Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 01

04NOV2021

Pares ordenados, *n*-úplos ordenados, produtos e potências cartesianas de conjuntos

Pares ordenados. Um par ordenado é um *objecto matemático*, (a, b), composto por duas componentes, neste caso a (a primeira componente) e b (a segunda). A propriedade fundamental dos pares ordenados é:

$$(a, b) = (x, y) \text{ se e só se } a = x \text{ e } b = y$$

O par ordenado (a, b) não pode ser confundido com o conjunto $\{a, b\}$. E.g., (a, a) tem duas componentes mas $\{a, a\} = \{a\}$ tem apenas um elemento; por outro lado, $\{a, b\} = \{b, a\}$ mas $(a, b) \neq (b, a)$ se $a \neq b$.

Pares ordenados, *n*-úplos ordenados, produtos e potências cartesianas de conjuntos

Dados conjuntos não vazios, X e Y, o respectivo *produto cartesiano* denota-se $X \times Y$ e é:

$$X \times Y := \{(a, b) \mid a \in X \text{ e } b \in Y\}$$

Exemplo: se $X = \{0,1,2\}$ e $Y = \{\pi, e\}$ então $X \times Y = \{(0,\pi), (0,e), (1,\pi), (1,e), (2,\pi), (2,e)\}$

Pares ordenados, *n*-úplos ordenados, produtos e potências cartesianas de conjuntos

n-ÚPLOS ORDENADOS. Um n-úplo ordenado é um *objecto matemático*, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, composto por n componentes a_1 (a primeira), a_2 (a segunda), ..., a_n (a n-ésima). A propriedade fundamental dos n-úplos ordenados é:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ se e só se } a_1 = x_1,\ a_2 = x_2,\ \ldots,\ a_n = x_n$$

Pares ordenados, *n*-úplos ordenados, produtos e potências cartesianas de conjuntos

Dados conjuntos não vazios, $X_1, \dots, X_n$, o respectivo *produto cartesiano* denota-se $X_1 \times \cdots \times X_n$ e é:

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in X_1, \dots, a_n \in X_n\}$$

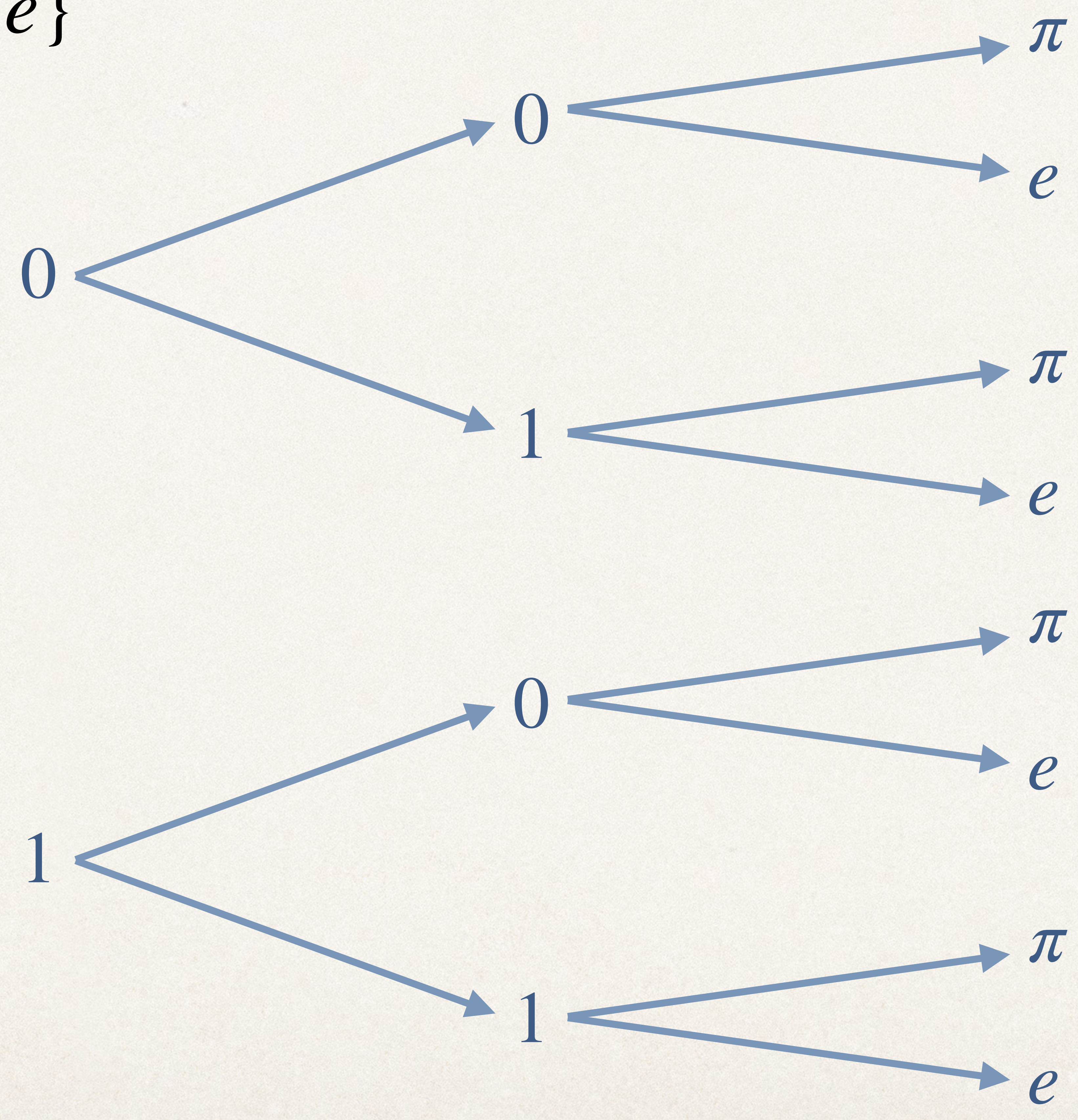
O caso particular em que $X_1 = \cdots = X_n = X$ designa-se de *n-ésima potência cartesiana do conjunto* X, denota-se X^n e consiste nos n-úplos ordenados de elementos de X.

