Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 07

Espaços lineares (definição)

Definição.—Um **espaço linear**, V, sobre $\mathbb{K}$, consiste num conjunto não vazio V, cujos elementos se designam genericamente de **vectores**, equipado com operações de **adição de vectores** e de **multiplicação por escalar** (i.e., um membro de $\mathbb{K}$).

A **adição de vectores** associa a cada par de vectores $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in V^2$ um vector de V, que se designa de *soma de* u *com* v e que se denota por $\mathrm{u} + \mathrm{v}$.

A operação de **multiplicação por escalar** faz corresponder a cada par $(\alpha, \mathrm{u}) \in \mathbb{K} \times V$ um vector que se designa de *multiplicação do escalar* α *pelo vector* v e se denota $\alpha\mathrm{v}$. Um vector da forma $\alpha\mathrm{v}$ diz-se um **múltiplo escalar de** v ou simplesmente, um **múltiplo de** v.

Devem ainda ser verdadeiros os seguintes **axiomas**:

Axiomas de espaço linear

(1) $x + y = y + x$ (**a adição é comutativa**);

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (**a adição é associativa**);

(3) Existe um vector u tal que, dado qualquer outro vector x, tem-se $x + u = x$ (ou seja, **existe um elemento neutro para a adição**).

O elemento neutro é necessariamente único: se u e v são elementos neutros então, $u + v = v$, porque u é elemento neutro e $u + v = u$ porque v é elemento neutro. Assim $u = u + v = v$.

Como o elemento neutro é único, denotamo-lo por $\mathbb{0}$.

Axiomas de espaço linear

(4) Para cada vector x, existe um vector y tal que $x + y = \mathbb{0}$ (**existência de simétrico**).

O simétrico de x é único: se u e v são simétricos de x então,

$$u = u + \mathbb{0} = u + (x + v) = (u + x) + v = \mathbb{0} + v = v$$

Sendo único, o simétrico de x denota-se por $-x$.

(5) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
(**distributividade do produto por escalar relativamente à adição de escalares**);

Axiomas de espaço linear

(6) $\alpha(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = \alpha\mathrm{x} + \alpha\mathrm{y}$
(**distributividade do produto por escalar relativamente à adição de vectores**);

(7) $1\mathrm{x} = \mathrm{x}$;

(8) $(\alpha\beta)\mathrm{x} = \alpha(\beta\mathrm{x})$;

Exemplo 1

Denotamos por $\mathbb{K}^n$ o conjunto de todos os n-úplos de escalares em $\mathbb{K}$. Neste conjunto consideramos operações de adição de vectores e de multiplicação por escalar definidas por:

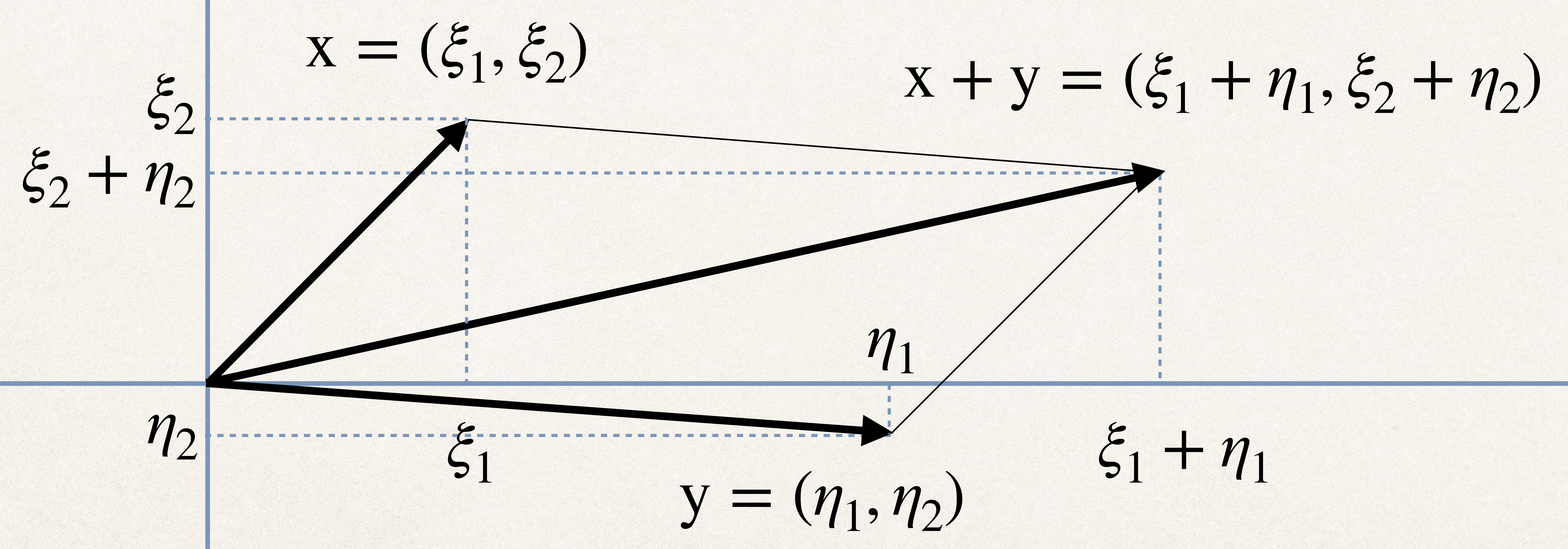
$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \ldots, \eta_n) := (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n) := (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n)$$

