Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 17

Exemplo 1

Consideremos o operador $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ definido por $T(p(t)) = p(t) + (t+1)p'(t)$. Fixando a base canónica de $\mathbb{R}_2[t]$ tem-se que $T(1) = 1$, $T(t) = 1 + 2t$ e $T(t^2) = 2t + 3t^2$. Assim, a representação matricial de T relativamente à base canónica é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

tem-se assim que $c_T(t) = c_A(t) = \det(A - t\mathbb{I}) = -(t-1)(t-2)(t-3)$. Assim

$$\Lambda(T) = \Lambda(A) = \{1,2,3\}.$$

Espaços próprios de operadores e matrizes

Teorema.—Se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ e λ é um valor próprio de A então, o espaço próprio da matriz A associada a λ, $E_A(\lambda)$, é dado por $E_A(\lambda) = \mathrm{Nuc}(A - \lambda\mathbb{I})$.

Se $T : V \to V$ é um operador em V e $\boldsymbol{\beta}$ é uma base de V então, para qualquer valor próprio de T, digamos λ, o respectivo espaço próprio determina-se a partir de $E_A(\lambda)$ onde $A = [T]_{\boldsymbol{\beta}}$ de acordo com o seguinte:

$$E_T(\lambda) = E_A(\lambda)^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Em particular se $E_A(\lambda) = L_{\mathbb{K}^n}(\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k\})$ então $E_T(\lambda) = L_V(\{\mathrm{v}_1^{\boldsymbol{\beta}}, \ldots, \mathrm{v}_k^{\boldsymbol{\beta}}\})$.

Continuação do exemplo 1

Para calcularmos $E_T(1)$, $E_T(2)$ e $E_T(3)$ procedemos do seguinte modo:

$$E_A(1) = \mathrm{Nuc}(A - \mathbb{I}) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0)\})$$

assim, $E_T(1) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0)\})^\beta = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{(1,0,0)^\beta\}) = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1\})$.

$$E_A(2) = \mathrm{Nuc}(A - 2\mathbb{I}) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0)\})$$

assim, $E_T(2) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0)\})^\beta = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{(1,1,0)^\beta\}) = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1 + t\})$.

Continuação do exemplo 1

Finalmente, no caso de $E_T(3)$,:

$$E_A(3) = \mathrm{Nuc}(A - 3\mathbb{I}) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,2,1)\})$$

assim, $E_T(3) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,2,1)\})^\beta = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{(1,2,1)^\beta\}) = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1 + 2t + t^2\})$.

Como se constata sem dificuldade a união $\{(1,0,0)\} \cup \{(1,1,0)\} \cup \{(1,2,1)\}$ das bases dos diferentes espaços próprios de A é linearmente independente (como veremos este é um facto geral. Usando coordenadas, constatamos que $\{1, 1 + t, 1 + 2t + t^2\}$ é uma bse de $\mathbb{R}_2[t]$ que consiste de vectores próprios de T.

Raízes de polinómios—factorização

Definição.—*Um polinómio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ diz-se **irredutível sobre** $\mathbb{K}$ quando não existem polinómios $q(t), s(t) \in \mathbb{K}[t]$ tais que $\mathrm{gr}(q(t)), \mathrm{gr}(s(t)) \geq 1$ e $p(t) = q(t)s(t)$.*

Teorema [da factorização irredutível].—*Dado um qualquer polinómio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ existem $p_1(t), \ldots, p_k(t) \in \mathbb{K}[t]$, irredutíveis sobre $\mathbb{K}$ tais que $p(t) = p_1(t) \cdots p_k(t)$.*

Raízes de polinómios—factorização

Teorema [fundamental da álgebra].—*Dado um polinómio* $p(t) \in \mathbb{C}[t]$*, se* $\mathrm{gr}(p(t)) = n$ *então,* $p(t)$ *possui* n *raízes complexas. Como consequência deste facto os únicos polinómios irredutíveis em* $\mathbb{C}[t]$ *são da forma* $\alpha t + \beta$*.*

Corolário [do teorema fundamental da álgebra].—*Dado um polinómio* $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ *de grau* n*, existem* $a, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ *tais que:*

$$p(t) = a(t - \xi_1)\cdots(t - \xi_n).$$

Raízes de polinómios—factorização

Teorema—*Os polinómios $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ que são irredutíveis, ou são lineares, ou de grau 2 sem raízes reais. Como consequência deste facto, qualquer polinómio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ admite uma decomposição da forma $p(t) = ap_1(t)\cdots p_k(t)$, onde se tem $p_i(t) = (t - \xi_i)$ ou $p_i(t) = \alpha_i + \beta_i t + t^2$ (sem raízes reais), para $1 \leq i \leq k$.*

Se um polinómio se encontrar decomposto num produto de factores irredutíveis as suas raízes calculam-se facilmente: ***pela lei do anulamento do produto são as raízes de cada um desses factores irredutíveis.***

Não obstante, encontrar a decomposição de um polinómio em factores irredutíveis pode ser uma tarefe muito complicada.