Nota: identificamos X^1 com X.

Pares ordenados, *n*-úplos ordenados, produtos e potências cartesianas de conjuntos

Exemplo: $X = Y = \{0,1\}$ e $Z = \{\pi, e\}$

$X \times Y \times Z$



$(0,0,\pi)$

$(0,0,e)$

$(0,1,\pi)$

$(0,1,e)$

$(1,0,\pi)$

$(0,1,e)$

$(1,1,\pi)$

$(1,1,\pi)$

Definição.—Uma *matriz do tipo* $m \times n$, onde $m, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, é uma função

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K},$$

onde $\mathbb{K}$ denota os reais, $\mathbb{R}$, ou os complexos, $\mathbb{C}$.

O valor de A em $(i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ denota-se $A_{i,j}$ e designa-se de entrada-(i, j) da matriz A.

Matrizes [representação]

Como uma matriz é um objecto finito é mais conveniente apresentar a informação que ela contém numa forma que lhe permita aceder de uma só vez. Por essa razão uma matriz A do tipo $m \times n$ é normalmente apresentada na forma de um quadro:

$$A = \begin{array}{ll}
\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{linha } 1 \\ \leftarrow \text{linha } 2 \\ \\ \leftarrow \text{linha } m \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{coluna } 1 & \text{coluna } 2 & & \text{coluna } n \end{array} &
\end{array}$$

A posição i, j de A é a posição correspondente à intersecção da linha i com a coluna j.

O número que ocupa a posição i, j de A designa-se de entrada–i, j de A.

As matrizes são regra geral denotadas por letras maiúsculas $A, B, C, \ldots$, coma eventual excepção das matrizes dos tipos $1 \times n$ (designadas de *vectores linha*) e $m \times 1$ (designadas de *vectores coluna*) que serão, em geral, denotadas por letras como $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \ldots$.

O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ denota-se $\mathbb{K}^{m \times n}$. Quando queremos ser mais específicos indicando explicitamente se as matrizes têm entradas reais ou complexas escrevemos $\mathbb{R}^{m \times n}$ ou $\mathbb{C}^{m \times n}$, respectivamente.

