Semana 15
Espaços lineares com produto interno

As secções marcadas com um asterisco (*) são secções contendo tópicos complementares, mais avançados, e não serão leccionados no curso nem serão alvo de avaliação.
Além disso, embora estas notas considerem a situação geral envolvendo espaços lineares reais e complexos, ao longo do curso focar-nos-emos essencialmente em espaços reais.

7.1 Produto interno

Definição 7.1.— *Um produto interno num espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *é uma função*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

que satisfaz:

(1) *(bilinearidade):*

(a) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ *e,*
(b) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$.

(2) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$.

(3) *($\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definida positiva):* $\langle x, x \rangle \geq 0$ *e* $\langle x, x \rangle = 0$ *se e só se* $x = \mathbb{0}$.[1]

[1] No caso complexo, a condição $\langle x, x \rangle \geq 0$ significa que $\langle x, x \rangle$ é sempre um número real e enquanto número real é não-negativo. (Como se sabe, ao contrário dos reais, não se define normalmente uma ordenação nos números complexos. Não que isso seja impossível, mas como não existe nenhuma que estenda a dos reais e ao mesmo tempo preserve as propriedades algébricas, não se considera útil introduzir nenhuma ordenação dos complexos.)

Definição 7.2.— *Um espaço linear* V*, de dimensão finita, equipado com um produto interno diz-se um* espaço com produto interno.

Se V é um espaço linear, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno e se W é um subespaço de V então, considerando em W a restrição $\langle \cdot, \cdot \rangle_W : W \times W \to \mathbb{K}$ de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definida por $\langle x, y \rangle_W = \langle x, y \rangle$ (com $x, y \in W$) a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ continua a satisfazer as condições da definição 7.1 e, por isso, é um produto interno em W. Ou seja, um subespaço de um espaço com produto interno é um espaço com produto interno, considerando como produto interno a restrição daquele que está definido no espaço ambiente.

Lema 7.3.— *Seja V um espaço linear com um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Para qualquer* $\mathrm{u} \in V$ *tem-se que* $\langle \mathrm{u}, \mathrm{x}\rangle = 0$*, para todo o* $\mathrm{x} \in V$ *se e só se* $\mathrm{u} = \mathbb{0}$*. (Dizemos que o produto interno é* não-degenerado.*)*

Demonstração.— É claro que se $\mathrm{u} = \mathbb{0}$ então, para qualquer $\mathrm{x} \in V$ tem-se:

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{x}\rangle = \langle \mathbb{0}, \mathrm{x}\rangle = \langle 0\mathbb{0}, \mathrm{x}\rangle = 0\langle \mathbb{0}, \mathrm{x}\rangle = 0.$$

Reciprocamente tem-se, considerando o caso particular $\mathrm{x} = \mathrm{u}$, que $\langle \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle = 0$ e então tem que se ter $\mathrm{u} = \mathbb{0}$, por (3) na definição 7.1. ◪

Exemplo 1.— Em $\mathbb{R}^n$, o produto interno canónico define-se:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Exemplo 2.— Em $\mathbb{C}^n$, o produto interno canónico define-se:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n.$$

Exemplo 3.— Seja $V = \mathscr{C}([0,1])$ o espaço linear real consistindo nas funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Definido:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt,$$

obtemos um produto interno em V.

Exemplo 4.— Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. A matriz transconjugada de A que se denota por A^* define-se $(A^*)_{i,j} = \overline{A}_{j,i}$ i.e., A^* obtém-se conjugando todas as entradas da transposta de A.

Observe-se que o produto interno canónico em $\mathbb{K}^n$ é definido por $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \mathrm{y}^*\mathrm{x}$.

Observe-se ainda que se as entradas de A são reais então $A^* = A^\top$.

Considerando $V = \mathbb{K}^{m\times n}$ define-se um produto interno em V considerando:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^* A).$$

Teorema 7.4.— *Sejam V um espaço linear com produto interno,* $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$*. Tem-se:*

(1) $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} + \mathrm{z}\rangle = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle + \langle \mathrm{x}, \mathrm{z}\rangle$.

(2) $\langle \mathrm{x}, \alpha\mathrm{y}\rangle = \bar{\alpha}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle$.

(3) $\langle \mathrm{x}, \mathbb{0}\rangle = 0$.

(4) *Se* $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \langle \mathrm{x}, \mathrm{z}\rangle$*, para qualquer* $\mathrm{x} \in V$ *então* $\mathrm{y} = \mathrm{z}$.

Demonstração.— (1) Tem-se que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{u}, \mathrm{x} + \mathrm{y}\rangle &= \overline{\langle x + y, u\rangle} = \overline{\langle x, u\rangle + \langle y, u\rangle} = \overline{\langle x, u\rangle} + \overline{\langle y, u\rangle} \\ &= \overline{\overline{\langle u, x\rangle}} + \overline{\overline{\langle u, y\rangle}} = \langle u, x\rangle + \langle u, y\rangle. \end{aligned}$$

(2) Tem-se:

$$\langle \mathrm{x}, \alpha\mathrm{y}\rangle = \overline{\langle \alpha\mathrm{y}, \mathrm{x}\rangle} = \overline{\alpha\langle \mathrm{y}, \mathrm{x}\rangle} = \bar{\alpha}\overline{\overline{\langle \mathrm{y}, \mathrm{x}\rangle}} = \bar{\alpha}\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle.$$

(3) Como $0\mathbb{0} = \mathbb{0}$ tem-se $\langle \mathrm{x}, \mathbb{0}\rangle = \langle \mathrm{x}, 0\mathbb{0}\rangle = \bar{0}\langle \mathrm{x}, \mathbb{0}\rangle = 0$.

(4) Nas condições indicadas tem-se que $\langle \mathrm{x}, \mathrm{z} - \mathrm{y}\rangle = 0$, para todo o x. Em particular

tem-se então $\langle z - y, z - y \rangle = 0$ o que implica imediatamente $z = y$, como se pretendia. ◪

A noção de produto interno é uma noção fundamental que pode ser usada para definir uma variedade de outras noções geometricamente significativas como por exemplo as noções de *comprimento*, *distância* e de *ângulo*.

Definição 7.5.— *Seja V um espaço com produto interno. A* norma *(*induzida pelo produto interno*) de* $x \in V$ *define-se:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

A norma induzida pelo produto interno, pode ser vista como uma função $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_0^+$.

Exemplo 5.— No caso do espaço $\mathbb{R}^n$ com o produto interno canónico, a norma induzida pelo produto interno é a norma euclidiana usual i.e.,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Exemplo 6.— No caso de $\mathbb{C}^n$ com o produto interno canónico, a norma dada pelo produto interno é:

$$\begin{aligned} \|(z_1, \dots, z_n)\| &= \sqrt{\langle (z_1, \dots, z_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle} \\ &= \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + \cdots + z_n \bar{z}_n} = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2} \end{aligned}$$

Teorema 7.6.— *Seja V um espaço com produto interno. Dados $x \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ tem-se:*

(1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(2) $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0$ *se e só se* $x = \mathbb{0}$.

Demonstração.—
(1) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}} \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2} \|x\| = |\alpha| \|x\|$.

(2) Tem-se que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$. Por outro lado $\langle x, x \rangle = 0$ se e só se $x = \mathbb{0}$, pelo que se tem $\|x\| = 0$ se e só se $x = \mathbb{0}$. ◪

Teorema 7.7 (desigualdade de Cauchy-Schwarz).—
Suponhamos que V é um espaço com produto interno. Para quaisquer vectores $x, y \in V$ tem-se que:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \tag{7.1}$$

Além disso, em (7.1) *tem-se a igualdade se e só se os vectores forem linearmente dependentes.*

Demonstração.— Consideremos a função (real de variável real), h, definida através da relação:

$$h(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \|x + \lambda y\|^2 &= \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle = \\ &= \lambda^2 \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|x\|^2. \end{aligned}$$

Como $\|x + \lambda y\| \geq 0$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, resulta que

$$\lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2 \geq 0,$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Tem-se então que

$$h(\lambda) = \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2 \geq 0$$

ou seja, a função $h(\lambda)$ é uma função quadrática que é sempre ≥ 0. Desta forma, o respectivo discriminante ou é nulo ou é negativo.[2] Ou seja,

$$4\langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

ou, o que é equivalente $\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$. Eliminando os quadrados obtemos $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, como se pretendia.

Se se tiver a igualdade $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ então, o discriminante da função quadrática, h, i.e. $\lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2$, tem que se anular e, desta forma a função $h(\lambda) = \|x + \lambda y\|$ tem uma raíz real, digamos λ_0. Mas, se $\|x + \lambda_0 y\| = 0$ isso implica que $x + \lambda_0 y = \mathbb{0}$, ou seja $\{x, y\}$ é linearmente dependente. $\boxtimes$

[2] Caso contrário $h(\lambda) = 0$ teria duas soluções reais e e função $h(\lambda)$ tomaria valores negativos.

Nos casos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ o ângulo determinado por dois vectores, x, y, que denotamos por $\theta_{x,y}$ pode ser determinado indirectamente através da determinação do respectivo cosseno, que é dado pela relação:

$$\cos(\theta_{x,y}) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Ora, a desigualdade de Cauchy-Schwarz equivale a afirmar que

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

ou seja, podemos ver o quociente como o valor de um cosseno e, desta forma generalizar o que se passa nos espaços com produto interno canónico $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ a um qualquer espaço com um produto interno, definindo:

Definição 7.8.— *Seja V um espaço com produto interno. Dados vectores $x, y \in V$, o ângulo determinado pelos vectores x e y, que se denota $\theta_{x,y}$ é,*

$$\theta_{x,y} = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right).$$

Teorema 7.9 (desigualdade triangular).— *Sejam, V um espaço com produto interno e $x, y \in V$. Tem-se:*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{7.2}$$

Demonstração.— Considerando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

donde se conclui que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, como pretendido. $\boxtimes$

Definição 7.10.— *Seja V um espaço com produto interno. Dados $x, y \in V$ dizemos que x, y são ortogonais, escrevemos $x \perp y$, se $\langle x, y\rangle = 0$.*

Nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ com os produtos internos canónicos, dois vectores são ortogonais se e só se são perpendiculares, no sentido geométrico do termo. Assim, a definição anterior, uma vez mais, generaliza esta noção a espaços com produto interno arbitrários.