Com estas operações, $\mathbb{K}^n$ é um espaço linear.

Exemplo 2

O espaço $\mathbb{R}^2$ pode ser identificado com a estrutura dos **vectores fixos do plano**:



Exemplo 3

O conjunto $\mathbb{K}^{m\times n}$ das matrizes do tipo $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação de um escalar por uma matriz, constituem um espaço linear sobre $\mathbb{K}$.

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \cdots & B_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & \cdots & A_{1,n}+B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}+B_{m,1} & \cdots & A_{m,n}+B_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha A_{1,1} & \cdots & \alpha A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha A_{m,1} & \cdots & \alpha A_{m,n} \end{bmatrix}$$

Exemplo 4

Seja X um conjunto não vazio. O conjunto ${}^X\mathbb{K}$ das funções $f : X \to \mathbb{K}$ é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ quando equipado com as operações de adição e de multiplicação por escalar dadas por:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

Exemplos mais concretos são ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$, onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos naturais. (Observe-se que uma função dos naturais para os reais é o que vulgarmente designamos de **sucessão de números reais**.) Outro exemplo importante consiste nas **funções reais de variável real**, ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, ou ainda mais geralmente ${}^{I}\mathbb{R}$ das funções definidas num intervalo I.

Propriedades elementares

(1) $0x = \mathbb{0}$

Tem-se $0x = (0+0)x = 0x + 0x$. Adicionando a ambos os membros $-(0x)$ obtém-se $\mathbb{0} = 0x$.

(2) $\alpha\mathbb{0} = \mathbb{0}$

Análogo ao anterior: $\alpha\mathbb{0} = \alpha(\mathbb{0} + \mathbb{0}) = \alpha\mathbb{0} + \alpha\mathbb{0}$.

(3) Se $\alpha x = \mathbb{0}$ e $x \neq \mathbb{0}$ então $\alpha = 0$.

Se $\alpha \neq 0$ então, $\alpha x = \mathbb{0}$ implica que $\dfrac{1}{\alpha}(\alpha x) = \dfrac{1}{\alpha}\mathbb{0} = \mathbb{0}$, ou seja, $x = \mathbb{0}$.

(4) Se $x \neq \mathbb{0}$ então, $\alpha x = \beta x$ se e só se $\alpha = \beta$.

Tem-se que $\alpha x = \beta x$ se e só se $\alpha x - \beta x = \mathbb{0}$, ou seja, $(\alpha - \beta)x = \mathbb{0}$ e, pelo anterior, isto acontece sse $\alpha = \beta$.

Propriedades elementares

(5) Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha x = \mathbb{O}$ então, $x = \mathbb{O}$

Tem-se $\mathbb{O} = \alpha x = \alpha x + \alpha x = (2\alpha)x$. Como $x \neq \mathbb{O}$ tem-se $\alpha = 2\alpha$, ou seja, $\alpha = 0$.

(6) Se $\alpha \neq 0$ então, $\alpha x = \alpha y$ se e só se $x = y$

Tem-se que $\alpha x = \alpha y$ se e só se $\alpha x - \alpha y = \mathbb{O}$, ou seja, $\alpha(x - y) = \mathbb{O}$ e, pelo anterior isto acontece sse $x = y$.

(7) $(-1)x = -x$

$x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = \mathbb{O}$, logo $(-1)x = -x$ pela unicidade do simétrico.