Multiplicidade algébrica de um valor próprio

De acordo com as considerações precedentes, o polinómio característico de um operador pode ser decomposto em factores irredutíveis na forma:

$$c_T(t) = (-1)^n(t - \xi_1)^{s_1}\cdots(t - \xi_k)^{s_k}(p_{k+1}(t))^{s_{k+1}}\cdots(p_m(t))^{s_n}$$

onde os ξ_i são todos distintos e $p_{k+1}(t), \ldots, p_m(t)$ são polinómios de graus dois, sem raízes, isto no caso real e, no caso complexo, na forma:

$$c_T(t) = (-1)^n(t - \xi_1)^{s_1}\cdots(t - \xi_k)^{s_k}$$

onde os ξ_i são todos distintos no vaso complexo.

Os valores próprios são então $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$. A **multiplicidade algébrica de ξ_i** é o expoente s_i, para $1 \leq i \leq k$ e denota-se por $\mathrm{m}_{\mathrm{alg}}(\xi_i)$.

Exemplo 2

Consideremos,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

o respectivo polinómio característico é $c_A(t) = -(t-3)^2(t-4)$. Assim, a $\Lambda(A) = \{3,4\}$. Além disso, $\mathrm{m_{alg}}(3) = 2$ e $\mathrm{m_{alg}}(4) = 1$.

Polinómio característico (um caso particular)

Deve ter-se em conta, no processo de cálculo do polinómio característico, que **quanto mais cedo se forem colocando factores em evidência, mais fácil será obter a decomposição irredutível final**.

O seguinte resultado é útil neste contexto. Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ uma matriz do tipo

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & * & * & * \\ \mathbb{0} & \boxed{A_2} & * & * \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \boxed{A_3} & * \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \boxed{A_k} \end{bmatrix}$$

Em que os blocos A_i são matrizes quadradas. Designaremos uma matriz deste tipo de **triangular superior por blocos**.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ * & \boxed{A_2} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ * & * & \boxed{A_3} & \mathbb{0} \\ * & * & * & \boxed{A_k} \end{bmatrix}$$

Em que os blocos A_i são matrizes quadradas. Designaremos uma matriz deste tipo de **triangular inferior por blocos**.

Polinómio característico (um caso particular)

Seja $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ uma matriz é triangular superior ou inferior por blocos, usando os blocos $A_1, \ldots, A_k$. Neste caso,

$$c_A(t) = c_{A_1}(t) c_{A_2}(t) \cdots c_{A_k}(t)$$

Exemplo 3

Determine $c_A(t)$ onde A é a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3 (cont.)

Designando por $A_1 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ e $A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ os blocos assinalados abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Tem-se que $c_A(t) = c_{A_1}(t)c_{A_2}(t)$, porque A é triangular inferior por blocos.

Exemplo 3 (cont.)

Por outro lado e relativamente a $A_1 \in \mathbb{R}^{4\times4}$ e denotando por $A_{1,1}$ e $A_{1,2}$ os blocos assinalados abaixo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tem-se que $c_{A_1}(t) = c_{A_{1,1}}(t)c_{A_{1,2}}(t)$, porque A é triangular inferior por blocos, usando os blocos $A_{1,1}$ e $A_{1,2}$.

Exemplo 3 (cont.)

Reunindo toda esta informação temos:

$$c_A(t) = c_{A_{1,1}}(t)c_{A_{1,2}}(t)c_{A_2}(t)$$

ou seja,

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ -1 & 2-t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1-t & 1 & 2 \\ 0 & 2-t & 3 \\ 0 & 0 & 4-t \end{vmatrix} =$$

$$= (-t(1-t)+1)((2-t)^2+1)(-1-t)(2-t)(4-t) =$$

$$= -(t^2-t+1)(t^2-4t^2+5)(t+1)(t-2)(t-4)$$

Existência de uma base de vectores próprios

Teorema.—*Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são vaores próprios distintos de um operador T (ou de uma matriz A) e se $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r$ são bases dos espaços próprios $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_r)$, respectivamente, então*

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{\beta}_r$$

é um conjunto linearmente independente de vectores. Assim, se $\boldsymbol{\beta}$ possui a quantidade suficiente de vectores (igual à dimensão do espaço) então $\boldsymbol{\beta}$ é uma base e o operador (ou a matriz) é diagonalizável. Caso contrário, não é.

Teorema.—*Se λ é um valor próprio de um operador (ou de uma matriz) então*

$$1 \leq \mathrm{m}_{\mathrm{geo}}(\lambda) \leq \mathrm{m}_{\mathrm{alg}}(\lambda).$$

Existência de uma base de vectores próprios

Teorema.—*Se T é um operador em V, com* $\dim(V) = n$ *(ou se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$) e $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ então,* $\mathrm{m}_{\mathrm{geo}}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{m}_{\mathrm{geo}}(\lambda_k) \leq \mathrm{m}_{\mathrm{alg}}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{m}_{\mathrm{alg}}(\lambda_k) \leq n$*, onde Λ denota indistintamente* $\Lambda(T)$ *ou* $\Lambda(A)$*. Tem-se então que existe uma base de vectores próprios se e só se* $\mathrm{m}_{\mathrm{geo}}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{m}_{\mathrm{geo}}(\lambda_k) = n$*. Assim, se* $\mathrm{m}_{\mathrm{alg}}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{m}_{\mathrm{alg}}(\lambda_k) < n$ *então T (ou A) não é diagonalizável. Em particular, se para algum $\lambda \in \Lambda$ se tem* $\mathrm{m}_{\mathrm{geo}}(\lambda) < \mathrm{m}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$ *então T (ou A) não é diagonalizável.*