Álgebra Linear

Primeiro semestre

2020–2021

Aula 12

Transformações lineares (definição)

Definição.—*Se U e V são espaços lineares sobre $\mathbb{K}$ então, uma função $T : U \to V$ é uma* ***transformação linear*** *se, para quaisquer $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in U$ e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tem:*

$$T(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}) = \alpha T(\mathrm{x}) + \beta T(\mathrm{y})$$

ou, em alternativa se:

$$T(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = T(\mathrm{x}) + T(\mathrm{y}), \textit{ para quaisquer } \mathrm{x}, \mathrm{y} \in U \textit{ e,}$$

$$T(\alpha \mathrm{x}) = \alpha T(\mathrm{x}), \textit{ para quaisquer } \alpha \in \mathbb{K} \textit{ e } x \in U$$

O conjunto das transformações lineares de U em V denota-se $\mathrm{Hom}(U, V)$.

(A notação justifica-se porque uma transformação linear de U em V também se designa de **homomorfismo de U em V**.)

Transformações lineares (primeiros exemplos)

A **transformação nula**, $\mathbb{0} : U \to V$, que transforma qualquer vector $\mathrm{x} \in U$ em $\mathbb{0}_V$ (o vector nulo de V) é linear:

A **transformação identidade**, $\mathbb{I} : U \to U$, definida por $\mathbb{I}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$, para todo o $\mathrm{x} \in V$ é linear.

Seja $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. A transformação $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por $T_A(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$ é uma transformação linear.

Veremos que qualquer transformação linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ é essencialmente desta forma e, como qualquer espaço linear é essencialmente um $\mathbb{K}^n$ (via coordenadas), **toda a transformação linear é essencialmente desta forma**.

Transformações lineares (propriedades básicas)

Se $T : U \to V$ é linear então $T(\mathbb{0}_U) = \mathbb{0}_V$.

Se T é linear então
$T(\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{x}_n) = \alpha_1 T(\mathrm{x}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathrm{x}_n)$.

Se $T : U \to V$ é linear então T transforma conjuntos linearmente dependentes em conjuntos linearmente dependentes i.e. se $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset U$ é linearmente dependente então $\{T(\mathrm{x}_1), \ldots, T(\mathrm{x}_n)\}$ é linearmente dependente.

Nesta afirmação **não se pode substituir linearmente dependente por linearmente independente**.

Problema 4.1.— Diga, justificando, quais das seguintes funções são lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$;

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$;

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2x_3, 3x_2^2, x_1 - 4x_3)$;

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$;

(f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + rx_2)$.

Problema 4.2.— Considere os vectores v_1, v_2 e v_3 de um espaço linear U e seja $T : U \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que satisfaz:

$$T(v_1) = (1, -1, 2); \quad T(v_2) = (0, 3, 2); \quad T(v_3) = (-3, 1, 2).$$

Determine $T(3v_1 - v_2 + 10v_3)$.

Núcleo de uma transformação linear e injectividade

Definição.—*Seja $T : U \to V$ linear. Dizemos que T é* ***injectiva*** *se, para quaisquer $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in U$ se tem que $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ implica $T(\mathrm{x}) \neq T(\mathrm{y})$. Uma transformação linear injectiva também se diz um* ***monomorfismo****.*

Definição.—*Seja $T : U \to V$ é linear. O* ***núcleo de T*** *consiste nos vectores $\mathrm{x} \in U$ tais que $T(\mathrm{x}) = \mathbb{0}$. Denota-se $\mathrm{Nuc}(T)$.*

Núcleo de uma transformação linear e injectividade

Teorema.—*Seja* $T : U \to V$ *uma transformação linear. Tem-se que* $\mathrm{Nuc}(T)$ *é um subespaço de* U.

Teorema.—*Seja* $T : U \to V$ *é linear.* T *é injectiva se e só se* $\mathrm{Nuc}(T) = \{\mathbb{O}\}$, *ou seja, se e só se o núcleo de* T *se reduz ao vector nulo de* U *i.e.,* $\dim(\mathrm{Nuc}(T)) = 0$.

