .

Por outro lado tem-se  $v \in E_A(\lambda)$  se e só se  $Av = \lambda v$  se e só se

$$(A + k\mathbb{1})v = \lambda v + kv = (\lambda + k)v$$

ou seja, se e só se  $v \in E_{A+k\mathbb{1}}(\lambda + k)$ . □

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.11).— Nas condições do enunciado, concluímos que

$$c_A(t) = -t(t - 1)(t - 2)$$

Os valores próprios têm todos multiplicidade algébrica 1, pelo que os espaços próprios têm todos dimensão 1. Em particular temos que  $E_A(0) = \text{Nuc}(A)$  tem dimensão 1, ou seja a nulidade de  $A$  é 1 (pelo que a característica é 2). Assim:

- (a) sim, tem-se  $\text{car}(A) = 2$ .
- (b)  $|A^\top A| = |A^\top| |A| = |A|^2 = (c_A(0))^2$ .
- (c) Tendo em conta o exercício precedente, os valores próprios de  $A$  são 2, 3 e 4.
- (d) Os valores próprios de  $A + \mathbb{1}$  são 1, 2 e 3, pelo que os valores próprios da inversa são inversos destes i.e., 1, 1/2 e 1/3. □

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.12).— Tem-se:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = A_{*,1} + A_{*,2} + \cdots + A_{*,n} = \begin{bmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

O que mostra que  $k$  é um valor próprio de  $A$ , associado ao vector  $(1, 1, \dots, 1)$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.13).— A dimensão do espaço das linhas (e das colunas) de  $A$  é 1. Logo o núcleo da matriz tem dimensão 2. Além disso, os elementos do núcleo são os  $(x, y, z)$  tais que  $z = -(x+y)$  pelo que os vectores  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, -1)$  são elementos do núcleo e são claramente linearmente independentes.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA ??).— Tem-se ( $A$  é triangular inferior):

$$c_A(t) = |A - t\mathbb{1}| = (t+1)^2(t-2)^2$$

Assim, os valores próprios de  $A$  são  $-1$  e  $2$ . A afirmação I. é assim *falsa*. Relativamente à segunda afirmação tem-se:

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo que II. é *verdadeira*. A afirmação III. é *falsa* pois, como vimos,  $4$  não é valor próprio de  $A$ . A multiplicidade algébrica de qualquer um dos valores próprios de  $A$  é  $2$  logo IV. é *verdadeira*.

A opção correcta é então a C).  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.15).— Sabemos que  $\det(A - 3\mathbb{1}) = 0$  e tendo em conta que o determinante de um produto é o produto dos determinantes, devemos procurar uma expressão onde  $A - 3\mathbb{1}$  se possa por em evidência. Como estamos a calcular de terminantes da forma  $\det(p(A))$  onde  $p(t)$  é um polinómio, a resposta à nossa questão depende da forma como esses polinómios se factorizam em factores irredutíveis. Em particular, apenas podemos garantir que os determinantes se anulam se  $t - 3$  for um factor de  $p(t)$ .

A)  $\det(A^2 - 3A + 6\mathbb{1}) = \det(p(A))$  onde  $p(t) = t^2 - 3t + 6$  que já é irredutível.

B)  $\det(A^2 - 4A - 6\mathbb{1}) = \det(p(A))$  onde  $p(t) = t^2 - 4t - 6$  que é irredutível.

C)  $\det(A^2 - 3\mathbb{1}) = \det(p(A))$  onde  $p(t) = t^2 - 3 = (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})$ .

D)  $\det(A^2 - 3A) = \det(p(A))$  onde  $p(t) = t^2 - 3t = t(t - 3)$ .

Assim, o único determinante que podemos garantir que se anula é o da alínea D).  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.16).— A título ilustrativo consideramos as alíneas b) e d).

b) Trata-se de uma matriz complexa (denotemo-la por  $A$ ). O respectivo polinómio característico é

$$c_A(t) = |A - t\mathbb{1}| = \begin{vmatrix} 1-t & -i \\ i & 1-t \end{vmatrix} = (t-1)^2 - 1 = t^2 - 2t = t(t-2).$$

Como o polinómio característico desta matriz de ordem 2 tem duas raízes distintas, ou seja, como existem dois valores próprios distintos, concluímos que  $A$  é diagonalizável.

A matriz  $P$  é então uma matriz que muda de uma base de vectores próprios para a base canónica. Para a obtermos precisamos de calcular os espaços próprios

associados a cada valor próprio. Tem-se:

$E_A(0) = \text{Nuc}(A)$ . Fazendo as contas obtém-se:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ou seja,  $\text{Nuc}(A) = \{(x, y) \mid x = iy\} = L_{\mathbb{C}^2}(\{(i, 1)\})$ .