Combinações lineares de vectores

Definição.—Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \in V$ vectores em V. Uma **combinação linear** dos vectores $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ é uma soma da forma:

$$\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{v}_n$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Um vector $\mathrm{x} \in V$ **é uma combinação linear de** $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $\mathrm{x} = \alpha_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{v}_n$.

O conjunto de todos os vectores que são combinações lineares de $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ denota-se por:

$$L_V(\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\})$$

E designa-se de **expansão linear de** $\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ **em** V.


$\mathbb{R}^2$
$L_{\mathbb{R}^2}(\{x\})$
x

$\mathbb{R}^2$

$$L_{\mathbb{R}^2}(\{x\}) = L_{\mathbb{R}^2}(\{x, y\}) = L_{\mathbb{R}^2}(\{y\})$$


$\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2 = L_{\mathbb{R}^2}(\{x, y\})$
y
αx
x
w
βy
$w = \alpha x + \beta y$

Combinações lineares de vectores

Por convenção consideramos que

$$L_V(\varnothing) = \{\mathbb{0}\}$$

Factos importantes

O sistema $[A \mid \mathrm{b}]$ é possível se e só se b é combinação linear das colunas de A.

Os espaços lineares $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{n\times 1}$ e $\mathbb{K}^{1\times n}$ são essencialmente equivalentes, i.e. do ponto de vista da álgebra linear é indiferente trabalhar com o n-úplo $(x_1, \ldots, x_n)$, com o vector linha $[x_1 \ \ \ldots \ \ x_n]$ ou com o vector coluna $[x_1 \ \ \ldots \ \ x_n]^\top$.

Em particular, se $\mathrm{u}, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n} \in \mathbb{K}^n$ então $\mathrm{u} \in L_{\mathbb{K}^n}(\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}\})$ se e só se o sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 & \ldots & \mathrm{x}_n & \mathrm{u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

é possível.

Exemplos

Consideremos o espaço $\mathbb{R}^3$. Ter-se-á $(1,1,0) \in L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0),(0,0,1),(1,0,1)\})$?

A resposta à questão é afirmativa se e só se o vector (1,1,0) for combinação linear dos vectores (1,0,0), (0,0,1), (1,0,1).

Uma vez que é indiferente trabalhar com vectores de $\mathbb{K}^n$ ou vectores coluna de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ **(a álgebra é a mesma)** o nosso problema é equivalente a saber se a coluna $[1 \quad 1 \quad 0]^\top$ é uma combinação linear das colunas $[1 \quad 0 \quad 0]^\top$, $[0 \quad 0 \quad 1]^\top$ e $[1 \quad 0 \quad 1]^\top$.

Exemplos

Como sabemos, isso acontece se e só se, o sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

é possível (o que claramente não acontece).

Exemplos

Será que $\mathbb{R}^3 = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\})$?

Ou seja, será que dado um qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se tem que (x, y, z) é combinação linear dos vectores $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$?

Isso acontece se os sistemas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right]$$

forem todos possíveis.

Exemplos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-L_3+L_2 \to L_2 \\ -L_3+L_1 \to L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x-z \\ 0 & 1 & 0 & y-z \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow[-L_2+L_1 \to L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & y-z \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right]$$

Os sistemas são todos possíveis, pelo que a resposta é afirmativa.

Como as soluções do sistema fornecem os coeficientes das combinações lineares, concluí-se que

$$(x, y, z) = (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)$$

Subespaços de um espaço linear

Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto não vazio $X \subset V$ diz-se **fechado para as operações de espaço linear** (de V) se:

$$x, y \in X \Rightarrow x + y \in X$$

$$\alpha \in \mathbb{K}, x \in X \Rightarrow \alpha x \in X$$

Definição.—Sejam V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e W um subconjunto não vazio de V fechado para as operações de espaço linear (de V). Dizemos que W é um subespaço linear de V ou simplesmente um subespaço de V se, com as operações de V,
se tem que W é um espaço linear.

Subespaços de um espaço linear

Acontece que, se W é fechado para as operações em V isso é já suficiente para garantir que é um espaço linear e, consequentemente, é um subespaço de V.

As operações efectuam-se da mesma forma em V e W e, a maioria dos axiomas de espaço linear são **universais**. Assim se todos os elementos em V satisfazem esses axiomas, em particular também os de W os satisfazem.

