Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 10

Relação entre as dimensões dos espaços das linhas e das colunas de uma matriz

Teorema.—Seja $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ uma matriz. Tem-se que a dimensão do espaço das linhas de A coincide com a dimensão do espaço das colunas de A e ambas coincidem com a característica de A. Assim, tem-se que:

$$\mathrm{car}(A) = \dim(\mathrm{EC}(A)) = \dim(\mathrm{EL}(A))$$

Nulidade de uma matriz

Definição.—*Seja* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *uma matriz. A* ***nulidade*** *de* A*, que se denota* $\mathrm{nul}(A)$*, é a dimensão do núcleo de* A*.*

Teorema.—*Seja* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *uma matriz. Tem-se que:*

$$n = \mathrm{car(A)} + \mathrm{nul(A)}$$

Ou seja, a soma da nulidade com a característica de uma matriz iguala o número das suas colunas.

Bases ordenadas e vectores de coordenadas

Definição.—*Uma base ordenada de um espaço linear V é uma base onde se fixa uma ordem para os vectores da base. Ou seja é uma sequência ordenada de vectores de V,*

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$$

tal que $\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\}$ é uma base de V.

Se $\mathrm{x} \in V$, o vector de coordenadas de x na base ordenada $\boldsymbol{\beta}$ é o (único) n-úplo $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ que satisfaz:

$$\mathrm{x} = \alpha_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{u}_n.$$

Bases ordenadas e vectores de coordenadas

Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ é uma base ordenada de V então a correspondência $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}}$ é uma função bijectiva $V \to \mathbb{K}^n$. A inversa desta função é a função $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\boldsymbol{\beta}} = \alpha_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{u}_n$. Ou seja, tem-se:

$$(\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{\beta}} = \mathrm{x} \text{ e } ((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\boldsymbol{\beta}})_{\boldsymbol{\beta}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Dizemos que $\mathbb{K}^n$ é o **espaço de coordenadas** de V. Uma vez que $n = \dim V$ o espaço de coordenadas de um espaço de coordenadas de um espaço linear V é sempre $\mathbb{K}^{\dim V}$.

Por exemplo, os espaços de coordenadas de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{m \times n}$ e $\mathbb{K}_n[x]$ são, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{mn}$ e $\mathbb{K}^{n+1}$, respectivamente.

Vectores de coordenadas e combinações lineares

Dados $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n \in V$ tem-se:

$$(\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{x}_n)_{\boldsymbol{\beta}} = \alpha_1 (\mathrm{x}_1)_{\boldsymbol{\beta}} + \cdots + \alpha_n (\mathrm{x}_n)_{\boldsymbol{\beta}}$$

Analogamente, dados $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n \in \mathbb{K}^n$ tem-se:

$$(\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{x}_n)^{\boldsymbol{\beta}} = \alpha_1 (\mathrm{x}_1)^{\boldsymbol{\beta}} + \cdots + \alpha_n (\mathrm{x}_n)^{\boldsymbol{\beta}}$$

Identificação dos vectores com os vectores de coordenadas

Do ponto de vista da álgebra linear um vector num espaço linear pode ser identificado com o respectivo vector de coordenadas.

Mais especificamente: sejam, V um espaço linear, cujo espaço de coordenadas é $\mathbb{K}^n$ e $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ uma proposição envolvendo apenas ***noções de álgebra linear****.*

Dados vectores $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m \in V$ tem-se que $\Phi(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m)$ é verdadeira em V se e só se $\Phi((\mathrm{x}_1)_{\beta}, \ldots, (\mathrm{x}_m)_{\beta})$ é verdadeira em $\mathbb{K}^n$.

Reciprocamente, se $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m \in \mathbb{K}^n$ então, $\Phi(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m)$ é verdadeira em $\mathbb{K}^n$ se e só se $\Phi((\mathrm{x}_1)^{\beta}, \ldots, (\mathrm{x}_m)^{\beta})$ é verdadeira em V.

Identificação dos vectores com os vectores de coordenadas

Por exemplo:

$\mathrm{x} = \mathbb{0}$ em V se e só se $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{0}$ em $\mathbb{K}^n$.