$E_A(2) = \text{Nuc}(A - 2\mathbb{I})$ . Ou seja,

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & -i & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ou seja,  $\text{Nuc}(A) = \{(x, y) \mid x = -iy\} = L_{\mathbb{C}^2}(\{(-i, 1)\})$ .  $\square$

A matriz  $P$  é então

$$P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Denotemos por  $A$  a matriz indicada. Calculando o polinómio característico temos:

$$c_A(t) = |A - t\mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & -t & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{vmatrix} = -(t-2)(t^2-1).$$

ou seja  $c_A(t) = -(t-2)(t-1)(t+1)$ . Mais uma vez, como estamos perante uma matriz de ordem 3 com 3 valores próprios distintos, podemos concluir que a matriz é diagonalizável.

Para determinar a matriz  $P$  temos que determinar uma base de vectores próprios, o que pressupõe que determinemos bases para os diferentes espaços próprios.

$E_A(1) = \text{Nuc}(A - \mathbb{I})$ , ou seja,

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

pelo que  $\text{Nuc}(A - \mathbb{I}) = \{(x, y, z) \mid x = 0 \wedge z = y\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(0, 1, 1)\})$ ;

$E_A(-1) = \text{Nuc}(A + \mathbb{I})$ , ou seja,

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

pelo que  $\text{Nuc}(A + \mathbb{I}) = \{(x, y, z) \mid x = 0 \wedge z = -y\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(0, 1, -1)\})$ ;

$E_A(2) = \text{Nuc}(A - 2\mathbb{I})$ , ou seja,

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

pelo que  $\text{Nuc}(A - 2\mathbb{1}) = \{(x, y, z) \mid y = z = 0\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 0, 0)\})$ .

Temos então que,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP.$$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.17).— Consideremos as afirmações uma a uma. A matriz  $A$  tem como valor próprio 0 pelo que o seu núcleo não é trivial e assim não pode ser invertível. A afirmação I é assim *falsa*.

Como existem três valores próprios distintos, cada um dos espaços próprios, em particular  $E_A(0) = \text{Nuc}(A)$ , têm dimensão 1. Desta forma a nulidade de  $A$  é 1 pelo que a respectiva característica (ou seja a dimensão do espaço das colunas) será 2. Assim, a afirmação II é *verdadeira*.

A afirmação III também é *verdadeira*, porque como já notámos,  $\dim(E_A(1)) = \dim(\text{Nuc}(A - \mathbb{1})) = 1$ .

A afirmação IV é evidentemente *falsa* pois  $\text{Nuc}(A - \mathbb{1})$  não é trivial.

A resposta correcta é então a B). □

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.18).— (a) O polinómio característico de  $A$  é

$$c_A(t) = -t(t - 1)(t + 1).$$

Pelo que  $A$  tem três valores próprios distintos e, por isso, é diagonalizável. Para obter a matriz  $P$  precisamos de determinar os espaços próprios. Os cálculos usuais permitem obter:

$$E_A(0) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 0, 2)\});$$

$$E_A(1) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, -1, 1)\});$$

$$E_A(-1) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1, 1, 1)\}).$$

Tem-se então que:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Para calcular  $A^{25}$  basta observar que:

$$A^{25} = (PDP^{-1})^{25} = PD^{25}P^{-1},$$

e observar que

$$D^{25} = \begin{bmatrix} 0^{25} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{25} \end{bmatrix} = D$$

ou seja  $A^{25} = A$ . □

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA ??).— (a) A afirmação é *verdadeira*, de facto a existência de uma base de vectores próprios é equivalente ao facto de uma matriz ser diagonalizável.

- (b) A afirmação é *falsa*. Só seria verdadeira se conseguíssemos garantir que esses  $n$  vectores eram linearmente independentes, pois nesse caso constituiriam uma base de  $\mathbb{R}^n$ .
- (c) A afirmação é *falsa*. Só seria verdadeira se os  $n$  valores próprios fossem todos diferentes. Caso contrário é possível que a multiplicidade geométrica de um valor próprio seja estritamente inferior à sua multiplicidade algébrica e, nesse caso, a matriz não é diagonalizável e.g. se  $A$  é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem polinómio característico  $c_A(t) = -(t - 1)^3$  i.e.  $\Lambda(A) = \{1\}$ . O valor próprio 1 tem então multiplicidade algébrica 3, mas, se calcularmos o respectivo espaço próprio, obtemos  $\dim(E_A(1)) = 2$ , ou seja a multiplicidade geométrica é apenas 2.