Matrizes [vectores linha e vectores coluna]

Vectores linha: são as matrizes do tipo $1 \times n$, ou seja as matrizes em $\mathbb{K}^{1\times n}$.
Exemplo:

$$\mathrm{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Se $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ a linha i de A é o vector linha que denotamos por $A_{i,*}$ e se define:

$$A_{i,*} = \begin{bmatrix} A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,n} \end{bmatrix}$$

Vectores coluna: são as matrizes do tipo $m \times 1$, ou seja as matrizes em $\mathbb{K}^{m\times 1}$.
Exemplo:

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ a coluna j de A é o vector coluna que denotamos por $A_{*,j}$ e se define:

$$A_{*,j} = \begin{bmatrix} A_{1,j} \\ A_{2,j} \\ \vdots \\ A_{m,j} \end{bmatrix}$$

Matrizes [vectores linha e vectores coluna]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{*,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{*,3} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes nulas e matrizes identidade

Matriz nula do tipo $m \times n$: é a matriz que se denota $\mathbb{0}_{m,n}$ ou simplesmente $\mathbb{0}$ quando m, n forem claros no contexto, cujas entradas são todas nulas. Por exemplo:

$$\mathbb{0}_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{0}_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{0}_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade de ordem n: é a matriz tipo $n \times n$ (n linhas e n colunas) que se denota $\mathbb{1}_n$ ou simplesmente $\mathbb{1}$ quando n for claro no contexto, cujas entradas são todas nulas, excepto as entradas-(i, i) que são todas 1. Por exemplo:

$$\mathbb{1}_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{1}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes triangulares

Numa matriz A, as posições (i, i) definem a *diagonal principal* da matriz.

Uma matriz do tipo $n \times n$ diz-se *quadrada* (de ordem n).

Uma matriz quadrada diz-se *triangular superior* se todas as entradas abaixo da diagonal principal forem nulas. (Observe-se que as entradas abaixo da diagonal principal são as entradas i, j que satisfazem a condição $i > j$.) Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes triangulares

Uma matriz quadrada diz-se *triangular inferior* se todas as entradas acima da diagonal principal forem nulas. (Observe-se que as entradas acima da diagonal principal são as entradas i, j que satisfazem a condição $i < j$.) Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes identidade e as matrizes nulas quadradas são exemplo ilustrativos do facto de uma matriz poder ser simultaneamente triangular superior e triangular inferior.

Matrizes diagonais

Uma matriz que seja simultaneamente triangular superior e triangular inferior diz-se uma *matriz diagonal*. Geralmente recorremos à simbologia $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ para indicar a matriz diagonal de ordem n:

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Por exemplo:

$$\operatorname{diag}(1, -1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quando é que duas matrizes são iguais?

Duas funções são iguais quando **têm o mesmo domínio** e para cada elemento do domínio **têm a mesma imagem**. Em termos de matrizes isto traduz-se no seguinte:

Duas matrizes A e B são iguais quando *são do mesmo tipo e para cada posição* (i, j) *se tem* $A_{i,j} = B_{i,j}$.

Se $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então, o resultado de multiplicar o escalar α pela matriz A é a matriz $\alpha A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ que satisfaz:

$$(\alpha A)_{i,j} = \alpha A_{i,j}$$

Ou seja:

$$\alpha \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha A_{1,1} & \alpha A_{1,2} & \cdots & \alpha A_{1,n} \\ \alpha A_{2,1} & \alpha A_{2,2} & \cdots & \alpha A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha A_{m,1} & \alpha A_{m,2} & \cdots & \alpha A_{m,n} \end{bmatrix}$$

Álgebra de matrizes [Multiplicação de um escalar por uma matriz]

Exemplos

$$\pi \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & \pi & 0 & 2\pi \\ \pi & -\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ então, o resultado de adicionar A e B é a matriz $A + B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ que satisfaz

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \cdots & B_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & A_{1,2}+B_{1,2} & \cdots & A_{1,n}+B_{1,n} \\ A_{2,1}+B_{2,1} & A_{2,2}+B_{2,2} & \cdots & A_{2,n}+B_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}+B_{m,1} & A_{m,2}+B_{m,2} & \cdots & A_{m,n}+B_{m,n} \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & 1+b \\ c & 1+d \\ 2+e & 3+f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \text{indefinido!}$$

O produto AB de duas matrizes A e B só está definido se A for de um tipo $m \times p$ e B de um tipo $p \times n$. Neste caso AB será do tipo $m \times n$. Ou seja, *o número de colunas do factor esquerdo tem que ser igual ao número de linhas do factor direito*. O número de linhas de AB coincide com o número de linhas de A e o número de colunas de AB com o número de colunas de B.

