Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula **19**

Produtos internos

Um **produto interno** é uma função que associa a cada par de vectores $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$ um número real que se denota $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ e que possui as seguintes propriedades:

(1) **Positividade:** $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle \geq 0$ e $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle = 0$ se e só se $\mathrm{x} = \mathbb{0}$;

(2) **Simetria:** $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \langle \mathrm{y}, \mathrm{x} \rangle$;

(3) **Linearidade na primeira componente:** $\langle \alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}, \mathrm{z} \rangle = \alpha \langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle + \beta \langle \mathrm{y}, \mathrm{z} \rangle$.

De (2) e (3) resulta a linearidade na segunda componente $\langle \mathrm{z}, \alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y} \rangle = \alpha \langle \mathrm{z}, \mathrm{x} \rangle + \beta \langle \mathrm{z}, \mathrm{y} \rangle$. Diz-se, por isso, que um produto interno é **bilinear**.

Exemplos

Nos espaços $\mathbb{R}^n$ considera-se um produto interno, o denominado **produto interno canónico**, que se define através da relação $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Se $\mathscr{C}([0,1])$ é o espaço das funções reais contínuas em $[0,1]$. Neste caso a função:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$$

é um produto interno.

Em $\mathbb{R}^{m \times n}$ a função $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^\top A)$ é um produto interno em $\mathbb{R}^{m \times n}$).

Representação matricial de produtos internos e coordenadas (matriz de Gram)

Se fixarmos uma base ordenada $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ de V, o produto interno de dois vectores pode ser calculado em termos dos vectores de coordenadas de acordo com a seguinte relação:

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}^{\top} G_{\boldsymbol{\beta}} \mathrm{y}_{\boldsymbol{\beta}}$$

Onde $G_{\boldsymbol{\beta}}$ é a **matriz de Gram** relativamente à base $\boldsymbol{\beta}$ i.e.,

$$(G_{\boldsymbol{\beta}})_{i,j} = \langle \mathrm{u}_i, \mathrm{u}_j \rangle$$

Representação matricial de produtos internos e coordenadas (matriz de Gram)

Uma matriz de Gram, $G_{\boldsymbol{\beta}}$, satisfaz sempre as duas condições seguintes:

- G é uma matriz simétrica (i.e. $G^\top = G$) e,
- Os valores próprios de G são todos positivos ou, o que ﬀle equivalente, para qualquer x tem-se que $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}^\top G_{\boldsymbol{\beta}} \mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ e $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}^\top G_{\boldsymbol{\beta}} \mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}} = 0$ se e só se $\mathrm{x} = \mathbb{O}$.

Caracterização dos produtos internos em termos da matriz de Gram

Sejam, V um espaço linear de dimensão n e $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica (i.e. $G^\top = G$) cujos valores próprios de são todos positivos (ou, o que é equivalente, para qualquer x tem-se que $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}^\top G_{\boldsymbol{\beta}} \mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$ e $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}^\top G_{\boldsymbol{\beta}} \mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}} = 0$ se e só se $\mathrm{x} = \mathbb{O}$). Nestas condições, a relação

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle := \mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}^\top G \mathrm{y}_{\boldsymbol{\beta}}$$

define um produto interno em V de que, relativamente à base $\boldsymbol{\beta}$, G é a matriz de Gram.

Todo o produto interno em V é desta forma!

Norma

Definição.—*Uma norma num espaço linear V é uma função que associa a cada vector* $\mathrm{x} \in V$ *um número real não negativo* $\|\mathrm{x}\|$ *e que possui as seguintes propriedades.*

(1) $\|\mathrm{x}\| \geq 0$ e $\|\mathrm{x}\| = 0$ *se e só se* $\mathrm{x} = \mathbb{O}$;

(2) $\|\alpha \mathrm{x}\| = |\alpha| \|\mathrm{x}\|$;

(3) $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|$ (***desigualdade triangular***).

Uma norma é uma noção de comprimento, por isso em lugar de dizermos *norma de* x também dizemos *comprimento de* x.

NORMA

DEFINIÇÃO.—*Um vector* $\mathrm{x} \in V$ *diz-se unitário se* $\|\mathrm{x}\| = 1$.

DEFINIÇÃO.—*A* **norma associada a um produto interno** *define-se através da relação:*

$$\|\mathrm{x}\| = \sqrt{\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle}$$

TEOREMA.—*Suponhamos que* $\| \cdot \|$ *é uma norma associada a um produto interno. São válidas as seguintes propriedades:*

$$|\,\|\mathrm{x}\| - \|\mathrm{y}\|\,| \leq \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|$$

$$\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|^2 + \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|^2 = 2(\|\mathrm{x}\|^2 + \|\mathrm{y}\|^2) \quad \textit{(lei do paralelogramo)}$$

$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle| \leq \|\mathrm{x}\|\,\|\mathrm{y}\| \quad \textit{(desigualdade de Cauchy-Schwarz)}$$

Ângulos

Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ o produto interno canónico e a respectiva norma relacionam-se da seguinte forma:

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = \|\mathrm{u}\| \|\mathrm{v}\| \cos \theta_{\mathrm{u},\mathrm{v}}$$

onde $\theta_{\mathrm{u},\mathrm{v}}$ é o ângulo entre os vectores u e v.

