# Álgebra Linear

## Primeiro semestre

2021–2022

## Aula 05

## Característica de uma matriz

Considerando uma matriz inicial $A$, duas pessoas, aplicando o algoritmo de eliminação de Gauss, podem obter, a partir de $A$, duas matrizes em escadas de linhas $A^*$ e $A^\dagger$ que não são necessariamente iguais.

**No entanto**, o número de pivôs e $A^*$ e $A^\dagger$ em cada linha, bem como as colunas em que ocorrem em cada linha, **são as mesmas.**

**Definição.**—A *característica de uma matriz, $A$*, que se denota $\mathrm{car}(A)$, é o número de pivôs numa qualquer matriz em escada de linhas $A^*$, em escada de linhas, que foi obtida a partir de $A$ usando o método de eliminação de Gauss.

## Propriedades da característica de uma matriz

Tem-se que $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A^\top)$. Assim, se $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tem-se $\operatorname{car}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Se $\alpha \neq 0$ então $\operatorname{car}(\alpha A) = \operatorname{car}(A)$.

## Característica de uma matriz e sistemas de equações lineares

Sejam $[A\,|\,\mathrm{b}]$ a matriz aumentada de um sistema e $[\bar{A}\,|\,\bar{\mathrm{b}}]$ a matriz em escada de linhas que se obtém de $[A\,|\,\mathrm{b}]$ através do método de eliminação de Gauss. Tem-se:

Se $\mathrm{car}([\bar{A}\,|\,\bar{\mathrm{b}}]) > \mathrm{car}(A)$ **o sistema é impossível.**

Se $\mathrm{car}([\bar{A}\,|\,\bar{\mathrm{b}}]) = \mathrm{car}(A)$ **o sistema é possível** e, neste caso, se $\mathrm{car}(A)$ coincide com o número de variáveis (= número de colunas de $A$) então, o sistema é **possível e determinado**; se $\mathrm{car}(A)$ for inferior ao número de variáveis então, o sistema é **possível e indeterminado.**

## Característica de uma matriz e sistemas de equações lineares

Sejam $[A \,|\, \mathrm{b}]$ a matriz aumentada de um sistema e $[\bar{A} \,|\, \bar{\mathrm{b}}]$ a matriz em escada de linhas que se obtém de $[A \,|\, \mathrm{b}]$ através do método de eliminação de Gauss

Se $\mathrm{car}([A \,|\, \mathrm{b}]) = \mathrm{car}(A) <$ número de variáveis, o sistema é, como vimos indeterminado. Neste caso, a solução do sistema consiste em exprimir algumas variáveis—as *variáveis dependentes*—à custa de outras—as *variáveis livres*.

Neste caso, podem sempre escolher-se as variáveis nas colunas de $[\bar{A} \,|\, \bar{\mathrm{b}}]$ que contêm os pivôs como variáveis dependentes, sendo as restantes as variáveis livres.

O **grau de indeterminação** de um sistema é o número de variáveis livres que ocorrem na solução e é a diferença entre o número de colunas de $A$ e $\mathrm{car}(A)$.

Embora o número de pivôs (**no final da eliminação de Gauss**) forneça o número de variáveis dependentes na solução de um sistema enquanto que o grau de indeterminação fornece o número de variáveis livres nessa mesma solução,

**podem existir diferentes escolhas das *variáveis livres* e *dependentes*.**

*As operações elementares podem ser descritas em termos puramente algébricos.*

## Matrizes elementares

Denotamos por $E_m^{(i,j)} \in \mathbb{K}^{m\times m}$, ou simplesmente $E^{(i,j)}$, a matriz, que é como a matriz identidade excepto que com as linhas $i$ e $j$ da identidade trocadas entre si.

$$E_3^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denotamos por $E_m^{(i,j)}(\alpha) \in \mathbb{K}^{m\times m}$, ou simplesmente $E^{(i,j)}(\alpha)$, com $i \neq j$, a matriz que é como a matriz identidade excepto que a entrada $(i, j)$ é $\alpha$.