Exemplo

Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Será a transformação $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ injectiva?

Tem-se que $\mathrm{Nuc}(T_A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid T_A(x) = \mathbb{O}\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = \mathbb{O}\} = \mathrm{Nuc}(A)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como a matriz tem característica 2, o núcleo tem dimensão 1 logo T_A não pode ser injectiva. Além disso:

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}(T_A) &= \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0 \wedge 3y + z = 0\} = \{(2y, y, -3y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= L_{\mathbb{R}^3}(\{(2,1,-3)\}) \end{aligned}$$

Imagem de uma transformação linear e sobrejectividade

Definição.—*Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. T é* ***sobrejectiva*** *se, para todo o $\mathrm{y} \in V$ existe $\mathrm{x} \in U$ tal que $T(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$. Uma transformação linear sobrejectiva também se designa de* ***epimorfismo****.*

Dado um subconjunto $X \subset U$ define-se $T(X) := \{T(\mathrm{x}) \mid \mathrm{x} \in X\}$. Assim, tem-se que T é sobrejectiva sse $T(U) = V$. O conjunto $T(U)$ também se designa de ***imagem de*** *T e se denota por $\mathrm{Im}(T)$.*

Teorema.—*Se $T : U \to V$ é linear e $W \leqslant U$ então $T(W) \leqslant V$.*

Corolário.—*Se $T : U \to V$ é linear então T é sobrejectiva sse $\dim(\mathrm{Im}(U)) = \dim(V)$.*

Imagem inversa de um subespaço

Definição.—*Seja* $T : U \to V$ *uma transformação linear. Dado um subconjunto* $X \subset V$ *define-se* $T^{-1}(X) := \{\mathrm{x} \mid T(\mathrm{x}) \in X\}$. *(Por exemplo,* $\mathrm{Nuc}(T) = T^{-1}(\{\mathbb{O}\})$.*)*

$T^{-1}(X)$ *designa-se de* ***imagem inversa de*** X ***através de*** T.

Teorema.—*Seja* $T : U \to V$ *uma transformação linear. Dado um subespaço* $W \leqslant V$ *tem-se que* $T^{-1}(W) \leqslant U$.

Como $T(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$ tem-se que $\mathbb{O} \in T^{-1}(W)$.

Se $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in T^{-1}(W)$ então $T(\mathrm{u}) = \mathrm{x}$ e $T(\mathrm{w}) = \mathrm{y}$, neste caso

$$T(\alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{w}) = \alpha T(\mathrm{u}) + \beta T(\mathrm{w}) = \alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}$$

assim $\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y} \in T^{-1}(W)$.

Observação

Seja $T : U \to V$, linear.

$\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq \dim(U)$

Se $\dim(V) > \dim(U)$ a transformação T não pode ser sobrejectiva.

$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(U)$ sse T é injectiva.

T é injectiva sse **transforma conjuntos linearmente independentes** em **conjuntos linearmente independentes**.

Porque $\mathrm{Im}(T) = L_V(T(\boldsymbol{\beta}))$, onde $\boldsymbol{\beta}$ é uma base de U.

T é sobrejectiva se e só se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V)$.

Uma transformação linear fica determinada pelas imagens dos vectores de uma base do espaço de partida

Teorema.—*Consideremos dois espaços lineares, U e V, sobre $\mathbb{K}$. Seja $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k)$ uma base de U. Se $f : \{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k\} \to V$ é uma função, então, existe uma única transformação linear $T_f : U \to V$ tal que, para cada $1 \leq i \leq k$ se tem $T_f(\mathrm{u}_i) = f(\mathrm{u}_i)$. Além disso, T_f é definida por:*

$$T_f(\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \alpha_k \mathrm{u}_k) = \alpha_1 f(\mathrm{u}_1) + \cdots + \alpha_k f(\mathrm{u}_k).$$

Reciprocamente, se $T : U \to V$ é linear então $T = T_{f_T}$ onde $f_T : \{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k\} \to V$ é a função definida por $f_T(\mathrm{u}_i) = T(\mathrm{u}_i)$, onde $1 \leq i \leq k$.