Teorema 7.11 (de Pitágoras).— *Se V é um espaço com produto interno,* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$ *e* $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$ *então,*

$$\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|^2 = \|\mathrm{x}\|^2 + \|\mathrm{y}\|^2.$$

Podemos mesmo caracterizar os casos em que se tem $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| = \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|$. De facto, quando se tem a igualdade, isso implica

$$\|\mathrm{x}\|^2 + 2\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle + \|\mathrm{y}\|^2 = \|\mathrm{x}\|^2 + 2\|\mathrm{x}\|\|\mathrm{y}\| + \|\mathrm{y}\|^2,$$

ou seja, $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \|\mathrm{x}\|\|\mathrm{y}\|$. Pelo que já foi estabelecido, isto implica que $\mathrm{x} = \lambda \mathrm{y}$, para algum escalar λ. Mas, assim, tem-se que:

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \|\mathrm{x}\|\|\mathrm{y}\| \Leftrightarrow \langle \lambda\mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle = \|\lambda\mathrm{y}\|\|\mathrm{y}\| \leftrightarrow \lambda = |\lambda|,$$

ou seja $\lambda \geq 0$. Inversamente, se $x = \lambda y$ para um $\lambda \geq 0$ então,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| &= \|\lambda\mathrm{y} + \mathrm{y}\| = \|(\lambda + 1)\mathrm{y}\| = (\lambda + 1)\|\mathrm{y}\| = \\ &= \lambda\|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{x}\| = \|\lambda\mathrm{y}\| + \|\mathrm{y}\| = \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|. \end{aligned}$$

Teorema 7.12 (desigualdade de Ptolomeu).— *Sejam, V um espaço com produto interno e* $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in V$. *Tem-se:*

$$\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|\|\mathrm{z}\| \leq \|\mathrm{y} - \mathrm{z}\|\|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{z} - \mathrm{x}\|\|\mathrm{y}\|. \tag{7.3}$$

Demonstração.— Se um dos vectores é nulo, a desigualdade é trivialmente verdadeira. Supomos então que nenhum dos vectores é nulo. Consideremos os vectores

$$\dot{\mathrm{x}} = \frac{1}{\|\mathrm{x}\|}\mathrm{x}, \quad \dot{\mathrm{y}} = \frac{1}{\|\mathrm{y}\|}\mathrm{y}, \quad \dot{\mathrm{z}} = \frac{1}{\|\mathrm{z}\|}\mathrm{z}.$$

Tem-se:

$$\|\dot{\mathrm{x}} - \dot{\mathrm{y}}\|^2 = {\frac{1}{\|\mathrm{x}\|}}^2 - 2\frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle}{\|\mathrm{x}\|^2\|\mathrm{y}\|^2} + \frac{1}{\|\mathrm{z}\|} = \left(\frac{\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|}{\|\mathrm{x}\|\|\mathrm{y}\|}\right)^2$$

ou seja,

$$\|\dot{\mathrm{x}} - \dot{\mathrm{y}}\| = \frac{\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|}{\|\mathrm{x}\|\|\mathrm{y}\|}.$$

(Como é claro idênticas relações valem para qualquer outro par de vectores.) Pela desigualdade triangular ten-se:

$$\frac{\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|}{\|\mathrm{x}\|\|\mathrm{y}\|} \leq \frac{\|\mathrm{y} - \mathrm{z}\|}{\|\mathrm{y}\|\|\mathrm{z}\|} + \frac{\|\mathrm{z} - \mathrm{x}\|}{\|\mathrm{z}\|\|\mathrm{x}\|}.$$

A desigualdade de Ptolomeu obtém-se agora multiplicando ambos os membros da desigualdade anterior por $\|\mathrm{x}\|\|\mathrm{y}\|\|\mathrm{z}\|$. ◪

Teorema 7.13.— *Sejam, V um espaço linear com produto interno e $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno. Tem-se:*

$$|\|\mathrm{x}\| - \|\mathrm{y}\|| \leq \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|.$$

Demonstração.— Tem-se que $\|\mathrm{x}\| = \|\mathrm{x} - \mathrm{y} + \mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\| + \|\mathrm{y}\|$. Desta forma podemos concluir que

$$\|\mathrm{x}\| - \|\mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|.$$

Por outro lado, $\|y\| = \|y - x + x\| \le \|x - y\| + \|x\|$ e, desta forma, $\|y - \|x\| \le \|x - y\|$, ou seja

$$\|x\| - \|y\| \ge -\|x - y\|.$$

Em suma, tem-se que

$$-\|x - y\| \le -\|x - y\| \le \|x - y\|$$

o que equivale a $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$, como se pretendia. ◪

Usando a norma induzida pelo produto interno definimos uma métrica ou função distância $d(x, y)$ que se define de acordo com o seguinte:

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Teorema 7.14.— *Tem-se que:*

(1) $d(x, y) \ge 0$ *e* $d(x, y) = 0$ *se e so se* $x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) $d(x, y) \le d(x, u) + d(u, y)$.

7.2* Espaços normados e espaços métricos

Definição 7.15 (norma).— *Seja V um espaço linear. Uma norma em V é uma função $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz:*

(1) $\|x\| \ge 0$ *e* $\|x\| = 0$ *se e só se* $x = \mathbb{0}$*;*

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$*;*

(3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Um espaço linear equipado com uma mnorma diz-se um espaço normado.

Definição 7.16 (distância).— *Seja X um conjunto.*[3] *Uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ diz-se uma função distância se*

(a) $d(x, y) \ge 0$ *e* $d(x, y) = 0$ *se e só se* $x = y$*;*

(b) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

(c) $d(x, y) \le d(x, u) + d(u, y)$.

Um conjunto X equipado com uma função distância i.e., um par da forma (X, d) onde X é um conjunto não-vazio e d é uma função distância em X diz-se um espaço métrico.

[3] Não se pressupõe em X nenhum tipo de estrutura algébrica.

Vimos anteriormente que se um espaço linear possui um produto interno então, esse produto interno induz uma norma que se define através da relação

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

As normas que são induzidas por um produto interno satisfazem a denominada *lei do paralelogramo*.

Teorema 7.17.— *Sejam, V um espaço linear com produto interno e $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno. Nestas condições, $\|\cdot\|$ satisfaz a lei do paralelogramo i.e.,*

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2. \tag{7.4}$$

Neste caso, o produto interno pode ser definido a partir da norma através da identidade

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \tag{7.5}$$

se V for um espaço real e,

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-u\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) \tag{7.6}$$

se V for um espaço complexo.

Demonstração.— Tem-se que

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\qquad + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,\end{aligned}$$

como se pretendia. ◪

Lema 7.18.— *Sejam V um espaço linear e $\|\cdot\|$ ua norma em V. Tem-se:*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|. \tag{7.7}$$

Demonstração.— Exactamente a mesma demonstração que no caso do Teorema 7.13, pois a demonstração depende apenas da desigualdade triangular que é uma propriedade de qualquer norma. ◪

Qualquer norma permite definir uma função distância (ou *métrica*) de acordo com a relação:

$$d(x, y) = \|x-y\|.$$

Desta forma qualquer espaço normado é também um espaço métrico considerando a métrica induzida pela norma. Observe-se que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são espaços normados considerando como normas as funções módulo (em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$). Deste modo $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são espaços métricos considerando em ambos os acasos a métrica $d(a, b) = |a-b|$.

Definição 7.19 (função contínua).— *Sejam $(X, d), (\tilde{X}, \tilde{d})$ espaços métricos. Uma função $f : X \to \tilde{X}$ é contínua em $a \in X$:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)[d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon].$$

A função f é contínua em X se é contínua em qualquer $a \in X$.

Em particular, se U e V são espaços normados, com as normas $\|\cdot\|_U$ e $\|\cdot\|_V$ e se $f : U \to V$ é uma função, então f é contínua em $u \in U$ se

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)[\|x-u\|_U < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(u)\|_V < \epsilon].$$

O resultado do teorema precedente implica imediatamente que uma norma é uma função contínua.

Teorema 7.20.— *Seja V um espaço linear com uma norma $\|\cdot\|$ satisfazendo a lei do paralelogramo. Se V é um espaço linear real então a relação*

$$\mathbb{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|^2 - \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2\right)$$

define um produto interno em V. Se, por outro lado, V é um espaço linear complexo então, a relação

$$\mathbb{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|^2 - \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2 + i(\|\mathrm{x}+i\mathrm{y}\|^2 - \|\mathrm{x}-i\mathrm{y}\|^2)\right)$$

define um produto interno em V.

Em ambos os casos, a norma induzida por $\mathbb{f}$ é a norma inicial.

Demonstração.— Faremos a demonstração no caso complexo (no caso real a situação é completamente análoga). Começamos por observar que:

$$\mathbb{f}(\mathrm{x},\mathrm{x}) = \frac{\|\mathrm{x}\|^2}{4}\left(4 + i|1+i|^2 - i|1-i|^2\right) = \|\mathrm{x}\|^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathbb{f}(\mathrm{y},\mathrm{x}) &= \frac{1}{4}\left(\|\mathrm{y}+\mathrm{x}\|^2 - \|\mathrm{y}-\mathrm{x}\|^2 + i(\|\mathrm{y}+i\mathrm{x}\|^2 - \|\mathrm{y}-i\mathrm{x}\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|^2 - \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2 + i(\|i(\mathrm{x}-i\mathrm{y})\|^2 - \|i(\mathrm{x}-i\mathrm{y})\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|^2 - \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2 - i(\|\mathrm{x}+i\mathrm{y}\|^2 - \|\mathrm{x}-i\mathrm{y}\|^2)\right) = \\ &= \overline{\mathbb{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}.\end{aligned}$$

Para completar a prova de que $\mathbb{f}$ é um produto interno basta provar que para cada y a função $\mathbb{f}_\mathrm{y} : V \to \mathbb{C}$, definida por:

$$\mathbb{f}_\mathrm{y}(\mathrm{x}) := 4\mathbb{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

é linear i.e.[4]

(a) $\mathbb{f}_\mathrm{y}(\alpha\mathrm{u}) = \alpha\mathbb{f}_\mathrm{y}(\mathrm{u})$; e,

(b) $\mathbb{f}_\mathrm{y}(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = \mathbb{f}_\mathrm{y}(\mathrm{u}) + \mathbb{f}_\mathrm{y}(\mathrm{v})$.