Caso básico O *caso básico* corresponde ao produto de um vector linha $(1 \times p)$ por um vector coluna $(p \times 1)$. O resultado é uma matriz 1×1. A definição é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} \\ B_{2,1} \\ \vdots \\ Bp, 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + \cdots + A_{1,p}B_{p,1} \end{bmatrix}$$

Convenção

Muitas vezes vemos a matriz $[a]$ como sendo o escalar a, ou seja identificamos as matrizes 1×1 com a sua única entrada. No caso básico que considerámos anteriormente o produto de uma linha por uma coluna pode ser visto como um escalar.

A interpretação que estaremos a considerar dependerá sempre do contexto: se o contexto exige que $[a]$ seja uma matriz então *vemos* $[a]$ *como* $[a]$. Se o contexto requer um escalar então, *vemos* $[a]$ *como* a.

Sejam $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{K}^{p \times n}$, Nestas condições $AB \in \mathbb{K}^{m \times n}$ é a matriz definida por:

$$(AB)_{i,j} = A_{i,*}B_{*,j}$$

Ou seja $C_{i,j}$ é o resultado (visto como um escalar) de multiplicar a linha i de A pela coluna j de B.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha + b\lambda & a\beta + b\mu & a\gamma + b\theta \\ c\alpha + d\lambda & c\beta + d\mu & c\gamma + d\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha & a\beta & a\gamma \\ b\alpha & b\beta & b\gamma \end{bmatrix}$$

Propriedades gerais da álgebra de matrizes.

(1) $A + B = B + A$

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $A + \mathbb{O} = A$

(4) Toda a matriz A possui uma matriz simétrica que se denota $-A$ e é a matriz B do mesmo tipo de A satisfazendo $B_{i,j} = -A_{i,j}$. Tem-se que $A + (-A) = \mathbb{O}$. (Em geral, escrevemos $A - B$ em vez de $A + (-B)$.)

(5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(7) $1A = A$ e $0A = \mathbb{O}$

(8) $(-1)A = -A$

Propriedades gerais da álgebra de matrizes.

No que respeita às operações de adição e multiplicação por escalar, a álgebra de matrizes **possui as mesmas propriedades que a álgebra numérica**.

Propriedades gerais da álgebra de matrizes.

(9) $(AB)C = A(BC)$

(10) $\mathbb{O}A = \mathbb{O}$ e $A\mathbb{O} = \mathbb{O}$

(11) $\mathbb{I}A = A$ e $A\mathbb{I} = A$

(12) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

(13) $(A + B)C = AC + BC$

(14) $A(B + C) = AB + AC$

Tal como no caso das operações numéricas consideramos que a multiplicação tem precedência sobre a adição (só assim, por exemplo, (13) e (14) acima, podem se lidas sem ambiguidade).

Observações [o produto de matrizes, em geral, **não é comutativo**]

A falha da comutatividade do produto de matrizes pode ocorrer por várias razões:

AB pode estar definido e BA não estar (ou vice-versa);

e.g, se $A \in \mathbb{K}^{2\times 3}, B \in \mathbb{K}^{3\times 4}$

AB e BA podem estar ambos definidos mas serem de tipos diferentes;

e.g, se $A \in \mathbb{K}^{1\times 3}, B \in \mathbb{K}^{3\times 1}$

AB e BA podem estar ambos definidos, serem do mesmo tipo mas serem matrizes diferentes;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observações [a lei do anulamento do produto, em geral, **não é válida**]

A falha da da lei do anulamento do produto* pode ser exemplificada do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* No contexto matricial a *lei do anualmento do produto* enuncia-se:

$$AB = \mathbb{0} \Leftrightarrow A = \mathbb{0} \vee B = \mathbb{0}$$