$$E_2^{(2,1)}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

## Matrizes elementares

Denotamos por $E_m^{(i)}(\alpha) \in \mathbb{K}^{m \times m}$, ou simplesmente $E^{(i)}(\alpha)$, para $\alpha \neq 0$, a matriz que é como a identidade excepto que na $i$-ésima posição da diagonal tem o escalar $\alpha$.

$$E_4^{(2)}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Resultado de multiplicar uma matriz por uma matriz elementar

### Multiplicação à esquerda

$$E^{(i,j)}A = B$$

Neste caso $B$ é a matriz que se obtém de $A$, trocando as linhas $i$ e $j$.

$$E^{(i,j)}(\alpha)A = B$$

Neste caso $B$ é a matriz que resulta de $A$ substituindo a linha $i$ de $A$ por $A_{i,*} + \alpha A_{j,*}$, i.e. adicionando à linha $i$ de $A$ a linha $j$ multiplicada por $\alpha$.

$$E^{(i)}(\alpha)A = B$$

Neste caso $B$ é a matriz que se obtém de $A$, multiplicando a linha $i$ de $A$ pelo escalar $\alpha \neq 0$.

## Resultado de multiplicar uma matriz por uma matriz elementar

### Multiplicação à direita

$$AE^{(i,j)} = B$$

Neste caso $B$ é a matriz que se obtém de $A$, trocando as colunas $i$ e $j$.

$$AE^{(i,j)}(\alpha) = B$$

Neste caso $B$ é a matriz que resulta de $A$ substituindo a coluna $j$ de $A$ por $A_{*,j} + \alpha A_{*,i}$, i.e. adicionando à coluna $j$ de $A$ a coluna $i$ multiplicada por $\alpha$.

$$AE^{(i)}(\alpha) = B$$

Neste caso $B$ é a matriz que se obtém de $A$, multiplicando a coluna $i$ de $A$ pelo escalar $\alpha \neq 0$.

## Sistemas homogéneos

**Definição.**—Um **sistema homogéneo** é um sistema da forma $A\mathrm{x} = \mathbb{O}$, ou seja um sistema onde os termos independentes são todos nulos. Dado um sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, o **sistema homogéneo associado** é o sistema $A\mathrm{x} = \mathbb{O}$.

Um sistema homogéneo é sempre possível: $A\mathbb{O} = \mathbb{O}$ (possui sempre a **solução nula**).

Se $\mathrm{u}$ e $\mathrm{w}$ são soluções do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ então, $\mathrm{u} - \mathrm{w}$ é uma solução do sistema homogéneo associado.

Sendo $\mathrm{u}_0$ uma solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, qualquer solução de $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ é da forma $\mathrm{u}_0 + \mathrm{w}$ onde $\mathrm{w}$ é uma solução do sistema homogéneo associado.

## Núcleo de uma matriz

**Definição.**—Seja $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. O núcleo de $A$, que se denota $\mathrm{Nuc}(A)$, consiste nos vectores $\mathrm{w} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tais que $A\mathrm{w} = \mathbb{O}$. Ou seja, $\mathrm{Nuc}(A)$ é o conjunto solução do sistema homogéneo $A\mathrm{x} = \mathbb{O}$.

Se $\mathrm{Nuc}(A) = \{\mathbb{O}\}$ dizemos que o núcleo **é trivial**, caso contrário o núcleo diz-se **não-trivial**.

# *A inversa de uma matriz (quadrada).*

## Inversa de uma matriz [definição]

**Definição.**—Seja $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. Uma matriz $B$ diz-se *inversa de $A$* se $AB = BA = \mathbb{I}$.

**Observação.**—A definição é simétrica i.e., $B$ é inversa de $A$ se e só se $A$ é inversa de $B$.

Nem todas as matrizes quadradas são invertíveis.
Um exemplo óbvio são as matrizes nulas.
***Mas, mesmo matrizes não nulas podem não ter inversa*!**

## Inversa de uma matriz

**Definição.**—Uma matriz quadrada $A \neq \mathbb{O}$ para a qual existe uma matriz quadrada $B \neq \mathbb{O}$ satisfazendo $AB = \mathbb{O}$ ou $BA = \mathbb{O}$ diz-se um *divisor de zero*.