Começamos por estabelecer uma versão de (a) e a asserção (b). Tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathbb{f}_\mathrm{y}(i\mathrm{u}) &= \|i\mathrm{u}+\mathrm{y}\|^2 - \|i\mathrm{u}-\mathrm{y}\|^2 + i(\|i(\mathrm{u}+\mathrm{y})\|^2 - \|i(\mathrm{u}-\mathrm{y})\|^2) = \\ &= i(\|\mathrm{u}+\mathrm{y}\|^2 - \|\mathrm{u}-\mathrm{y}\|^2 + i(\|\mathrm{u}+i\mathrm{y}\|^2 - \|\mathrm{u}-i\mathrm{y}\|^2)) = \\ &= i\mathbb{f}_\mathrm{y}(\mathrm{u}).\end{aligned}$$

Como a norma satisfaz a lei do paralelogramo tem-se que:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{u}+\mathrm{y}\|^2 + \|\mathrm{v}+\mathrm{y}\|^2 &= \frac{1}{2}(\|\mathrm{u}+\mathrm{v}+2\mathrm{y}\|^2 + \|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|^2) = \\ &= 2\|(1/2)(\mathrm{u}+\mathrm{v})+\mathrm{y}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|^2.\end{aligned}$$

Igualdades análogas obtêm-se substituindo y por $-\mathrm{y}$, $i\mathrm{y}$ e $-i\mathrm{y}$. A partir dessas igualdades é possível estabelecer (deixamos os cálculos a cargo do leitor):

$$\mathbb{f}_\mathrm{y}(\mathrm{u}) + \mathbb{f}_\mathrm{y}(\mathrm{v}) = 2\mathbb{f}_\mathrm{y}\left(\frac{1}{2}(\mathrm{u}+\mathrm{v})\right).$$

Se considerarmos $\mathrm{x} = \mathrm{u}$ e $\mathrm{v} = \mathbb{0}$ na igualdade acima, tendo em conta que claramente $\mathbb{f}_\mathrm{y}(\mathbb{0}) = 0$, obtemos:

$$\mathbb{f}_\mathrm{y}(\mathrm{x}) = 2\mathbb{f}_\mathrm{y}\left(\frac{1}{2}\mathrm{x}\right)$$

[4] Observe-se que uma função T é linear se e só se αT é linear (para $\alpha \neq 0$). Aqui consideramos $\alpha = 4$ para simplificar as contas evitando a sistemática referência ao escalar 1/4.

então concluímos que:

$$\mathbb{f}_{\mathrm{y}}(\mathrm{u})+\mathbb{f}_{\mathrm{y}}(\mathrm{v})=2\mathbb{f}_{\mathrm{y}}\left(\frac{1}{2}(\mathrm{u}+\mathrm{v})\right)=\mathbb{f}_{\mathrm{y}}(\mathrm{u}+\mathrm{v}),$$

estabelecendo assim (b). Resta-nos provar que o conjunto

$$\mathbb{C}_{\mathrm{x}}=\{\alpha\in\mathbb{C}\mid \mathbb{f}_{\mathrm{y}}(\alpha\mathrm{x})=\alpha\mathbb{f}_{\mathrm{y}}(\mathrm{x})\}$$

coincide, para cada x com $\mathbb{C}$. Como a função $\mathbb{f}_{\mathrm{y}}$ é claramente contínua, o mesmo sucede com a função $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, definida por

$$h(\alpha):=\mathbb{f}_{\mathrm{y}}(\alpha\mathrm{x}).\alpha\mathbb{f}_{\mathrm{y}}(\mathrm{x}).$$

Tem-se que $\mathbb{C}_{\mathrm{x}}=h^{-1}(\{0\})$ e é por isso um conjunto fechado. É fácil verificar que $1,i\in\mathbb{C}_{\mathrm{x}}$ e que este conjunto é fechado para as operações de adição e multiplicação, bem como para inversos. Desta forma qualquer número complexo da forma $p+qi$ onde $p,q\in\mathbb{Q}$ é elemento de $\mathbb{C}_{\mathrm{x}}$. Como este conjunto é fechado (do ponto de vista topológico) tem-se que $\mathbb{C}_{\mathrm{x}}=\mathbb{C}$, como se pretendia. ☒

7.3 Bases ortonormadas

Seja V um espaço linear com produto interno. Uma *base ortonormada* de V é uma base $\boldsymbol{\beta}=(\mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{u}_n)$ que satisfaz:

$$\langle\mathrm{u}_i,\mathrm{u}_j\rangle=\delta_{i,j}:=\begin{cases}1 & (\text{se } i=j)\\ 0 & (\text{se } i\neq j)\end{cases}.$$

Uma base $\boldsymbol{\beta}=(\mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{u}_n)$ é *ortogonal* se

$$\langle\mathrm{u}_i,\mathrm{u}_j\rangle=0\quad(\text{se } i\neq j).$$

Teorema 7.21.— *Sejam, V um espaço linear com produto interno e $X=\{\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_k\}$ um conjunto ortogonal tal que $\mathbb{0}\notin X$. Se $\mathrm{w}\in L_V(\{\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_k\})$ então,*

$$\mathrm{w}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle\mathrm{w},\mathrm{x}_i\rangle}{\|\mathrm{x}_i\|^2}\mathrm{x}_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{\langle\mathrm{w},\mathrm{x}_i\rangle}{\langle\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_i\rangle}\mathrm{x}_i. \tag{7.8}$$

Demonstração.— Se $\mathrm{w}\in L_V(\{\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n\})$ então existem escalares $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ tais que $\mathrm{w}=\alpha_1\mathrm{x}_1+\cdots+\alpha_n\mathrm{x}_n$. Resta-nos provar que para qualquer $1\le i\le n$ se tem $\alpha_i=\langle\mathrm{w},\mathrm{x}_i\rangle/\langle\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_i\rangle$. Tem-se então o seguinte:

$$\frac{\langle\mathrm{w},\mathrm{x}_i\rangle}{\langle\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_i\rangle}=\frac{\langle\alpha_1\mathrm{x}_1+\cdots+\alpha_n\mathrm{x}_n,\mathrm{x}_i\rangle}{\langle\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_i\rangle}=\alpha_1\frac{\langle\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_i\rangle}{\langle\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_i\rangle}+\cdots+\alpha_n\frac{\langle\mathrm{x}_n,\mathrm{x}_i\rangle}{\langle\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_i\rangle}=$$

$$=\alpha_i\frac{\langle\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_i\rangle}{\langle\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_i\rangle}=\alpha_i.$$

como se pretendia. ☒

Corolário 7.21.1.— *Se no teorema anterior, o conjunto X é ortonormado então, dado $\mathrm{w}\in L_V(\{\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_k\})$ tem-se que:*

$$\mathrm{w}=\sum_{i=1}^{k}\langle\mathrm{w},\mathrm{x}_i\rangle\mathrm{x}_i. \tag{7.9}$$

Demonstração.— Neste caso, para cada $1\le i\le n$ tem-se $\langle\mathrm{x}_i,\mathrm{x}_i\rangle=1$. ☒

Corolário 7.21.2.— *Sejam, V um espaço linear com produto interno e X um conjunto ortogonal tal que $\mathbb{0} \notin X$. Nestas condições, X é um conjunto linearmente independente de vectores.*

Demonstração.— Tem-se $\mathbb{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{x}_i$ se e só se, para todo o $1 \leq i \leq n$ se tem:

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbb{0}, \mathrm{x}_i \rangle}{\langle \mathrm{x}_i, \mathrm{x}_i \rangle} = 0.$$

Concluímos assim que $\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n\}$ é linearmente independente. ◪

Os resultados precedentes revelam que é muito simples calcular as coordenadas de um vector relativamente a uma base ortogonal (ou ortonormada) de um espaço linear com produto interno, V. No entanto coloca-se uma questão importante: *se V é um espaço linear com produto interno, será que V possui uma base ortogonal*?

De facto existe um procedimento algorítmico que permite, a partir de uma qualquer base $\boldsymbol{\beta}$ de V, obter uma base ortogonal do mesmo espaço.

Com o propósito de motivar este processo, consideramos o caso da dimensão 2. Seja então, $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$ uma base $\mathbb{R}^2$. Pretendemos agora obter, a partir de $\boldsymbol{\beta}$ uma base ortogonal $\bar{\boldsymbol{\beta}} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$. Considerando a figura ??? constata-se que podemos considerar $\mathrm{v}_1 = \mathrm{u}_1$ e $\mathrm{v}_2 = \mathrm{u}_2 - \alpha \mathrm{u}_1$ onde α é um escalar conveniente que assegura que $\mathrm{u}_2 - \alpha \mathrm{u}_1 \perp \mathrm{u}_1$ i.e.,

$$\langle \mathrm{u}_2 - \alpha \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1 \rangle = 0$$

Ora, esta última igualdade é equivalente a

$$\langle \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_1 \rangle - \alpha \langle \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1 \rangle = 0$$

donde resulta imediatamente que o escalar α satisfaz:

$$\alpha = \frac{\langle \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_1 \rangle}{\langle \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1 \rangle} = \frac{\langle \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_1 \rangle}{\|\mathrm{u}_1\|^2}.$$

Definição 7.22.— *Se V é um espaço linear com produto interno e* $\mathrm{x}, \mathrm{w} \in V$ *então, a projecção ortogonal de* x *sobre* w *é,*

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{w}} \mathrm{x} := \frac{\langle \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_1 \rangle}{\langle \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1 \rangle} \mathrm{w} = \frac{\langle \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_1 \rangle}{\|\mathrm{u}_1\|^2} \mathrm{w}.$$

Assim se V é um espaço de dimensão 2, e $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$ é uma base de V, tem-se que $\bar{\boldsymbol{\beta}} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 - \mathrm{Proj}_{\mathrm{u}_1} \mathrm{u}_2)$ é uma base ortogonal de V. O resultado seguinte descreve o *método de ortogonalização de Gram-Schmidt* que constitui uma generalização do caso que acabámos de descrever.

Teorema 7.23.— *Sejam, V um espaço com produto interno e $X = \{\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_k\} \subset V$. Nestas condições, existe um conjunto X^*, ortogonal, tal que $L_V(X) = L_V(X^*)$. Mais precisamente, começando por considerar a sequência*

$$\mathrm{w}_1^* = \mathrm{w}_1, \quad \mathrm{w}_i^* = \mathrm{w}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{Proj}_{\mathrm{w}_j^*} \mathrm{w}_i \quad (2 \leq i \leq n),$$

o conjunto X^* é $\{\mathrm{w}_1^*, \ldots, \mathrm{w}_k^*\} \setminus \{\mathbb{0}\}$.

Demonstração.— Os vectores $w_1^*, \dots, w_k^*$ são dois-a-dois ortogonais, por construção. Admitindo o contrário seria possível considerar o mínimo $1 \leq i < k$ tal que $\{w_1^*, \dots, w_i^*\}$ é ortogonal mas $\{w_1^*, \dots, w_i^*, w_{i+1}^*\}$ deixa de ser ortogonal. Nestas condições existiria $j \leq i$ tal que $\langle w_{i+1}^*, w_j^* \rangle \neq 0$. No entanto,

$$\begin{aligned}\langle w_{i+1}^*, w_j^* \rangle &= \left\langle w_{i+1} - \sum_{s=1}^{i} \frac{\langle w_{i+1}, w_s^* \rangle}{\langle w_s^*, w_s^* \rangle} w_s^*, w_j^* \right\rangle \\ &= \langle w_{i+1}, w_j^* \rangle - \frac{\langle w_{i+1}, w_j^* \rangle}{\langle w_j^*, w_j^* \rangle} \langle w_j^*, w_j^* \rangle = 0,\end{aligned}$$

obtendo-se assim uma contradição.

