Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 18

Em geral o polinómio característico não permite responder ***imediatamente*** *ao problema de saber se um operador ou uma matriz são diagonalizáveis.*

Iremos descrever um outro polinómio—o ***polinómio mínimo****—que permite responder directamente a esta questão.*

O polinómio mínimo de uma matriz

Definição.—*Um polinómio $p \in \mathbb{K}[t]$ diz-se mónico se o coeficiente do termo de maior grau é* 1.

Proposição e definição.— *Se T é um operador em V (resp. $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$) então, existe um* ***polinómio mónico de grau mínimo****, $p \in \mathbb{K}[t]$,* ***tal que*** *$p(T) = \mathbb{O}$ (resp. $p(A) = \mathbb{O}$). Este polinómio* ***é único****, designa-se de* ***polinómio mínimo*** *de T (resp. de A) e denota-se por $m_T(t)$ (resp. $m_A(t)$).*

Corolário.—*Nestas condições, se $p \in \mathbb{K}[t]$ é tal que $p(T) = \mathbb{O}$ (resp. $p(A) = \mathbb{O}$) então o polinómio mínimo divide $p(t)$ i.e., existe $q \in \mathbb{K}[t]$ tal que $p(t) = q(t) \cdot m_T(t)$ (resp. $p(t) = q(t) \cdot m_A(t)$).*

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema.—*Seja T um operador em V (*resp. *$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$). Tem-se que $c_T(T) = \mathbb{O}$ (*resp. *$c_A(A) = \mathbb{O}$).*

Corolário.—*Seja T um operador em V (*resp. *$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$). Tem-se que $m_T(t)$ divide $c_T(t)$ (*resp. *$m_A(t)$ divide $c_A(t)$).*

Teorema.—*Seja T um operador em V com* $\dim(V) = n$ *(*resp. *$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$). Tem-se que $c_T(t)$ divide $(m_T(t))^n$ (*resp. *$c_A(t)$ divide $(m_A(t))^n$).*

Teorema.—*Seja T um operador em V com* $\dim(V) = n$ *(*resp. *$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$). O polinómio mínimo e o polinómio característico partilham exactamente os mesmos factores irredutíveis (mas podem ter multiplicidades diferentes num e noutro polinómio.*

Exemplo 4

Considerando, por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se que $c_A(t) = (t-1)^2$. Assim, existem duas hipóteses para $m_A(t)$: ou é igual a $t-1$ ou a $(t-1)^2$. Substituindo $t = A$ no primeiro tem-se $A - \mathbb{I} \neq \mathbb{O}$, assim $m_A(t) = (t-1)^2$.

Exemplo 5

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Mostre que 5 é valor próprio. Determine $c_A(t)$ e $m_A(t)$

Podemos começar por determinar $c_A(t)$ e verificar depois que 5 é raiz daquele polinómio. Assim:

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 2 \\ 2 & 1-t & 2 \\ 2 & 2 & 1-t \end{vmatrix} = 5 + 9t + 3t^2 - t^3$$

Exemplo 5 (cont.)

Simples cálculos mostram que $c_A(5) = 0$, pelo que 5 é valor próprio de A.

Podemos agora recorrer à regra de Ruffini para factorizar $c_A(t)$. Sabemos que $c_A(t) = (t - 5)q(t)$ e aquela regra permite-nos determinar $q(t)$:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & t^3 & t^2 & t & 1 \\
 & -1 & 3 & 9 & 5 \\
5 & & -5 & -10 & -5 \\
\hline
 & -1 & -2 & -1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Concluindo-se que $c_A(t) = -(t-5)(t^2 + 2t + 1) = -(t-5)(t+1)^2$

Exemplo 5 (cont.)

Como $c_A(t) = -(t-5)(t^2+2t+1) = -(t-5)(t+1)^2$, e $m_A(t)$ divide $c_A(t)$, tem-se que $m_A(t)$ só pode ser um produto de factores irredutíveis que ocorrem na decomposição de $c_A(t)$, assim, as possibilidades para $m_A(t)$ são:

$$p(t) = (t-5)(t+1)$$

$$q(t) = (t-5)(t+1)^2$$

Destes, o de menor grau que anula A será o polinómio mínimo.

Exemplo 5 (cont.)

Fazendo as contas:

$$p(A) = (A - 5\mathbb{1})(A + \mathbb{1}) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathbb{0}$$

Pelo que $m_A(t) = (t - 5)(t + 1)$.

Polinómio mínimo e diagonalização

Teorema.—*Um operador T em V* (resp. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$) *é diagonalizável se e só se $m_T(t)$* (resp. $m_A(t)$) *é da forma:*

$$(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\cdots(t - \lambda_s)$$

onde os λ_i ***são todos distintos.***

Exemplo

Considerando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se que $c_A(t) = -(t-1)^3$. Temos três possibilidades para $m_A(t)$:

$$m_A(t) = (t-1) \vee m_A(t) = (t-1)^2 \vee m_A(t) = (t-1)^3\,.$$

Por outro lado,

$$A - \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}$$

Exemplo

e,

$$(A - \mathbb{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \mathbb{O}$$

concluímos assim que $m_A(t) = (t-1)^2$ e que A **não é diagonalizável.**

Problema 6.13.— Sem efectuar quaisquer cálculos, determine um valor próprio e dois vetores próprios linearmente independentes para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Problema 6.17.— Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que os valores próprios de A são $-1, 0$ e 1. Considere as seguintes afirmações, em que $\mathbb{1}$ representa a matriz identidade de ordem 3:

I. A é invertível;

II. O espaço das colunas de A tem dimensão 2;

III. O núcleo de $A - \mathbb{1}$ tem dimensão 1;

IV. $A - \mathbb{1}$ é invertível.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) II; B) II e III; C) I e IV; D) II, III e IV.

Problema 6.18.— Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique que A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$.

(b) Use a alínea anterior para calcular A^{25}, determinando ainda os seus valores próprios e bases para os espaços próprios.