$\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ são linearmente independentes em V sse $(\mathrm{x}_1)_{\boldsymbol{\beta}}, \ldots, (\mathrm{x}_n)_{\boldsymbol{\beta}}$ são linearmente independentes em $\mathbb{K}^n$.

$\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ são linearmente dependentes em V sse $(\mathrm{x}_1)_{\boldsymbol{\beta}}, \ldots, (\mathrm{x}_n)_{\boldsymbol{\beta}}$ são linearmente dependentes em $\mathbb{K}^n$.

$\mathrm{x} \in L_V(\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k\})$ sse $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}} \in L_{\mathbb{K}^n}(\{(\mathrm{u}_1)_{\boldsymbol{\beta}}, \ldots, (\mathrm{u}_k)_{\boldsymbol{\beta}}\})$.

Identificação dos vectores com os vectores de coordenadas

Definição.—Dados $X \subset V$ e $Y \subset \mathbb{K}^n$, definimos $X_\beta = \{\mathrm{x}_\beta \mid \mathrm{x} \in X\}$ e $Y^\beta = \{\mathrm{y}^\beta \mid \mathrm{y} \in Y\}$.

Tem-se:

$X \leqslant V$ sse $X_\beta \leqslant \mathbb{K}^n$ e $Y \leqslant \mathbb{K}^n$ sse $Y^\beta \leqslant V$.

$X_1 \subset X_2$ sse $(X_1)^\beta \subset (X_2)^\beta$ e $Y_1 \subset Y_2$ sse $(Y_1)^\beta \subset (Y_2)^\beta$.

Se $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n \in V$ então $\left(L_V(\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n\})\right)_\beta = L_{\mathbb{K}^n}(\{(\mathrm{x}_1)_\beta, \ldots, (\mathrm{x}_n)_\beta\})$.

Se $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n \in \mathbb{K}^n$ então $\left(L_{\mathbb{K}^n}(\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n\})\right)^\beta = L_V(\{(\mathrm{x}_1)^\beta, \ldots, (\mathrm{x}_n)^\beta\})$.

Vectores de coordenadas (exemplos)

Os vectores $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ são linearmente independentes?

Determine uma base para o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ por eles gerado.

Fixando, por exemplo, a base canónica em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ os vectores acima são linearmente independentes se e só se os respectivos vectores de coordenadas nessa base, que são $(1,1,1,1)$, $(1,-1,0,-1)$ e $(0,2,1,2)$, respectivamente, forem linearmente independentes. Tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz tem característica $2 < 3$, os vectores são linearmente dependentes.

Vectores de coordenadas (exemplos)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma base para o espaço das linhas consiste nos vectores $(1,1,1,1)$ e $(1,-1,0,-1)$. As matrizes que possuem estes vectores de coordenadas são as matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Que, portanto, constituem uma base do subespaço indicado.

Matriz de mudança de base

Problema: Se $\boldsymbol{\beta}_1$ e $\boldsymbol{\beta}_2$ são bases ordenadas de V, e se $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}_1}$ é conhecido, como obter de modo efectivo $\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}_2}$?

A matriz de mudança da base ordenada $\boldsymbol{\beta}_1 = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ para base ordenada $\boldsymbol{\beta}_2 = (\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_n)$ é a **única** matriz A que possui a seguinte propriedade:

$$A\mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}_1} = \mathrm{x}_{\boldsymbol{\beta}_2}$$

Esta matriz denota-se por $[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1]$ e **as suas colunas são os vectores de coordenadas dos vectores da base $\boldsymbol{\beta}_1$ na base $\boldsymbol{\beta}_2$** i.e. $(\mathrm{u}_1)_{\boldsymbol{\beta}_2}, \ldots, (\mathrm{u}_n)_{\boldsymbol{\beta}_2}$

A matriz de mudança da base $\boldsymbol{\beta}_1$ para a base $\boldsymbol{\beta}_2$ denota-se $[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1]$.