Exemplo

Determinar a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz $T(1,1) = (0,0,1)$ e $T(1,-1) = (1,1,2)$.

Temos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -x+y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & (x+y)/2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (x-y)/2 \\ 0 & 1 & (x+y)/2 \end{array}\right]$$

Assim,

$$T(x,y) = T\left(\frac{x-y}{2}(1,1) + \frac{x+y}{2}(1,-1)\right) = \frac{x-y}{2}(0,0,1) + \frac{x+y}{2}(1,1,2) = \frac{1}{2}(x+y, x+y, 3x+y)$$

Problema 4.8.— Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(1,1,0) = (2,1), \quad T(0,1,1) = (3,-1), \quad T(0,0,1) = (2,-1).$$

Escolha a opção correcta:

A) $T(x,y,z) = (x+y, x+z)$

B) $T(x,y,z) = (y-x, x+2z)$

C) $T(x,y,z) = (2z+x+y, x-z)$

D) $T(x,y,z) = (2x, x+z)$

Relação entre as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação linear

Teorema.—*Sejam $T : U \to V$, linear. Nestas condições,*

$$\dim \operatorname{Nuc}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim U$$

Problema 4.9.— Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (x - 2y + z, 4x + 2y - z, -6y + 3z).$$

(a) Determine o núcleo e a imagem de T.

(b) Indique um vector de $\mathbb{R}^3$ que não pertença à imagem de T.

(c) Verifique o teorema da dimensão.

Isomorfismos

Definição.—*Uma transformação linear $T : U \to V$ diz-se um* **isomorfismo** *se for bijectiva.*

Se T é um **isomorfismo** então $\dim(U) = \dim(V)$.

Se $T : U \to V$ é um **isomorfismo** então, os vectores $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n \in U$ satisfazem uma propriedade $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ (envolvendo noções de álgebra linear) em U se e só se $T(\mathrm{u}_1), \ldots, T(\mathrm{u}_n)$ satisfazem $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ em V. Por exemplo:

$$\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\} \subset U \text{ é lin. indep. sse } \{T(\mathrm{u}_1), \ldots, T(\mathrm{u}_n)\} \subset V \text{ é lin. indep.}$$

$$\mathrm{x} \in L_U(\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\}) \text{ sse } T(\mathrm{x}) \in L_V(\{T(\mathrm{u}_1), \ldots, T(\mathrm{u}_n)\})$$

Isomorfismos (exemplos)

Sejam U um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $B = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ é uma base ordenada de U.

A transformação $(\ )_B : U \to \mathbb{K}^n$ que transforma cada $\mathrm{x} \in U$ no seu vector de coordenadas, x_B, na base B, **é um isomorfismo**.

É **linear**: $(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y})_B = \alpha \mathrm{x}_B + \beta \mathrm{y}_B$.

É **injectiva**: *dada a unicidade de representação numa base, vectores diferentes possuem coordenadas diferentes.*

É **sobrejectiva**: dado $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ tem-se
$(\xi_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \xi_n \mathrm{u}_n)_B = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

Do mesmo modo, a transformação $(\ )^B : \mathbb{K}^n \to U$ que transforma cada $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ no vector $(\xi_1, \ldots, \xi_n)^B \in U$ que tem aquele n-úplo como vector de coordenadas **é um isomorfismo**.

Isomorfismos (exemplos)

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Em que condições $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo?

É **injectiva** sse $\dim(\mathrm{Nuc}(T_A)) = \dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 0$ sse $\mathrm{car}(A) = n$.