Resta-nos mostrar que

$$L_V(\{w_1, \dots, w_k\}) = L_V(\{w_1^*, \dots, w_k^*\} \setminus \{\mathbb{0}\}).$$

Em primeiro lugar, $w_i^* \in L_V(\{w_1, \dots, w_k\})$ para $i = 1, \dots, k$. Isso é claro pois $w_1^* = w_1$ e, admitindo que para todo o $j < i$ se tem $w_j^* \in L_V(\{w_1, \dots, w_k\})$ então

$$w_i^* = w_i - \sum_{1 \leq j < i} \frac{\langle w_i, w_j^* \rangle}{\langle w_j^*, w_j^* \rangle} w_j^* \tag{7.10}$$

que, por hipótese é uma combinação linear de elementos de $L_V(\{w_1, \dots, w_k\})$ e por isso é um elemento daquele subespaço, como se pretendia. Desta forma, por indução, concluímos que

$$L_V(\{w_1^*, \dots, w_k^*\} \setminus \{\mathbb{0}\}) \subset L_V(\{w_1, \dots, w_k\}).$$

Resta-nos provar a inclusão contrário que equivale a provar que cada um dos w_i é membro de $L_V(\{w_1^*, \dots, w_k^*\} \setminus \{\mathbb{0}\})$. Mais uma vez usamos indução. O resultado é claro para $w_1 = w_1^*$. Admitindo que para todo o $1 \leq j < i$ se tem $w_j \in L_V(\{w_1^*, \dots, w_k^*\} \setminus \{\mathbb{0}\})$, da relação (7.10) resulta que:

$$w_i = w_i^* - \sum_{1 \leq j < i} \frac{\langle w_i, w_j^* \rangle}{\langle w_j^*, w_j^* \rangle} w_j^*$$

que é membro de $L_V(\{w_1^*, \dots, w_k^*\} \setminus \{\mathbb{0}\})$ tendo em conta a hipótese considerada. O resultado fica então estabelecido por indução. ☒

De uma base ortogonal $\boldsymbol{\beta} = (u_1, \dots, u_n)$ é fácil obter uma base ortonormada, basta considerar:

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \left(\frac{1}{\|u_1\|} u_1, \dots, \frac{1}{\|u_n\|} u_n \right).$$

Dado um vector não-nulo x o vector $(1/\|x\|)x$ é um vector que gera o mesmo subespaço que x e tem norma 1. Este vector denomina-se de *versor de* x e denota-se $\mathrm{vers}(x)$.

Teorema 7.24.— *Seja $V \neq \{\mathbb{0}\}$ um espaço vectorial com produto interno. Tem-se que V possui bases ortonormadas, $\boldsymbol{\beta} = (v_1, \dots, v_n)$. Além disso, relativamente a cada uma dessas bases $\boldsymbol{\beta}$ tem-se que:*

$$x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle x, v_n \rangle v_n = \mathrm{Proj}_{v_1}(x) + \dots + \mathrm{Proj}_{v_n}(x).$$

Demonstração.— Já vimos que todo o espaço linear tem uma base e, pelo que vimos anteriormente, a partir dessa base podemos gerar uma base ortonormada usando o algoritmo de Gram-Schmidt.[5] $\boxslash$

[5] De facto o algoritmo de Gram-Schmidt permite obter uma base ortonormada de um subespaço a partir de um qualquer conjunto gerador desse mesmo subespaço.

Corolário 7.24.1.— *Sejam, $V \neq \{\mathbb{0}\}$ um espaço vectorial com produto interno e $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n)$ uma base ortonormada de V. Se T é um operador em V e $A = [T]_{\boldsymbol{\beta}}$ então, para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$ tem-se que*

$$A_{i,j} = \langle T(\mathrm{v}_j), \mathrm{v}_i \rangle.$$

Demonstração.— A coluna j da matriz $[T]_{\boldsymbol{\beta}}$ é

$$(T(\mathrm{v}_j))_{\boldsymbol{\beta}} = (\langle T(\mathrm{v}_j), \mathrm{v}_1 \rangle, \dots, \langle T(\mathrm{v}_j), \mathrm{v}_n \rangle).$$

de acordo com o corolário 7.21.1, o que estabelece de imediato o resultado. $\boxslash$

Definição 7.25.— *Seja V um espaço linear com produto interno. Fixando uma base ortonormada, $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_n)$, de V, dado $\mathrm{x} \in V$, os* coeficientes de Fourier *de* x *relativos a $\boldsymbol{\beta}$ são os escalares $\langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_i \rangle$ onde $i = 1, \dots, n$.*

7.3.1 Complemento ortogonal

Definição 7.26.— *Sejam, V um espaço linear com produto interno e $\emptyset \neq X \subset V$. O* complemento ortogonal *de X é o subconjunto de V que se denota por $X^{\perp}$ e se define:*

$$X^{\perp} := \{\mathrm{x} \in V \mid (\forall \mathrm{u} \in X) \langle \mathrm{x}, \mathrm{u} \rangle = 0\}.$$

Lema 7.27.— *Se V é um espaço linear com produto interno e $\emptyset \neq X \subset V$ então $X^{\perp}$ é um subespaço de V.*

Demonstração.— Temos que $\mathbb{0} \in X^{\perp}$, como se constata sem dificuldade. Por outro lado, se $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in X^{\perp}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ então, dado $\mathrm{x} \in X$ tem-se:

$$\langle \alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v}, \mathrm{x} \rangle = \alpha \langle \mathrm{u}, \mathrm{x} \rangle + \beta \langle \mathrm{v}, \mathrm{x} \rangle = 0.$$

Tem-se assim que $\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v} \in X^{\perp}$ e assim $X^{\perp}$ é um subespaço de V. $\boxslash$

Corolário 7.27.1.— *Sejam, V um espaço linear com produto interno e $W \leq V$ um subespaço da forma $W = L_V(\{\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_k\})$ então,*

$$W^{\perp} = \{\mathrm{x} \in V \mid \langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_1 \rangle = \cdots = \langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_k \rangle = 0\}. \tag{7.11}$$

Demonstração.— É claro que se $\mathrm{x} \in W^{\perp}$ então x satisfaz (7.11). Suponhamos então que x satisfaz (7.11) para estabelecer que, nestas condições, $\mathrm{x} \in W^{\perp}$. Dado $\mathrm{w} \in W$ tem-se que existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tais que $\mathrm{w} = \alpha_1 \mathrm{w}_1 + \cdots + \alpha_k \mathrm{w}_k$. Neste caso,

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{w} \rangle = \langle \mathrm{x}, \alpha_1 \mathrm{w}_1 + \cdots + \alpha_k \mathrm{w}_k \rangle = \bar{\alpha}_1 \langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_1 \rangle + \cdots + \bar{\alpha}_k \langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_k \rangle = 0,$$

concluindo-se que $\mathrm{x} \in W^{\perp}$, como pretendido. $\boxslash$

Se, V é um espaço linear com produto interno, $W \leq V$ e $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_k)$ uma base ortogonal de W então, a $\boldsymbol{\beta}$-projecção ortogonal de um vector $\mathrm{x} \in V$ sobre

W é:

$$\mathrm{Proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{x} = \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_1\rangle}{\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_1\rangle}\mathrm{w}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_k\rangle}{\langle \mathrm{w}_k, \mathrm{w}_k\rangle}\mathrm{w}_k = \mathrm{Proj}_{\mathrm{w}_1}\mathrm{x} + \cdots + \mathrm{Proj}_{\mathrm{w}_k}\mathrm{x}. \quad (7.12)$$

Observe-se que nestas condições se tem que $\mathrm{proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}(x) \in W$. Por outro lado, se $\mathrm{x} \in V$ tem-se que $\mathrm{x} - \mathrm{proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}(x) \in W^{\perp}$. Com efeito:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{x} - \mathrm{proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}(x), \mathrm{w}_j\rangle &= \left\langle \mathrm{x} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_i\rangle}{\langle \mathrm{w}_i, \mathrm{w}_i\rangle}\mathrm{w}_i, \mathrm{w}_j \right\rangle = \\ &= \langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_i\rangle}{\langle \mathrm{w}_i, \mathrm{w}_i\rangle}\langle \mathrm{w}_i, \mathrm{w}_j\rangle = \\ &= \langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_j\rangle - \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_j\rangle}{\langle \mathrm{w}_j, \mathrm{w}_i\rangle}\langle \mathrm{w}_j, \mathrm{w}_j\rangle = 0.\end{aligned}$$

Tem-se então que $V = W + W^{\perp}$. Por outro lado, $W \cap W^{\perp} = \{\mathbb{0}\}$ já que admitindo que $\mathrm{x} \in W \cap W^{\perp}$ tem-se que $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle = 0$, o que implica imediatamente $\mathrm{x} = \mathbb{0}$.

De tudo isto concluímos que $V = W \oplus W^{\perp}$.

Lema 7.28.— *Se V um espaço linear com produto interno, $W \leq V$ e $\boldsymbol{\beta}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}$ são bases ortogonais de W então,*

$$\mathrm{Proj}_W^{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}\mathrm{x} = \mathrm{Proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{x}.$$

Demonstração.— Temos, para qualquer $\mathrm{x} \in V$ que:

$$\mathrm{x} = (\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W^{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}\mathrm{x}) + \mathrm{Proj}_W^{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}\mathrm{x} = (\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{x}) + \mathrm{Proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{x}.$$

Como $\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W^{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}\mathrm{x}, \mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{x} \in W^{\perp}$ e $\mathrm{Proj}_W^{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}\mathrm{x}, \mathrm{Proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{x} \in W$ e, dado que se tem $V = W \oplus W^{\perp}$, pela unicidade de representação numa soma directa, concluímos que $\mathrm{Proj}_W^{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}\mathrm{x} = \mathrm{Proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{x}$ e $\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W^{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}\mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{x}$, como era necessário para concluir a demonstração. como se pretendia. ◪

O lema precedente mostra que as $\boldsymbol{\beta}$-projecções ortogonais de um vector x sobre um espaço W coincidem, independentemente da base ortogonal $\boldsymbol{\beta}$ que se considere em W. Esta invariância justifica a seguinte definição,

Definição 7.29.— *Sejam, V um espaço linear com produto interno e $W \leq V$. A projecção ortogonal de um vector $\mathrm{x} \in V$ sobre W é o vector $\mathrm{Proj}_W^{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{x}$ onde $\boldsymbol{\beta}$ é uma (qualquer) base ortogonal de W. A projecção ortogonal de x sobre W denota-se $\mathrm{Proj}_W(x)$.*

Teorema 7.30.— *Sejam, V um espaço linear com produto interno e $W \leq V$. Tem-se:*

(1) $\mathrm{Proj}_W : V \to V$ *é uma transformação linear;*

(2)

(3) *se* $\mathrm{x} \in W$ *então* $\mathrm{Proj}_W\mathrm{x} = \mathrm{x}$*;*

(4) $\mathrm{Nuc}(\mathrm{Proj}_W) = W^{\perp}$*;*

(5) $\mathrm{Im}(\mathrm{Proj}_W) = W$.