Matriz de mudança de base

Ou seja, se $\boldsymbol{\beta}_1 = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ então,

$$[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1] = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathrm{u}_1)_{\boldsymbol{\beta}_2} & (\mathrm{u}_2)_{\boldsymbol{\beta}_2} & \cdots & (\mathrm{u}_n)_{\boldsymbol{\beta}_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

Propriedades das matrizes de mudança de base

$$[\beta_1, \beta_2] = [\beta_2, \beta_1]^{-1}$$

$$[\beta_3, \beta_1] = [\beta_3, \beta_2][\beta_2, \beta_1]$$

Exemplo

Em $\mathbb{R}^2$ considerem-se as bases ordenadas $\boldsymbol{\beta}_1 = ((1,1),(1,-1))$ e $\boldsymbol{\beta}_2 = ((1,1),(2,3))$.

1) Quais as coordenadas de (x, y) na base $\boldsymbol{\beta}_1$.

2) Determinar $[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1]$.

3) Quais as coordenadas de (x, y) na base $\boldsymbol{\beta}_2$.

1) Para determinar as coordenadas de (x, y) na base $((1,1),(1,-1))$ temos que resolver o sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \end{array}\right] \cdots\cdots\cdots\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (x+y)/2 \\ 0 & 1 & (x-y)/2 \end{array}\right]$$

ou seja:

$$(x, y)_{\beta_1} = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

2) Para determinar $[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1]$ podemos recorrer directamente à definição, **sabendo que as colunas desta matriz são** $(1,1)_{\beta_2}$ **e** $(1,-1)_{\beta_2}$. *Preferimos ilustrar uma outra possibilidade*: denotando por $\boldsymbol{\beta}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$ ou seja, a base ordenada ((1,0), (0,1)), obtém-se imediatamente:

$$[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

pelo que:

$$[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1] = [\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_c][\boldsymbol{\beta}_c,{}_1] = [\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}_2]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_c, \boldsymbol{\beta}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3) Para $(x, y)_{\boldsymbol{\beta}_2}$ usamos a matriz de mudança de base:

$$(x, y)_{\boldsymbol{\beta}_2} = [\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1](x, y)_{\boldsymbol{\beta}_1} \text{ ou seja, } (x, y)_{\boldsymbol{\beta}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x+y)/2 \\ (x-y)/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

Exemplo

Em $\mathbb{K}_2[t]$, considere-se a base $\boldsymbol{\beta} = (1, 1+t, 1+t^2)$. Qual o vector de coordenadas de $2 - t - 3t^2$ na base B.

Por definição tem-se que $(2 - t - 3t^2)_{\boldsymbol{\beta}} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ se e só se

$$2 - t - 3t^2 = \xi_1 \cdot 1 + \xi_2(1+t) + \xi_3(1+t^2)$$

A igualdade acima é equivalente a: $2 - t - 3t^2 = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \xi_2 t + \xi_3 t^2$

ou seja, a: $\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 2 \\ \xi_2 = -1 \\ \xi_3 = -3 \end{cases}$ i.e., $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (6, -1, -3)$

Exemplo

No espaço $\mathbb{R}^{2\times 2}$ considere a base ordenada $\boldsymbol{\beta}$ onde,

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Determine $(1,0,2,-1)^{\beta}$.

Por definição:

$$(1,0,2,-1)^{\beta} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Determinar uma base e a dimensão de $W = L_{\mathbb{K}_3[t]}(1 + t, 1 + t^2, 2 + t + t^2, -1 - 2t + t^2)$.

Considerando a base canónica de $\mathbb{K}_3[t]$ que é a base ordenada $\boldsymbol{\beta} = (t^0, t^1, t^2, t^3)$. Podemos resolver o problema através dos vectores de coordenadas. Tem-se que:

$$W_{\boldsymbol{\beta}} = L_{\mathbb{R}^4}(((1,1,0,0), (1,0,1,0), (2,1,1,0), (-1, -2,1,0))$$

E uma base para este espaço pode obter-se pelo método de eliminação de Gauss. Considerando aqueles vectores como linhas de uma matriz temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, os vectores $(1,1,0,0), (0, -1,1,0)$ são uma base de W_{β}.

Tem-se então que:

$$W = (W_{\beta})^{\beta} = L_{\mathbb{R}_3[t]}((1,1,0,0)^{\beta}, (0, -1,1,0)^{\beta}) =$$
$$= L_{\mathbb{R}_3[t]}(1 + t, -t + t^2)$$

e $\{1 + t, -t + t^2\}$ é uma base de W que, assim, tem dimensão 2.