Neste caso a nulidade é zero, pelo que $\dim(\mathrm{EC}(A)) = n$ e, como se tem $\mathrm{EC}(A) = \mathrm{Im}(T_A)$ conclui-se que $\mathrm{Im}(T_A) = \mathbb{R}^n$, ou seja, T_A é sobrejectiva.

Resumindo: T_A é um isomorfismo sse A é invertível.

Operações envolvendo transformações elementares

Sejam $S, T \in \text{Hom}(U, V)$. A transformação $S + T : U \to V$ é definida por:

$$(S + T)(\text{x}) := S(\text{x}) + T(\text{x})$$

Sejam, $S \in \text{Hom}(U, V)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. A transformação $\alpha T : U \to V$ é definida por:

$$(\alpha T)(\text{x}) = \alpha T(\text{x})$$

É simples verificar que $S + T$ e αT são transformações lineares.

Operações envolvendo transformações lineares

Sejam $S \in \mathrm{Hom}(U, V)$ e $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. A composição $T \circ S : U \to W$ define-se:

$$(T \circ S)(\mathrm{x}) = T(S(\mathrm{x}))$$

No contexto dos espaços lineares, em lugar de escrevermos $T \circ S$ escrevemos simplesmente TS.

A composição $TS : U \to W$ **é uma transformação linear**.

$$\begin{aligned} TS(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}) &= T(S(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y})) = T(\alpha S(\mathrm{x}) + \beta S(\mathrm{y})) = \\ &= \alpha T(S(\mathrm{x})) + \beta T(S(\mathrm{y})) = \alpha (TS)(\mathrm{x}) + \beta (TS)(\mathrm{y}) \end{aligned}$$

Operações envolvendo transformações lineares

Sejam U e V espaços com a mesma dimensão e $T : U \to V$ bijectiva. Enquanto função, T tem uma inversa (**única**) que é a função $T^{-1} : V \to U$, definida pelas identidades:

$$T^{-1}T(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \qquad (\mathrm{x} \in U) \qquad\qquad TT^{-1}(\mathrm{y}) = \mathrm{y} \qquad (\mathrm{y} \in V)$$

Teorema.—*Sejam U e V espaços com a mesma dimensão e $T : U \to V$ bijectiva.* ***A inversa de T é uma transformação linear $T^{-1} : V \to U$.***

$$T^{-1}(\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{w}) = T^{-1}(\alpha T(\mathrm{x}) + \beta T(\mathrm{y})) = T^{-1}(T(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y})) = \alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y} =$$
$$= \alpha T^{-1}(\mathrm{u}) + \beta T^{-1}(\mathrm{w})$$

$\mathrm{u} = T(\mathrm{x}),\ \mathrm{w} = T(\mathrm{y})$

Exemplos

Sejam $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ as transformações lineares definidas por:

$$S(x,y) := (x, x+y, x-y) \qquad\qquad T(x,y) := (x,x,y)$$

Determinar $(2S - T)(x,y)$.

$$\begin{aligned}(2S-T)(x,y) &= 2S(x,y) - T(x,y) = 2(x, x+y, x-y) - (x,x,y) = \\ &= (2x, 2x+2y, 2x-2y) + (-x, -x, -y) = \\ &= (x, x+2y, 2x-3y)\end{aligned}$$

Tem-se então que:

$$(2S-T)(x,y) = (x, x+2y, 2x-3y)$$

Sejam $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definidas por:

$$S(x, y, z) = (2x - y, x + y) \qquad T(x, y) = (x, 2y, 0, x - y)$$

Caracterize a transformação linear TS.

Tem-se que
$TS : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "S"] \arrow[rr, bend right, "TS"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "T"] & \mathbb{R}^4
\end{tikzcd}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
TS(x, y, z) &= T(S(x, y, z)) = T(2x - y, x + y) = \\
&= (2x - y, 2(x + y), 0, 2x - y - (x + y)) = \\
&= (2x - y, 2x + 2y, 0, x - 2y)
\end{aligned}$$