Demonstração.—
(1) Resulta imediatamente das propriedades do produto interno.

(2) Se $\mathrm{x} \in W$ então

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_i \rangle}{\langle \mathrm{w}_i, \mathrm{w}_i \rangle} \mathrm{w}_i = \mathrm{Proj}_W \mathrm{x},$$

pelo teorema 7.21 e pela definição de projecção ortogonal.

(3) É claro que se $\mathrm{x} \in W^{\perp}$ então $\mathrm{Proj}_W \mathrm{x} = \mathbb{0}$. Por outro lado, se $\mathrm{x} \notin W^{\perp}$ então $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_1$ onde $\mathrm{x}_0 \in W^{\perp}$ e $\mathrm{x}_1 \in W$ com $\mathrm{x}_1 \neq \mathbb{0}$. Tem-se então que $\mathrm{Proj}_W(\mathrm{x}) = \mathrm{Proj}_W(\mathrm{x}_0 + \mathrm{x}_1) = \mathrm{x}_1 \neq \mathbb{0}$. Destas considerações resulta imediatamente que $W^{\perp} = \mathrm{Nuc}(\mathrm{Proj}_W)$.

(4) É claro a partir das considerações precedentes. ◻

As considerações anteriores permitem de imediato estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 7.31.— *Sejam, V um espaço linear com produto interno e $W \leq V$. Tem-se que $V = W \oplus W^{\perp}$. Além disso, dado $\mathrm{x} \in V$ tem-se:*

(1) $\mathrm{Proj}_W \mathrm{x} \in W$;

(2) $\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x} = \mathrm{Proj}_{W^{\perp}} \mathrm{x} \in W^{\perp}$;

(3) $\mathrm{x} = \mathrm{Proj}_W \mathrm{x} + \mathrm{Proj}_{W^{\perp}} \mathrm{x}$.

A projecção ortogonal $\mathrm{Proj}_W \mathrm{x}$ permite de forma directa determinar a solução de um problema importante: o problema de determinar num subespaço W qual o vector mais próximo de um vector $\mathrm{x} \in V$.

Teorema 7.32.— *Sejam, v um espaço linear com produto interno e $W \leq V$. Dado $\mathrm{x} \in V$, o vector $\mathrm{Proj}_W \mathrm{x}$ é o vector de W mais próximo de x i.e., dado $\mathrm{w} \in W$ tem-se que:*

$$\|\mathrm{x} - \mathrm{w}\| \geq \|\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}\|.$$

Demonstração.— Como vimos antes, qualquer vector $\mathrm{x} \in V$ pode ser decomposto numa soma do tipo $\mathrm{x} = (\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}) + \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}$. Tem-se então que

$$\begin{aligned} \|\mathrm{x} - \mathrm{w}\|^2 &= \|(\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}) + (\mathrm{Proj}_w \mathrm{x} - \mathrm{w})\|^2 = \\ &= \|\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}\|^2 + \|\mathrm{Proj}_w \mathrm{x} - \mathrm{w})\|^2 = \|(\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}\|^2, \end{aligned}$$

pelo teorema de Pitágoras. Fica então claro que $\|\mathrm{x} - \mathrm{w}\|^2 \geq \|(\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}\|^2$, ou seja, $\|\mathrm{x} - \mathrm{w}\| \geq \|(\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}\|$, como pretendido. ◻

Teorema 7.33.— *Sejam, V um espaço linear com produto interno e $W \leq V$. Se $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_k)$ é uma base ortogonal de W então $\boldsymbol{\beta}$ pode estender-se a uma base ortogonal $\boldsymbol{\beta}^*$ de V, da forma:*

$$\boldsymbol{\beta}^* = (\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_k, \mathrm{w}_{k+1}, \ldots \mathrm{w}_n).$$

Nestas condições, $\boldsymbol{\beta}^+ = (\mathrm{w}_{k+1}, \ldots \mathrm{w}_n)$ é uma base ortogonal de $W^{\perp}$.

Demonstração.— Consideremos uma base ortogonal, $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_k)$, de W. Podemos completar $\boldsymbol{\beta}$ de modo a obter uma base $\boldsymbol{\beta}^\circ(\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_k, \mathrm{u}_{k+1}, \dots \mathrm{u}_n)$ de V. Se aplicarmos o algoritmo de Gram-Schmidt a esta sequência de vectores, obtemos uma base ortogonal de V, $\boldsymbol{\beta}^* = (\mathrm{w}_1^*, \dots, \mathrm{w}_k^*, \mathrm{u}_{k+1}^*, \dots \mathrm{u}_n^*)$.

Dado que os vectores $\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_k$ já são ortogonais eles não são alterados pelo método de Gram-Schmidt i.e., $\mathrm{w}_1 = \mathrm{u}_1^*, \dots, \mathrm{w}_k = \mathrm{w}_k^*$. A base $\boldsymbol{\beta}^*$ tem então a forma $\boldsymbol{\beta}^* = (\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_k, \mathrm{w}_{k+1}, \dots \mathrm{w}_n)$, onde $\mathrm{w}_{k+1} = \mathrm{u}_{k+1}^*, \dots, \mathrm{w}_n = \mathrm{u}_n^*$.

Não é difícil constatar que $\boldsymbol{\beta}^+$ é uma base de $W^\perp$. Com efeito $\boldsymbol{\beta}^+ \subset W^\perp$ e assim, $L_V(\{\mathrm{w}_{k+1}, \dots \mathrm{w}_n\}) \subset W^\perp$. Como $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$ constata-se que $\dim(W^\perp) = \dim(L_V(\{\mathrm{w}_{k+1}, \dots \mathrm{w}_n\}))$. assim tem que se ter

$$W^\perp = L_V(\{\mathrm{w}_{k+1}, \dots \mathrm{w}_n\}),$$

como se pretendia estabelecer. $\boxslash$

Exercícios

Problema 7.1.— Considere os vectores $u = (4, 1, -2)$ e $v = (2, -1, 3)$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule: © ESD

a) $\|u + v\|$; b) $\|u\| + \|v\|$; c) $\| -3u\|$; d) $(1/\|v\|)v$; e) $\|(1/\|v\|)v\|$; f) $\theta_{u,v}$.

Problema 7.2.— Sendo $v = (3, -2, 6, 0)$, diga para que valores de k se tem $\|kv\| = 7$. © ESD

Problema 7.3.— Determine os valores de k para os quais u e v são vectores ortogonais. © ESD

a) $u = (2, 1)$, $v = (k, 2)$. b) $u = (k, k, 1)$, $v = (k, 4, 3)$.

Problema 7.4.— Verifique a desigualdade de Cauchy–Schwarz para os vectores $u = (0, -2, 2, 1)$ e $v = (-1, -1, 1, 1)$. © ESD

Problema 7.5.— Sejam, $B = (e_1, e_2, e_3)$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. © ESD

Para cada uma das expressões seguintes determine a matriz $G = [\langle e_i, e_j\rangle]$, e deduza se essas expressões se podem escrever na forma matricial $\langle u, v\rangle = u^\top G v$.

Com base nestes cálculos justifique quais das expressões definem um produto interno em $\mathbb{R}^3$ e nos restantes casos indique as propriedades da definição de produto interno que falham.

(a) $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_3v_3$;
(b) $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3$;
(c) $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$;
(d) $\langle u, v\rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$;
(e) $\langle u, v\rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$.

Problema 7.6.— Seja $\{u, v\}$ um conjunto ortogonal de vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $\|u\| = 1$ e $\|v\| = 2$. Calcule $\operatorname{dist}(u, v)$, e interprete geometricamente o resultado quando $n = 2$. © ESD

Problema 7.7.— Qual dos seguintes conjuntos constitui uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que é ortogonal à recta definida por: © AL

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \quad ?$$

A) $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$; B) $\{(1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$;

C) $\{(1, 1, 1), (1, 1, -2)\}$; D) $\{(1, 1, 0), (1, -2, 1)\}$.

Problema 7.8.— Seja $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Considerando em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual, qual dos seguintes conjuntos constitui uma base ortogonal do espaço das colunas de A? © AL

A) $\{(1,-1,1,2),(1,1,-2,1)\}$; B) $\{(1,-1,1,2),(1,1,-2,1),(1,3,2,0)\}$;

C) $\{(1,-1,1,2),(1,1,-2,1),(-3,1,0,2)\}$; D) $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

Problema 7.9.— Sejam $\mathrm{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $\mathrm{v} = (2/\sqrt{k}, 2/\sqrt{k})$. Determine os valores de k para os quais o conjunto $\{\mathrm{u},\mathrm{v}\}$ é ortonormado. © ESD

Problema 7.10.— Sejam $\mathrm{u} = (5/\sqrt{70}, 2/\sqrt{70})$ e $\mathrm{v} = (-1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7})$. Verifique que o conjunto $\{\mathrm{u},\mathrm{v}\}$ é ortonormado relativamente ao produto interno: © ESD

$$\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle = 2u_1v_1 + 5u_2v_2,$$

onde $\mathrm{u} = (u_1,u_2)$ e $\mathrm{v} = (v_1,v_2)$. Diga ainda se este conjunto é ortonormado em relação ao produto interno usual em $\mathbb{R}^2$.

Problema 7.11.— Em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, qual a melhor aproximação de $(7,7,3)$ por elementos de $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,-1,1),(1,1,6)\})$? © AL

A) $(-2,4,5)$; B) $(0,2,5)$; C) $(-3,5,2)$; D) $(-3,-1,4)$.

Problema 7.12.— Calcule: © ESD

(a) $\mathrm{Proj}_{(1,2)}(-1,-1)$;

(b) $\mathrm{Proj}_{(1,2,3)}(-\pi,-2\pi,-3\pi)$.

Problema 7.13.— Utilize o método de Gram-Schmidt e o processo de normalização para obter uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ a partir da base © ESD

$$\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}.$$

Problema 7.14.— Determinar a distância (considerando a norma usual em $\mathbb{R}^3$) do vector $(1,-1,0)$ ao conjunto das soluções do sistema homogéneo $A\mathrm{u} = \mathbb{0}$, onde © AL

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

é:

A) $\sqrt{6}$; B) $\sqrt{2}$; C) $2\sqrt{2}$; D) $\sqrt{3}$.

Problema 7.15.— Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Qual dos seguintes vectores pertence a $\mathrm{EC}(A)^\perp$, o complemento ortogonal do espaço das colunas de A, onde © AL

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}?$$

A) $(1,2,1)$; B) $(1,-2,1)$; C) $(1,2,-3)$; D) $(1,-2,3)$.

Problema 7.16.— Seja $S = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,2,3),(3,2,1)\})$. Qual dos seguintes conjuntos é uma base ortogonal de S?

A) $\{(1,2,3),(-3,0,1)\}$; B) $\{(3,2,1),(-1,1,1)\}$;
C) $\{(4,5,-4),(1,0,1)\}$; D) $\{(2,0,-2),(1,1,1)\}$.

