Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 15

Propriedades do determinante

Teorema.—*Sejam $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Tem-se:*

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\det(A) = \det(A^\top)$$

$$\textit{Se } A \textit{ é invertível então, } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Não existe nenhuma lei geral para $\det(A+B)$

Propriedades do determinante

Teorema.—*Seja* $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. *São equivalentes:*

(1) $\det(A) \neq 0$
(2) *As linhas de* A *são linearmente independentes;*
(3) *As colunas de* A *são linearmente independentes;*
(4) $\mathrm{car}(A) = n$;
(5) A *é invertível;*
(6) *Os sistemas da forma* $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ *são todos possíveis e determinados, independentemente de* b.

Desenvolvimentos de Laplace para o cálculo de determinantes

Consideremos uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

O *menor* (i, j) de A. que se denota $A^{(i,j)}$ é a matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j de A.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A^{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Desenvolvimentos de Laplace para o cálculo de determinantes

Consideremos uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

O *cofactor* (i,j) de A é

$$\mathrm{cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det(A^{(i,j)})$$

A *matriz dos cofactores* de A, denota-se $\mathrm{Cof}(A)$ e é:

$$\mathrm{Cof}(A) = \left[\mathrm{cof}_{i,j}(A)\right]$$

Desenvolvimentos de Laplace para o cálculo de determinantes

Ao longo de uma linha

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\mathrm{cof}_{i,j}(A) = A_{i,1}\mathrm{cof}_{i,1}(A) + \cdots + A_{i,n}\mathrm{cof}_{i,n}(A)$$

Ao longo de uma coluna

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\mathrm{cof}_{i,j}(A) = A_{1,j}\mathrm{cof}_{1,j}(A) + \cdots + A_{n,j}\mathrm{cof}_{n,j}(A)$$

Exemplo 1

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule os respectivos determinantes recorrendo aos desenvolvimentos de Laplace.

Problema 5.13.— Verifique que as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são invertíveis, onde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule:

(a) $\det(\boldsymbol{A}^3(2\boldsymbol{B})^{-1})$;

(b) $\det(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$;

(c) $\det(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B})$;

(d) $\det(\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{A})$.

Exemplo 2

É possível calcular os seguintes determinantes sem efectuar qualquer conta. Determine-os desta forma, justificando em cada. caso a conclusão.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Problema 5.14.— Para $a \in \mathbb{R}$, verifique a igualdade seguinte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 2 & 2 \\ a & a+1 & a+2 & 3 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 \end{vmatrix} = a^2$$

Problema 5.17.— Resolva as equações:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Matriz adjunta

Definição.—*A matriz adjunta de A é a matriz que se denota por* $(\mathrm{Adj}\ A)$ *ou* $\mathrm{Adj}(A)$ *e que é a matriz*

$$(\mathrm{Adj}\ A) = (\mathrm{Cof}\ A)^\top$$

i.e., a transposta da matriz dos cofactores.

Teorema.—*Para qualquer matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tem-se o seguinte:*

$$A(\mathrm{Adj}\ A) = \det(A)\mathbb{I}.$$

Matriz adjunta

Se a matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ não é singular i.e., se $|A| \neq 0$ então, da relação:

$$A(\text{Adj } A) = \det(A)\mathbb{1}$$

pode extrair-se uma outra forma de calcular a inversa de A. Como, $\det(A) \neq 0$ tem-se:

$$\frac{1}{|A|}A(\text{Adj } A) = A\left(\frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)\right) = \mathbb{1}$$

ou seja,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)$$

Problema 5.18.— Seja

$$(\mathrm{Cof}\ A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Use a fórmula $A(\mathrm{Adj}\ A) = \det(A)\mathbb{1}$ para calcular $\det(A)$.

(b) Calcule a entrada $(3, 2)$ da inversa.

Regra de Cramer

Teorema.—*Dado um sistema* $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ *onde* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *é invertível* $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $\mathrm{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ *então, as componentes da solução do sistema (que é um sistema possível e determinado) são dadas por:*

$$x_i = \frac{\det(A_{\mathrm{b}}^i)}{\det(A)}$$

onde,

$$A_{\mathrm{b}}^i = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,i-1} & b_1 & A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & \cdots & A_{2,i-1} & b_2 & A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,i-1} & b_n & A_{n,i+1} & \ddots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer (exemplo).

Determine a componente x_3 da solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$