**Lema.**—Se $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ é um divisor de zero então $A$ não tem inversa.

Seja $A$ um divisor de zero. Suponhamos que $B$ é a inversa de $A$.
Pela definição sabemos que existe $C \neq \mathbb{O}$ tal que $AC = \mathbb{O}$ ou $CA = \mathbb{O}$. No primeiro caso tem-se:

$$C = \mathbb{I}C = (BA)C = B(AC) = B\mathbb{O} = \mathbb{O}$$

o que é uma contradição.

No segundo caso, tem-se:

$$C = C\mathbb{I} = C(AB) = (CA)B = \mathbb{O}B = \mathbb{O}$$

também uma contradição. Somos assim forçados a concluir que $A$ não é invertível.

## Inversa de uma matriz

**Lema.**—Se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tem inversa então ela é única.

Admitindo que $B$ e $C$ possam ser inversas de $A$ tem-se:

$$B = B\mathbb{I} = B(AC) = (BA)C = \mathbb{I}C = C$$

ou seja, $B = C$.

Tendo em conta o resultado anterior, *se a inversa de $A$ existe*, ela denota-se $A^{-1}$.

## Propriedades da inversa

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) se $A$ tem inversa e $\alpha \neq 0$ então,

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$$

(3) se $A, B$ têm inversa então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(4) se $A$ tem inversa então $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

Esta última propriedade é importante pois simplifica, quer o reconhecimento de uma matriz enquanto inversa de outra quer, como veremos, a determinação da inversa (quando ela existe).

(5) Se $B$ é tal que $AB = \mathbb{I}$ então $BA = \mathbb{I}$ e assim $B = A^{-1}$. Se $B$ é tal que $BA = \mathbb{I}$ então $AB = \mathbb{I}$ e assim $B = A^{-1}$

## Consideremos $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

### Se $\mathrm{Nuc}(A) \neq \{\mathbb{O}\}$ então $A$ não tem inversa.

Se $A$ tem inversa e $\mathrm{x} \in \mathrm{Nuc}(A)$ então $\mathrm{x} = A^{-1}A\mathrm{x} = A^{-1}\mathbb{O} = \mathbb{O}$.
Ou seja $\mathrm{Nuc}(A) = \{\mathbb{O}\}$.

### Se $E, A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ e $E$ tem inversa então $\mathrm{Nuc}(EA) = \mathrm{Nuc}(A)$.

Note-se que, para qualquer u, se tem $E\mathrm{u} = \mathbb{O}$ sse $\mathrm{u} = \mathbb{O}$. Desta forma

$$(EA)\mathrm{x} = \mathbb{O} \Leftrightarrow E(A\mathrm{x}) = \mathbb{O} \Leftrightarrow A\mathrm{x} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{Nuc}(A)$$

## No caso mais geral tem-se $\mathrm{Nuc}(A) \subset \mathrm{Nuc}(BA)$.

Se $\mathrm{x} \in \mathrm{Nuc}(A)$ então $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$. Neste caso $(BA)\mathrm{x} = B(A\mathrm{x}) = B\mathbb{0} = \mathbb{0}$ ou seja, $\mathrm{x} \in \mathrm{Nuc}(BA)$.

## Por outro lado, se o núcleo de $A$ é trivial então $A$ tem inversa.

Seja $K$ em escada de linhas tal que $K = E_1 \cdots E_s A$, onde as matrizes $E_1, \ldots, E_s$ são elementares (logo invertíveis). Como o núcleo de $A$ é trivial e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Nuc}(K)$, concluímos que todas as linhas de $K$ têm pivôs. Desta forma todos os sistemas da forma $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ são possíveis e determinados, em particular, **os sistemas necessários à determinação da inversa são possíveis e a inversa existe**.