As excepções são a existência de simétrico, para cada vector, bem como a existência de elemento neutro para a soma. No entanto tem-se:

$$x \in W \Rightarrow (-1)x = -x \in X$$

$$x \in W \Rightarrow 0x = \mathbb{0} \in W$$

Subespaços de um espaço linear

Teorema.—Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto $W \subset V$ é um subespaço de V se e só se:

$$\mathbb{0} \in W;$$

$$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in W \Rightarrow \mathrm{x} + \mathrm{y} \in W;$$

$$\alpha \in \mathbb{K}, \mathrm{x} \in W \Rightarrow \alpha \mathrm{x} \in W.$$

Ou se:

$$\mathbb{0} \in W;$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W \Rightarrow \alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y} \in W.$$

Escrevemos $W \leqslant V$ para indicar que W é um subespaço de V.

Subespaços de um espaço linear

Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ então $\{\mathbb{O}\} \leqslant V$ e $V \leqslant V$.

Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $X \subset V$ então, $L_V(X) \leqslant V$.

Dado $\mathrm{x} \in X$ tem-se $\mathbb{O} = 0\mathrm{x} \in L_V(X)$. Por outro lado, se

$$\xi_1 \mathrm{x}_1 + \cdots + \xi_n \mathrm{x}_n, \eta_1 \mathrm{y}_1 + \cdots + \eta_k \mathrm{y}_k \in L_V(X)$$

então,

$$\alpha(\xi_1 \mathrm{x}_1 + \cdots + \xi_n \mathrm{x}_n) + \beta(\eta_1 \mathrm{y}_1 + \cdots + \eta_k \mathrm{y}_k) =$$

$$= (\alpha\xi_1)\mathrm{x}_1 + \cdots + (\alpha\xi_n)\mathrm{x}_n) + (\beta\eta_1)\mathrm{y}_1 + \cdots + (\beta\eta_k)\mathrm{y}_k \in L_V(X)$$

Subespaços de um espaço linear (exemplos)

Se $W \leqslant V$ e $X \subset V$ é tal que $W = L_V(X)$ dizemos que X **é um conjunto gerador de** W.

Tem-se que:

Se $X \subset Y$ então $L_V(X) \leqslant L_V(Y)$.

Se $\mathrm{w} \in L_V(X)$ então $L_V(X \cup \{\mathrm{w}\}) = L_V(X)$.

Subespaços de um espaço linear (exemplos)

Seja $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. O **espaço das colunas de** A é:

$$\mathrm{EC}(A) = L_{\mathbb{K}^{m\times 1}}(\{A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}\}) \leqslant \mathbb{K}^{m\times 1}$$

Ou, tendo em conta a identificação de n-úplos com vectores coluna:

$$\mathrm{EC}(A) = L_{\mathbb{K}^{m}}(\{A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}\}) \leqslant \mathbb{K}^{m}$$

Subespaços de um espaço linear (exemplos)

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dada um vector (x, y, z, w) em que circunstâncias é que ele é membro de $\mathrm{EC}(A)$?

Sabemos do estudo prévio acerca de sistemas de equações lineares que $[x\ y\ z\ w]^\top$ é combinação linear das colunas de A se e só se o sistema

$$A \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

É possível.

Subespaços de um espaço linear (exemplos)

Temos então,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 1 & -1 & 2 & w \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminação de Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & -x+2y+w \end{array}\right]$$

ou seja, $(x, y, z, w) \in \mathrm{EC}(A)$ se e só se $-x + y + z = 0$ e $-x + 2y + w = 0$. Isto é equivalente a dizer que $z = x - y$ e $w = x - 2y$, que são precisamente os quádruplos da forma $(x, y, x - y, x - 2y)$ onde x e y são reais arbitrários.

Subespaços de um espaço linear (exemplos)

Seja $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. O **espaço das linhas de** A é:

$$\mathrm{EL}(A) = L_{\mathbb{K}^{1\times n}}(\{A_{1,*}, \ldots, A_{m,*}\}) \leqslant \mathbb{K}^{1\times n}$$

Ou, tendo em conta a identificação de n-úplos com vectores linha:

$$\mathrm{EL}(A) = L_{\mathbb{K}^{n}}(\{A_{1,*}, \ldots, A_{m,*}\}) \leqslant \mathbb{K}^{n}$$

Subespaços de um espaço linear (exemplos)

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dada um vector (x, y, z) em que circunstâncias é que ele é membro de $\mathrm{EL}(A)$?

Observando que $\mathrm{EL}(A) = \mathrm{EC}(\mathrm{A}^\top)$ a questão pode resolver-se como atrás fizemos para determinar um espaço das colunas i.e., $(x, y, z) \in \mathrm{EL}(A)$ se e só se o sistema

$$A^\top \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

for possível.