> É interessante constatar que quer a noção de comprimento quer a noção de ângulo podem ser definidas a partir da noção de produto interno. No que respeita ao ângulo, ele é dado (em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, considerando o produto interno canónico) por:

$$\theta_{\mathrm{u},\mathrm{v}} = \arccos \left(\frac{\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle}{\|\mathrm{u}\| \|\mathrm{v}\|} \right)$$

Ângulos

Tendo em conta a desigualdade de Cauchy-Schwarz, para qualquer produto interno tem-se que:

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

pelo que aquela quantidade pode ser vista como o coseno de um ângulo. Em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$ é de facto assim. Mas um produto interno permite-nos generalizar a noção de ângulo a um qualquer espaço euclidiano definindo:

$$\theta_{u,v} = \arccos\left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}\right)$$

Distância

Uma **função distância** num conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ que associa a quaisquer dois elementos de $x, y \in X$ um número real não negativo que se denota $d(x, y)$ e designa de *distância entre x e y*.

Para que se considere uma *distância*, a função d deve possuir as seguintes propriedades:

(1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ *se e só se* $x = y$;

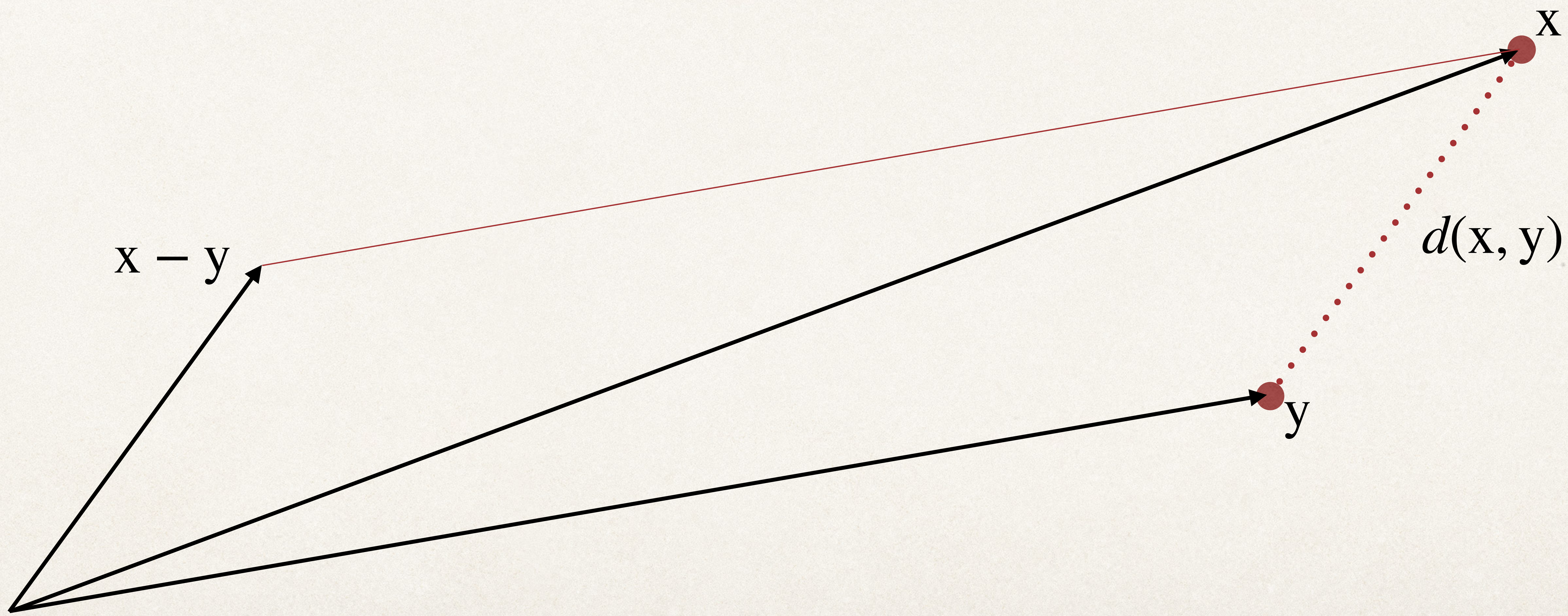
(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Distância

O produto interno em V permite descrever uma função distância em V de acordo com:

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|$$



Exemplo

Em $\mathbb{R}^2$ considere a função

$$\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 4x_2y_2$$

Verifique que ω é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Considerando o espaço euclidiano $(\mathbb{R}^2, \omega)$ determine:

- $\|(1,0)\|$.
- $d((1,1), (1,0))$.
- O ângulo entre os vectores $(1,1)$ e $(0,1)$.

A matriz candidata a matriz de Gram é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que a matriz Arepresenta (na base canónica a função $\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2))$. Com efeito:

$$x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 4x_2y_2 = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \qquad (*)$$

Se a matriz A não representasse $\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ através da relação (*) então a função ω não seria linear na primeira componente e ω não seria um produto interno.

A matriz A é simétrica:

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

Se A não fosse simétrica $\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ não seria simétrica e não poderia ser um produto interno.

Finalmente,

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 4-t \end{vmatrix} = (t-4)(t-1) - 1 = t^2 - 5t + 3$$

sendo os valores próprios:

$$\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} > 0$$

Desta forma $\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ satisfaz o axioma da positividade.

Se os valores próprios de A não fossem todos positivos então a positividade falharia para a função ω e ela não poderia definir um produto interno

Tem-se então:

$$\|(1,0)\| = \sqrt{\omega((1,0),(1,0))} = 1$$

$$d((1,1)(1,0)) = \|(1,1) - (1,0)\| = \|(0,1)\| =$$
$$= \sqrt{\omega((0,1),(0,1))} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta_{u,v} = \arccos\left(\frac{\omega((1,1),(1,0))}{\|(1,1)\|\|(1,0)\|}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}\sqrt{1}}\right) =$$
$$= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$$