Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula **06**

Determinação da inversa

Se $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ então, existe a inversa de A se e só se os sistemas:

$$A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

forem todos possíveis e determinados (dada a unicidade da inversa). Note-se que se tem em geral que $AB_{*,j} = (AB)_{*,j}$ pelo que uma solução do primeiro sistema fornece a primeira coluna da inversa, do segundo, a segunda coluna da inversa, etc.

Determinação da inversa

Note-se que são n sistemas de equações que partilham a mesma matriz de coeficientes pelo que podem ser todos resolvidos em simultâneo:

$$\begin{array}{c} A\mathrm{x} = \mathrm{b}_1 \\ A\mathrm{x} = \mathrm{b}_2 \\ \vdots \\ A\mathrm{x} = \mathrm{b}_n \end{array} \qquad [A \mid \mathrm{b}_1\mathrm{b}_2\cdots\mathrm{b}_n] \xrightarrow{\text{m. e. G.}} [\bar{A} \mid \bar{\mathrm{b}}_1\bar{\mathrm{b}}_2\cdots\bar{\mathrm{b}}_n] \qquad \begin{array}{c} \bar{A}\mathrm{x} = \bar{\mathrm{b}}_1 \\ \bar{A}\mathrm{x} = \bar{\mathrm{b}}_2 \\ \vdots \\ \bar{A}\mathrm{x} = \bar{\mathrm{b}}_n \end{array}$$

Determinação da inversa

No caso da determinação da inversa e tendo em conta os sistemas que temos que tentar resolver somos conduzidos à seguinte matriz:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ A & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] = [A \mid \mathbb{I}]$$

Determinação da inversa

Lema.—Considere-se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se $[\bar{A} \mid \bar{\mathrm{b}}]$ é a matriz em escada de linhas que se obtém de $[A \mid \mathbb{I}]$ tem-se:

Se $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(\bar{A}) < n$ então A não tem inversa.

Se $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(\bar{A}) = n$ então, obtendo a matriz em escada de linhas reduzida de $[\bar{A} \mid \bar{\mathrm{b}}]$, essa matriz é do tipo $[\mathbb{I} \mid B]$ e, nesse caso $A^{-1} = B$.

Problema 2.18.— Nos casos seguintes, determine a matriz A:

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $6A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $(8A^{\top})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $(\mathbb{1} - 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 2.19.— Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e © AL

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) A característica de A_μ em função de μ.

(b) A inversa de A_μ para $\mu = 1$.

PROBLEMA 2.20.— Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que A é invertível e calcule A^{-1}.

(b) Resolva a equação: $A^2 \mathrm{u} = [1\ 2\ 3]^\top$;

Critério de invertibilidade

Teorema.—Consideremos $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. São equivalentes:

A é invertível.

$\mathrm{Nuc}(A) = \{\mathbb{O}\}$;

$\mathrm{car}(A) = n$;

para qualquer b, o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ é possível e determinado.

Invertibilidade das matrizes elementares

Teorema.—As matrizes elementares são todas invertíveis. Mais precisamente:

$$\left(E^{(i,j)}\right)^{-1} = E^{(i,j)}$$

$$\left(E^{(i,j)}(\alpha)\right)^{-1} = E^{(i,j)}(-\alpha)$$

$$\left(E^{(i)}(\alpha)\right)^{-1} = E^{(i)}(1/\alpha)$$

Problema 2.16.— Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre matrizes elementares E_1, E_2, E_3 tais que $E_3 E_2 E_1 A = \mathbb{1}$.

(b) Escreve A^{-1} como um produto de três matrizes elementares.

(c) Escreva A como produto de três matrizes elementares.

Problema 2.22.— Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = A$.

(a) Mostre que $(\mathbb{1} - A)^2 = (\mathbb{1} - A)$.

(b) Calcule $(\mathbb{1} - 2A)^2$, verifique que $(\mathbb{1} - 2A)$ é invertível. Calcule $(\mathbb{1} - 2A)^{-1}$.