Problema 7.17.— Sejam $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathrm{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e © ESD

$$\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3.$$

(a) Escreva ϕ na forma $\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x}^\top A\mathrm{y}$.

(b) Verifique que A é uma matriz simétrica e definida positiva (i.e., $\mathrm{x}^\top A\mathrm{x} > 0$ para $\mathrm{x} \neq \mathbb{0}$, ou equivalentemente, os valores próprios de A são todos positivos). Use este resultado para justificar que ϕ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

As alíneas que se seguem dizem respeito ao produto interno ϕ.

(c) Verifique que os vetores $\mathrm{e}_1 = (1,0,0)$ e $\mathrm{e}_2 = (0,1,0)$ não são ortogonais.

(d) Determine $\mathrm{Proj}_{\mathrm{e}_1}\mathrm{e}_2$.

(e) Determine um vetor ortogonal a e_1.

(f) Determine o ângulo entre e_1 e e_2.

(g) Utilize o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ a partir da base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Problema 7.18.— Considere $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida, para $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathrm{y} = (y_1, y_2)$ através de: $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2(x_2y_1 + x_1y_2)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira? © AL

A) F não é linear na primeira variável.
B) F não é simétrica.
C) F não é positiva.
D) F é um produto interno.

Problema 7.19.— Considere em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^\top)$. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definido por: © AL

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Qual das seguintes é a melhor aproximação da matriz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

através de elementos de S?

A) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Problema 7.20.— Determine uma base ortonormada para © ESD

$$U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,-1,0),(-1,2,0,1),(2,0,2,1),(2,2,1,1)\}).$$

Problema 7.21.— Considere o subespaço $U = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,1,1)\})$ e o vector $\mathrm{x} = (2,1,1)$. © ESD

(a) Determine $\text{Proj}_U \text{x}$.

(b) Determine a distância de x a U.

Problema 7.22.— Seja W o espaço linear das funções reais contínuas definidas no intervalo $[a, b]$. © ESD

(a) Verifique que
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$
define um produto interno em W.

(b) Usando o produto interno acima e $[a, b] = [-1, 1]$, determine a norma de cada polinómio do conjunto $\{1, t, t^2, t^3\}$.

(c) Aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter um conjunto ortogonal de polinómios a partir do conjunto da alínea anterior.

Problema 7.23.— Considere a matriz © ESD
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Sem efectuar quaisquer cálculos, justifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

1. $\dim(\text{EL}(A)) + \dim(\text{Nuc}(A) = 4$.
2. $\dim(\text{EC}(A)) + \dim(\text{Nuc}(A) = 4$.

(b) Determine uma base para o complemento ortogonal do núcleo de A.

(c) Determine uma base para o complemento ortogonal do núcleo de $A^\top$.

Problema 7.24.— Encontre uma base para o complemento ortogonal do subespaço U, dado por © ESD

(a) $U = L_{\mathbb{R}^5}(\{(1, 1, -1, -1, 1), (1, 2, 3, 4, 1), (2, 1, -6, -7, 1)\})$.

(b) $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 2, 3, 4), (2, 4, 6, 8)\})$.

Problema 7.25.— Considere o hiperplano de $\mathbb{R}^4$: © ESD
$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z - 2w = 0\}.$$

(a) Determine uma base para o subespaço $W^\perp$.

(b) Exprima o vector $\text{w} = (1, 2, 1, -1)$ como $\text{w} = \text{w}_1 + \text{w}_2$, onde $\text{w}_1 \in W$ e $\text{w}_2 \in W^\perp$.

(c) Calcule as distâncias $\text{dist}((1, 2, 1, -1), W)$ e $\text{dist}((1, 2, 1, -1), W^\perp)$.

Problema 7.26.— Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido pelas equações paramétricas $x = 2t$, $y = -5t$ e $z = 4t$, com $t \in \mathbb{R}$. Determine a projeção ortogonal $\text{Proj}_{W^\perp}(1, 0, -1)$, do vector $(1, 0, -1)$ sobre o subespaço W. © ESD

Problema 7.27.— Seja $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o espaço linear real das matrizes reais (2×2), e U o subespaço das matrizes anti-simétricas (i.e $A = -A^\top$). Em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ considere o produto interno

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$$

onde tr designa o traço de uma matriz.

(a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido acima é de facto um produto interno.

(b) Determine a dimensão de U e de $U^\perp$.

(c) Determine bases ortonormadas para U e para $U^\perp$.

(d) Determine as projeções ortogonais de

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

sobre U e sobre $U^\perp$.

(e) Qual a matriz anti-simétrica mais próxima da matriz C da alínea anterior?

(f) Determine a distância de C a U.

Problema 7.28.— No espaço $\mathbb{R}_2[t]$ dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2 considere a expressão:

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

(a) Mostre que a expressão anterior define um produto interno em $\mathbb{R}_2[t]$, calculando a matriz de Gram G em relação à base canónica de $\mathbb{R}_2[t]$.

(b) Calcule $\|p(t)\|$, onde $p(t) = a + bt + ct^2$ é um elemento de $\mathbb{R}_2[t]$.

(c) Calcule o ângulo entre os polinómios $p(t) = 1 - t^2$ e $q(t) = 1 + t + t^2$.

(d) Sendo $W = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1 - t^2\})$, determine uma base de $W^\perp$.

(e) Determine a distância de $q(t) = 1 + t + t^2$ a W e a $W^\perp$.

Soluções dos exercícios

Solução (do problema 7.1).— Como nada se diz em contrário assumimos que estamos a trabalhar com o produto interno canónico. Assim sendo, basta recorrer ao seguinte:

1. $\|(x, y, z)\| = \sqrt{\langle (x, y, z), (x, y, z)\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
2. $\|\alpha \mathrm{u}\| = |\alpha|\|\mathrm{u}\|$;
3. se $\mathrm{v} \neq \mathbb{0}$ então $\|(1/\|\mathrm{v}\|)\mathrm{v}\| = (1/\|\mathrm{v}\|)\|\mathrm{v}\| = 1$.
4. $$\theta_{(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)} = \frac{\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle}{\|(x_1, x_2, x_3)\|\|(y_1, y_2, y_3)\|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}}.$$

Solução (do problema 7.2).— Tem-se mais uma vez que estamos a considerar o produto interno canónico e, consequentemente, a norma euclidiana. Assim,

$$\|k\mathrm{v}\| = 7 \Leftrightarrow |k|\|(3, -2, 6, 0)\| = 7 \Leftrightarrow 49k^2 = 49$$

Ou seja, $k = \pm 1$. ◪

Solução (do problema 7.3).— No caso da alínea a) tem-se:

$$\langle (2, 1), (k, 2)\rangle = 0 \Leftrightarrow 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Quanto à alínea b):

$$\langle (k, k, 1), (k, 4, 3)\rangle = 0 \Leftrightarrow k^2 + 4k + 3 = 0.$$

Ou seja, $k = -3$ ou $k = -1$ (aplicando a fórmula resolvente). ◪

Solução (do problema 7.4).— A desigualdade de Cauchy-Schwarz estabelece que:

$$-1 \leq \frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle}{\|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|} \leq 1$$

Neste caso obtemos

$$\frac{\langle (0, -2, 2, 1), (-1, -1, 1, 1)\rangle}{\|(0, -2, 2, 1)\|\|(-1, -1, 1, 1)\|} = \frac{5}{\sqrt{9}\sqrt{4}} = \frac{5}{6},$$

confirmando o resultado. ◪

Solução (do problema 7.5).— A matriz $G = [\langle \mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j\rangle]$ é a denominada matriz de Gram para a função $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle$ que é um produto interno se se verificarem as condições: (i) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = \mathrm{u}^\top G\mathrm{v}$, sem o que falha a linearidade; (ii) a matriz G deverá ser simétrica (i.e. $G^\top = G$) sem o que falha a simetria; (iii) os seus valores próprios terão que se todos positivos, sem o que falha a positividade. As matrizes de Gram em cada uma das alíneas são:

$$\text{a)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \text{b)}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\quad \text{c)}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}\quad \text{d)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \text{d)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

tem-se então:

a) Os valores próprios de $\boldsymbol{G}$ não são todos positivos pelo que, mesmo que $\boldsymbol{G}$ representasse a expressão dada, essa expressão não poderia ser um produto interno. (Neste caso falharia a positividade.).

b) A matriz $\boldsymbol{G}$ representa a a função indicada pois $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = \mathrm{u}^\top \boldsymbol{G}\mathrm{v}$. Além disso a matriz é simétrica e os seus valores próprios são todos positivos pelo que estamos perante um produto interno.

c) Como na alínea anterior.

d) A matriz $\boldsymbol{G}$ representa a a função indicada pois $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = \mathrm{u}^\top \boldsymbol{G}\mathrm{v}$ e é simétrica mas os valores próprios não são todos positivos logo não é um produto interno (falha a positividade).

e) A matriz não representa a função dada, de facto:

$$\mathrm{u}^\top \boldsymbol{G}\mathrm{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

A função dada não é então um produto interno (falha neste caso a linearidade na primeira componente). ⧄

Solução (do problema 7.6).— Tem-se que:

$$\begin{aligned} d(\mathrm{u},\mathrm{v})^2 &= \|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|^2 = \langle \mathrm{u}-\mathrm{v}, \mathrm{u}-\mathrm{v}\rangle = \\ &= \langle \mathrm{u},\mathrm{u}\rangle + 2\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle + \langle \mathrm{v},\mathrm{v}\rangle = \|\mathrm{u}\|^2 + \|\mathrm{v}\|^2 \end{aligned}$$

porque, sendo ortogonais, $\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle = 0$.