- (d) A afirmação é *verdadeira*.
- (e) A afirmação é *falsa*. A matriz nula é diagonal, logo é diagonalizável, no entanto não é invertível.
- (f) A afirmação é *falsa* porque nestas circunstâncias não conseguimos formar uma base de  $\mathbb{R}^3$  consistindo de vectores próprios (o máximo que conseguimos é um conjunto linearmente independente de vectores próprios com 2 vectores.)
- (g) A afirmação é *verdadeira*. Se  $\lambda_1, \lambda_2$  são os valores próprios de  $A$  e, digamos,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  é base de  $E_A(\lambda_1)$  e  $\{w_1, w_2\}$  é base de  $E_A(\lambda_2)$  então, o conjunto  $\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$  é linearmente independente e, portanto, uma base de  $\mathbb{R}^5$ , consistindo de vectores próprios de  $A$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.20).— Sabemos que  $T(1, 1, 0)$  é um múltiplo de  $(1, 1, 0)$  e que  $T(1, 1, 1) = (2, 2, 1)$ . Substituindo estes vectores nas diferentes expressões verificamos imediatamente que a primeira condição só é satisfeita pela expressão na alínea C). Pelo que esta é a resposta correcta. Embora isso não fosse necessário, pode verificar-se que considerando a expressão na alínea C) ela verifica também as outras duas condições i.e.  $T(1, 1, 1) = (2, 2, 1)$  e quanto à representação matricial na base canónica ela é:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pelo que é triangular superior.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA ??).— (a) A afirmação é *verdadeira*. (Recorde-se que  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  sse  $\text{Nuc}(A - \lambda \mathbb{I})$  não é trivial.)

- (b) A afirmação é *falsa*, dado que  $\text{Nuc}(A)$  é trivial e isso implica a invertibilidade de  $A$ .
- (c) A afirmação é *verdadeira*. (Como em (a).)
- (d) A afirmação é *falsa*, 3 é de facto valor próprio, como o atesta a não trivialidade do  $\text{Nuc}(A - 3I)$  mas a dimensão deste núcleo, que é a dimensão de  $E_A(3)$ , corresponde à multiplicidade geométrica que é, portanto, 1 e não 2, como se afirma.
- (e) A afirmação é *verdadeira*. Neste caso existiria uma base de  $\mathbb{R}^3$  consistindo de dois vectores próprios associados ao valor próprio 0 e um vector próprio associado a 3.
- (f) A afirmação é *verdadeira* porque o núcleo desta matriz é trivial.  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.22).— Podemos trabalhar em termos de coordenadas na base canónica  $B$  de  $\mathbb{R}_2[t]$ . Tem-se que  $p(t)$  é vector próprio se e só se (em termos de coordenadas) se tiver:

$$[T]_B(p(t))_B = \lambda(p(t))_B,$$

para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Lembrando que  $(a + bt + ct^2)_B = (a, b, c)$  e que  $j$ -ésima coluna de  $AB$  corresponde a multiplicar  $A$  pela  $j$ -ésima coluna de  $B$ , podemos calcular:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -2 & 0 \\ 18 & 20 & -5 & 0 \\ 30 & 32 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe-se que as colunas da matriz  $(3 \times 4)$  do lado esquerdo da igualdade são os vectores de coordenadas dos polinómios indicados e que as colunas da matriz à direita do sinal de igualdade são os resultados de multiplicar  $A$  por cada uma dessas colunas. Feita esta observação e tendo em conta as considerações iniciais, o único vector próprio de  $[T]_B$  é o vector  $(1, -2, 1)$  (pertence ao núcleo da matriz estando assim associado ao valor próprio 0). Regressando ao espaço original e à transformação  $T$ , dos vectores indicados, o único que é vector próprio de  $T$  é o vector  $(1, -2, 1)^B = 1 - 2t + t^2$ .  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.23).— Calculando o polinómio característico de  $A$  obtemos:

$$c_A(t) = |A - tI| = -(t^3 - 9t^2 + 15t - 7)$$

Como sabemos que 7 é valor próprio, também sabemos que 7 é raiz deste polinómio que, portanto, é divisível por  $t - 7$ . Usando a regra de Ruffini concluimos que:

$$c_A(t) = -(t - 7)(t - 1)^2.$$

Assim, para além de 7, a matriz  $A$  tem o valor próprio 1, pelo que a resposta correcta é a C).  $\square$

SOLUÇÃO (DO PROBLEMA 6.24).— (a) A afirmação é *falsa*. Os vectores  $u, v$  e  $w$  são vectores associados a valores próprios distintos, assim são linearmente independentes. Constituem portanto uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

- (b) A afirmação é *verdadeira* já que o núcleo de  $A$  não é trivial.
- (c) A afirmação é *falsa*, pois como vimos em (a),  $\mathbb{R}^3$  tem uma base de vectores próprios.
- (d) A afirmação é *falsa* porque  $Aw = w$  implica que 1 é valor próprio da matriz  $A$ . □