Quanto à interpretação em $\mathbb{R}^2$, os dois vectores definem um triângulo rectângulo, do qual $d(\mathrm{u},\mathrm{v})$ representa o comprimento da hipotenusa. ⧄

Solução (do problema 7.7).— Uma vez que não se indica nenhum produto interno, supomos que está em uso o produto interno canónico. Denotando por $\boldsymbol{U}$ o subespaço de $\mathbb{R}^3$ correspondendo à recta indicada, verifica-se sem dificuldade que

$$\boldsymbol{U} = \{(x_1, x_1, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,1)\}).$$

Para constituirem uma base de $\boldsymbol{U}^\perp$ os conjuntos de vectores indicados devem ser linearmente independentes e os seus elementos devem ser ortogonais a $(1,1,1)$. É fácil verificar que a opção correcta é a B). ⧄

Solução (do problema 7.8).— Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

concluindo-se que

$$\mathrm{EC}(A) = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,-1,1,2),(0,2,-3,1),(3,3,1,3)\}).$$

Como $\dim(\mathrm{EC}(A)) = 3$ podemos excluir imediatamente as opções A) e C). Os conjuntos indicados nas alíneas B) e D) são ambos ortogonais e dois dos vectores são comuns aos dois conjuntos, pelo que tudo se resume a verificar em qual deles o terceiro vector pertence ao espaço das colunas de A. Consideremos o terceiro vector do conjunto na alínea B). Tem-se que o sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 28 \end{array}\right]$$

pelo que o sistema é impossível e o vector $(1,3,2,0) \notin \mathrm{EC}(A)$. Resta-nos escolher a opção C). ◪

Solução (do problema 7.9).— Para que o conjunto

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{k}}, \frac{2}{\sqrt{k}}\right)\right\}$$

seja ortonormado, os vectores devem ser ortogonais:

$$0 = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{k}}, \frac{2}{\sqrt{k}}\right) \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2k}} - \frac{2}{\sqrt{2k}},$$

o que acontece, independentemente do valor de k. Além disso os vectores têm que ter norma unitária o que é claro no primeiro caso, quanto ao segundo:

$$\left\| \left(\frac{2}{\sqrt{k}}, \frac{2}{\sqrt{k}}\right) \right\|^2 = 2\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right)^2 = \frac{8}{k},$$

pelo que a norma é unitária se $k = 8$. ◪

Solução (do problema 7.10).— Denotemos por $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle_c$ o produto interno canónico em $\mathbb{R}^2$. Tem-se que

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle_c = -\frac{5}{\sqrt{70}}\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{70}}\frac{1}{\sqrt{7}} \neq 0$$

assim, os dois vectores não são ortogonais do ponto de vista do produto interno canónico e, por isso, desse ponto de vista o conjunto $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}$ não é ortonormado. Isto responde à segunda parte da questão. Quanto à primeira parte,

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = -2\frac{5}{\sqrt{70}}\frac{1}{\sqrt{7}} + 5\frac{2}{\sqrt{70}}\frac{1}{\sqrt{7}} = 0,$$

pelo que do ponto de vista do produto interno dado, os vectores u e v são ortogonais. Para que constituam um conjunto ortonormado temos que verificar que possuem norma unitária. Tem-se:

$$\left\| \left(\frac{5}{\sqrt{70}}, \frac{2}{\sqrt{70}}\right) \right\|^2 = 2\left(\frac{5}{\sqrt{70}}\right)^2 + 5\left(\frac{2}{\sqrt{70}}\right)^2 = 1$$

e

$$\left\| \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \right\|^2 = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 = 1.$$

Conclui-se assim que, do ponto de vista do produto interno considerado, o conjunto $\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}$ é ortonormado. ◪

Solução (do problema 7.11).— A melhor aproximação é dada pela projeção ortogonal de $(7,7,3)$ sobre W, i.e. $\mathrm{Proj}_W(7,7,3)$. Temos duas possibilidades de determinar esta projecção: ou directamente e nesse cado precisamos primeiro de recorrer ao método de ortogonalização de Gram-Schmidt, para obter primeiro uma base ortogonal de W. Ou então, tendo em conta que se tem sempre que:

$$\mathrm{x} = \mathrm{Proj}_W \mathrm{x} + \mathrm{Proj}_{W^\perp} \mathrm{x},$$

calcular essa projecção indirectamente fazendo $\mathrm{Proj}_W \mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{Proj}_{W^\perp}\mathrm{x}$. A segunda opção apresenta-se como mais favorável pois $W^\perp$ tem dimensão 1 e qualquer das suas bases é ortogonal. Por outro lado a determinação de $W^\perp$ é, em geral uma questão simples.

Note-se que W é o espaço das linhas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

e, como estamos a considerar o produto interno canónico em $\mathbb{R}^3$, tem-se que $W^\perp = \mathrm{EL}(A)^\perp = \mathrm{Nuc}(A)$. Calculando este núcleo obtém-se que $\mathrm{Nuc}(A) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-7,-5,2)\})$. Assim:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Proj}_W(7,7,3) &= (7,7,3) - \mathrm{Proj}_{W^\perp}(7,7,3) = \\
&= (7,7,3) - \frac{\langle (7,7,3), (-7,-5,2)\rangle}{\|(-7,-5,2)\|^2}(-7,-5,2) = \\
&= (7,7,3) - (7,5,-2) = (0,2,5).
\end{aligned}$$

Assim, a resposta correcta é a B). ☒

Solução (do problema 7.12).— Em ambos os casos trata-se de uma aplicação imediata da fórmula da projecção ortogonal de um vector sobre outro:

$$\mathrm{Proj}_\mathrm{u} \mathrm{x} = \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{u}\rangle}{\langle \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle}\mathrm{u} = \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{u}\rangle}{\|\mathrm{u}\|^2}\mathrm{u}.$$

Solução (do problema 7.11).— Consideremos então a base $\mathrm{v}_1 = (1,0,0)$, $\mathrm{v}_2 = (1,1,0)$, $\mathrm{v}_3 = (1,1,1)$. O método de Gram-Scmidt permitirá obter uma base ortogonal $\mathrm{v}_1^*, \mathrm{v}_2^*, \mathrm{v}_3^*$, de acordo com o seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_1^* &= \mathrm{v}_1 = (1,0,0) \\
\mathrm{v}_2^* &= \mathrm{v}_2 - \mathrm{Proj}_{\mathrm{v}_1^*}\mathrm{v}_2 = (1,1,0) - (1,0,0) = (0,1,0) \\
\mathrm{v}_3^* &= \mathrm{v}_3 - \mathrm{Proj}_{\mathrm{v}_1^*}\mathrm{v}_3 - \mathrm{Proj}_{\mathrm{v}_2^*}\mathrm{v}_3 = (1,1,1) - (1,0,0) - (0,1,0) = (0,0,1).
\end{aligned}$$

Como estes vectores têm todos norma unitária, constituem uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. ☒

Solução (do problema 7.14).— A distância de um vector x a um subespaço W, que se denota $d(\mathrm{x}, W)$ é dada por:

$$d(\mathrm{x}, W) = d(\mathrm{x}, \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}\| = \|\mathrm{proj}_{W^\perp}\mathrm{x}\|.$$

Tem-se que $\mathrm{Nuc}(A) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,1)\})$. Assim,

$$\begin{aligned}
d((1,-1,0), \mathrm{Nuc}(A)) &= \|(1,-1,0) - \mathrm{Proj}_{(1,1,1)}(1,-1,0)\| = \\
&= \|(1,-1,0) - (0,0,0)\| = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

A opção correcta é a B). ☒

Solução (do problema 7.15).— Observe-se que, tendo em conta que estamos a considerar o produto interno canónico, se tem: $\mathrm{EC}(A)^\perp = \mathrm{EL}(A^\top)^\perp = \mathrm{Nuc}(A^\top) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,-2,1)\})$.

Constata-se que a resposta correcta é a B). ☒

Solução (do problema 7.16).— Todos os conjuntos de vectores são ortogonais (logo são linearmente independentes). Como $\dim(S) = 2$ para serem uma base de S é condição necessária e suficiente que os vectores pertençam a S. Lembrando que $\mathrm{w} \in L_V(\{\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_k\})$ se e só se o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{w}$ é possível, onde A é a matriz que tem os vectores $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_k$ como colunas, resta-nos considerar os sistemas (simultâneos):

$$\left[\begin{array}{cc|cc:cc:cc:cc} 1 & 3 & 1 & -3 & 3 & -1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

donde se obtém, procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|cc:cc:cc:cc} 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -23 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 & 33 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pelo que, apenas no caso D) obtemos um sistema possível. Esta é então a escolha correcta. ☒

Solução (do problema 7.17).— (a) Terá que se ter $A = G = [\phi(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)]$ onde $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Obtém-se então:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz A é claramente simétrica (i.e. $A = A^\top$) pelo que se os valores próprios de A forem todos positivos se terá que $\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x}^\top A\mathrm{y}$ é um produto interno. Tem-se:

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -2 & 1 \\ -2 & 2-t & 0 \\ 1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = -(t-2)(t^2 - 5t + 1).$$

as raízes de $t^2 - 5t + 1$ são dadas por:

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2},$$

e são ambas positivas. A função ϕ define assim um produto interno.

(c) Tem-se $\phi((1,0,0),(0,1,0)) \neq 0$, pelo que os vectores são ortogonais em relação ao produto interno ϕ.

(d) Basta recorrer à fórmula da projecção ortogonal de um vector sobre outro. Neste caso,

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{e}_1} \mathrm{e}_2 = \frac{\phi(\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1)}{\phi(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_1)} \mathrm{e}_1.$$

(e) Basta considerar $\mathrm{e}_2 - \mathrm{Proj}_{\mathrm{e}_1} \mathrm{e}_2$.

(f) Basta recorrer à fórmula que permite determinar o ângulo entre dois vectores relativamente a um produto interno. Neste caso:

$$\theta_{e_1,e_2} = \arccos\left(\frac{\phi(e_1,e_2)}{\sqrt{\phi(e_1,e_1)}\sqrt{\phi(e_2,e_2)}}\right).$$

(g) Indicamos apenas os cálculos. A base ortogonal (para ϕ) obtida a partir da base canónica (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ é a base (e_1^*,e_2^*,e_3^*) definida por:

$$\begin{aligned}
e_1^* &= e_1 = (1,0,0);\\
e_2^* &= e_2 - \mathrm{Proj}_{e_1} e_2 = e_2 - \frac{\phi(e_2,e_1)}{\phi(e_1,e_1)}e_1;\\
e_3^* &= e_3 - \mathrm{Proj}_{e_1} e_3 - \mathrm{Proj}_{e_2} e_3 = e_3 - \frac{\phi(e_3,e_1)}{\phi(e_1,e_1)}e_1 - \frac{\phi(e_3,e_2)}{\phi(e_2,e_2)}e_2.
\end{aligned}$$

Solução (do problema 7.18).— Tem-se que

$$F(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2(x_2y_1 + x_1y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2.$$

pelo que $F(x,y) = x^\top Ay$ onde A é a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se então que F é linear na primeira variável e é simétrica, porque a matriz A é claramente simétrica. As alíneas A) e B) são assim falsas. Considerando os valores próprios de A tem-se que:

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = (t-1)^2 - 4.$$

Tem-se assim que $c_A(t) = 0$ se e só se $t-1 = \pm 2$ ou seja, os valores próprios de A são -1 e 3. Como um dos valores próprios de A não é positivo, F não é positiva e assim a afirmação correcta é a C). ◻

Solução (do problema 7.19).— Como se sabe, a melhor aproximação de X através de elementos de S é a projecção ortogonal $\mathrm{Proj}_S X$. Temos que:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\} = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Por outro lado,

$$\left\langle \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \right\rangle = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} \end{bmatrix} \right) = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,2} + a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}, b_{2,2}.$$

pelo que, a base de S é ortogonal. Assim sendo, a melhor aproximação de X em S é, denotando por E_1 e E_2 os vectores da base de S:

$$\mathrm{Proj}_S X = \frac{\langle X, E_1\rangle}{\langle E_1, E_1\rangle}E_1 + \frac{\langle X, E_2\rangle}{\langle E_2, E_2\rangle}E_2 = \frac{-2}{2}E_1 + \frac{6}{2}E_2 = 3E_2 - E_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A resposta correcta é então a A). ◻

Solução (do problema 7.20).— Se considerarmos a matriz que tem por linhas os vectores dados e à respectiva eliminação de Gauss, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Concluímos então que $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(2,0,0,-1),(0,4,0,5),(0,0,2,-1)\})$. Esta base pode agora ortogonalizar-se aplicando o método de Gram-Schmidt aos vectores $\mathrm{v}_1 = (2,0,0,-1)$, $\mathrm{v}_2 = (0,4,0,5)$ e $\mathrm{v}_3 = (0,0,2,-1)$. Obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_1^* &= (2,0,0,-1); \\
\mathrm{v}_2^* &= (0,4,0,5) - \mathrm{Proj}_{(2,0,0,-1)}(0,4,0,5) = (0,4,0,5) - (-2,0,0,1) = (2,4,0,4) \\
\mathrm{v}_3^* &= (0,0,2,-1) - \mathrm{Proj}_{(2,0,0,-1)}(0,0,2,-1) - \mathrm{Proj}_{(2,4,0,4)}(0,0,2,-1) = \left(-\frac{8}{45}, \frac{4}{9}, 2, -\frac{16}{45}\right)
\end{aligned}$$

para obter uma base ortonormada a partir desta teríamos apenas que multiplicar cada um deste vectores pelo inverso da sua norma. $\boxslash$

Solução (do problema 7.21).— (a) Como a base de U não é ortogonal e $\dim(U^\perp) = 1$, optamos por calcular $\mathrm{Proj}_U \mathrm{x}$ indirectamente, através de: $\mathrm{Proj}_U \mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{Proj}_{U^\perp}\mathrm{x}$. Tem-se:

$$U^\perp = \mathrm{EL}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^\perp = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,-1,1)\}).$$

Tem-se então que

$$\mathrm{Proj}_U \mathrm{x} = (2,1,1) - \frac{\langle (2,1,1),(1,-1,1)\rangle}{\|(1,-1,1)\|^2}(1,-1,1) = (2,1,1) - (1,-1,1).$$

(b) A distância de x a U é $\|\mathrm{Proj}_{U^\perp}\mathrm{x}\|$ ou seja é $\|(1,-1,1)\| = \sqrt{3}$. $\boxslash$

Solução (do problema 7.22).— (a) Como o produto de funções é comutativo tem-se que $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f + \beta g, h\rangle &= \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))h(t)\,dx = \int_a^b \alpha f(t)h(t) + \beta g(t)h(t)\,dt = \alpha\int_a^b f(t)h(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)h(t)\,dt \\
&= \alpha\langle f,h\rangle + \beta g, h.
\end{aligned}$$

Resta-nos verificar a positividade.

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt \geq 0$$

porque o integral de uma função não negativa não é negativo. Por outro lado, de acordo com um resultado acerca da integração das funções contínuas, se $h \geq 0$ é contínua em $[a,b]$ e $f(t) > 0$ em pelo menos um ponto de $[a,b]$ então $\int_a^b h(t)\,dt > 0$. Este facto permite concluir que $\langle f,f\rangle > 0$ se f não é a função nula.

Assim sendo estamos perante um produto interno.

(b) Tem-se que $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt}$. Assim:

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,dt} = \sqrt{2}$$
$$\|t\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,dt} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$\|t^2\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^4\,dt} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$
$$\|t^3\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^6\,dt} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

(c)-Sendo $(p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ os vectores $1, t, t^2, t^3$. Então a base ortogonal que se obtém pelo método de Gram-Schmidt é:

$$\begin{aligned}
p_1^*(t) &= 1,\\
p_2^*(t) &= t - \frac{\int_{-1}^{1} t\,dt}{\|1\|^2}1\\
p_3^* &= t^2 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2\,dt}{\|1\|^2}1 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2 p_2^*(t)\,dt}{\|p_2^*(t)\|^2}p_2^*(t)\\
p_4^*(t) &= t^3 - \frac{\int_{-1}^{1} t^3}{\|1\|^2}1 - \frac{\int_{-1}^{1} t^3 p_1^*(t)\,dt}{\|p_1^*(t)\|^2}p_1^*(t) - \frac{\int_{-1}^{1} t^3 p_2^*(t)\,dt}{\|p_2^*(t)\|^2}p_2^*(t) - \frac{\int_{-1}^{1} t^3 p_3^*(t)\,dt}{\|p_3^*(t)\|^2}p_3^*(t).
\end{aligned}$$

Solução (do problema 7.23).— (a) A primeira afirmação é verdadeira porque a dimensão do espaço das linhas de A coincide com a característica enquanto que a dimensão do núcleo corresponde à nulidade de A. A soma de ambas corresponde ao número de colunas. A segunda afirmação também é verdadeira porque a dimensão do espaço das colunas de A também coincide com o valor da característica de A.

(b) Tem-se que $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{EL}(A)^\perp$ assim tem-se que:

$$\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{EL}(A)^{\perp\perp} = \mathrm{EL}(A).$$

Assim basta determinar uma base para o espaço das linhas da matriz (pode usar-se o método de Gauss).

(c) Tem-se que:

$$\mathrm{Nuc}(A^\top)^\perp = \mathrm{EL}(A^\top)^{\perp\perp} = \mathrm{EL}(A^\top) = \mathrm{EC}(A).$$

Assim, basta determinar uma base para o espaço das colunas de A (mais uma vez pode usar-se o método de Gauss.) ◻

Solução (do problema 7.24).— As duas alíneas são semelhantes. Assim sendo resolvemos apenas a alínea (a). Tem-se que $AU = \mathrm{EL}(A)$ onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -6 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

assim sendo, $U^{\perp} = \text{Nuc}(A)$. Ou seja,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -7 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_5 = 0 \wedge x_1 = 5x_3 + 6x_4 \wedge x_2 = (-5/4)x_3\} \\ &= \{(5x_3 + 6x_4, (-5/4)x_3, x_3, x_4, 0) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= L_{\mathbb{R}^5}(\{(5, -5/4, 1, 0, 0), (6, 0, 0, 1, 0)\}) \end{aligned}$$

Assim, uma base para $U^{\perp}$ é $\{(5, -5/4, 1, 0, 0), (6, 0, 0, 1, 0)\}$ ⧄

Solução (do problema 7.25).— (a) O espaço W consiste nos vectores $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tais que:

$$0 = x - y + 2z - 2w = \langle (x, y, z, w), (1, -1, 2, -2) \rangle.$$

ou seja tem-se que $W = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, -1, 2, -2)\})^{\perp}$. E assim,

$$W^{\perp} = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, -1, 2, -2)\})^{\perp\perp} = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, -1, 2, -2)\}).$$

(b) Tem-se que $\mathrm{w}_1 = \text{Proj}_W \mathrm{w}$ e $\mathrm{w}_2 = \text{Proj}_{W^{\perp}} \mathrm{w}$. Basta calcular uma das projecções e assim optamos por calcular $\mathrm{w}_2 = \text{Proj}_{W^{\perp}} \mathrm{w}$ porque $W^{\perp}$ tem dimensão 1. Tem-se então:

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_2 = \text{Proj}_{W^{\perp}} \mathrm{w} &= \frac{\langle (1, 2, 1, -1), (1, -1, 2, -2) \rangle}{\langle (1, -1, 2, -2), (1, -1, 2, -2) \rangle} (1, -1, 2, -2) \\ &= \frac{3}{10} (1, -1, 2, -2) \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{w}_2 = \mathrm{w} - \text{Proj}_{W^{\perp}} \mathrm{w} = (1, 2, 1, -1) - \frac{3}{10} (1, -1, 2, -2).$$

(c) As distâncias pretendidas são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{dist}((1, 2, 1, -1), W) &= \|\text{Proj}_{W^{\perp}} \mathrm{w}\| = \|\mathrm{w}_2\| \\ \text{dist}((1, 2, 1, -1), W^{\perp}) &= \|\text{Proj}_W \mathrm{w}\| = \|\mathrm{w}_1\|. \end{aligned}$$

Solução (do problema 7.26).— Tem-se que $W = \{(2t, -5t, 4t) \mid t \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(2, -5, 4)\})$. Tem-se então que

$$\text{Proj}_W (1, 0, -1) = \frac{\langle (1, 0, -1), (2, -5, 4) \rangle}{\langle (2, -5, 4), (2, -5, 4) \rangle} (2, -5, 4).$$

Solução (do problema 7.27).— (a) A linearidade resulta directamente das propriedades do traço e da transposição de matrizes:

$$\begin{aligned} \langle \alpha A + \beta B, C \rangle &= \text{tr}(\alpha A + \beta B)^{\top} C = \text{tr}(\alpha A^{\top} C + \beta B^{\top} C) \\ &= \alpha\, \text{tr}(A^{\top} C) + \beta\, \text{tr}\, B^{\top} C \\ &= \alpha \langle A, C \rangle + \beta \langle B, C \rangle. \end{aligned}$$

(b) As matrizes anti-simétricas são as matrizes da forma,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$U = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

pelo que a dimensão de U é 3. Assim sendo, a dimensão de $U^{\perp}$ é 1.

(c) Uma base ortogonal para U pode ser determinada a partir da base determinada acima pelo método de Gram-Schmidt. Usando o produto interno indicado, verifica-se que os dois primeiros vectores da base são ortogonais entre si, podendo assim constituir os dois primeiros vectores da base ortogonal de U. O terceiro vector será então

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A base ortogonal de $U^{\perp}$ é então,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D \right\}$$

Para obtermos uma base ortonormada de U, basta agora multiplicar cada uma das matrizes desta base pelo inverso da respectiva norma sendo que, para este produto interno, a norma de uma matriz A se calcula através de

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr} A^{\top} B}.$$

Consideremos agora o espaço $U^{\perp}$. Como este espaço tem dimensão 1, uma base será sempre ortogonal. Bastando depois normalizá-la, pelo processo que acabámos de descrever acima. Quanto ao complemento ortogonal de U ele consiste nas matrizes

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

tais que:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

ou seja, tais que $x = 0 \wedge w = 0 \wedge x - z = 0$, Assim,

$$U^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

(d) Calculando uma das projecções podemos calcular a outra. Assim, e porque os cálculos envolvidos são mais simples, consideramos a projecção sobre $U^{\perp}$. Temos:

$$\operatorname{Proj}_{U^{\perp}} C = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{\operatorname{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, $\operatorname{Proj}_W C = C - \operatorname{Proj}_{W^{\perp}} C$.

(e) A matriz em causa é precisamente a projecção ortogonal de C sobre U.

(f) A distância de C a U, $d(C, U)$, calcula-se de acordo com:

$$d(C, U) = \|\operatorname{Proj}_{U^{\perp}} C\|.$$