



Álgebra Linear

LEGI::LEE::LERC

Exame 1 [14.02.2022, 13:00]

NOME:

NÚMERO:

CURSO:

ENUNCIADO

1. Classifique as afirmações seguintes como **verdadeiras** ou **falsas**:

- 1.(a) $\{(1, 2, 3), (1, -1, -1), (2, 1, 2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- 1.(b) $(1, 2, 1, 1) \in L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, -1), (1, 0, 1, 0)\})$.
- 1.(c) $L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, -1, 1), (2, 1, 2)\})$ tem dimensão 2.
- 1.(d) $L_{\mathbb{R}^4}(\{1, 1, -1, 0\}, (1, 2, 1, 1)\}) \cap L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, 1, 0), (-1, -1, 1, 1)\})$ tem dimensão nula.

2. No espaço $\mathbb{R}^4$ considere a base ordenada:

$$\beta = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)).$$

Considere ainda a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x, z + w)$.

- 2.(a) Determine $(x, y, z, w)_\beta$ (o vector de coordenadas de (x, y, z, w) na base β).
- 2.(b) Determine $[T]_\beta$ (a matriz que representa T relativamente à base β).
- 2.(c) A transformação T é sobrejectiva? **Justifique!**
- 2.(d) Indique (ou prove que não existe) $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, não-nula, tal que $TS = 0$ (ou seja $TS(x, y) = (0, 0, 0, 0)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 3.(a) Verifique que $(-1, 1, 0)$ é um vector próprio de A e indique o valor próprio a que se encontra associado.
- 3.(b) Sabendo que $c_A(t) = -t^3 + 12t + 16$, mostre que 4 é um valor próprio de A e determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos valores próprios de A .
- 3.(c) Justifique que A é diagonalizável indicando matrizes, D diagonal e Q invertível, tais que $D = Q^{-1}AQ$.
- 3.(d) Exprima a inversa de A como uma combinação linear de potências de A .

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (a) Mostre que $c_A(t) = c_{A^T}(t)$ ou uma matriz e a sua transposta têm o mesmo polinómio característico e conclua que A e A^T têm os mesmos valores próprios.
- (b) Mostre que para qualquer valor próprio, λ , de A (e de A^T) se tem $\dim(E_A(\lambda)) = \dim(E_{A^T}(\lambda))$.



DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Continua no verso →

5. Considere a função que associa a cada par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^2$ um numero real $\langle x, y \rangle$ dada por:

$$\langle x, y \rangle = x^T A y, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que $\langle x, y \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Nas alíneas seguintes supõe-se fixado este produto interno.

- (b) Calcule $\|(1, 0)\|$.
 (c) Seja $W = L_{\mathbb{R}^2}(\{(-1, 1)\})$. Determine $W^\perp$.
 (d) Determine vectores $x, y \in \mathbb{R}^2$ onde $x \in W$ e $y \in W^\perp$, tais que $(2, 1) = x + y$.
6. Considere o espaço $\mathbb{R}_2[t]$ dos polinómios de grau ≤ 2 com coeficientes reais.
- (a) Mostre que $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] : p(0) = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}_2[t]$.
 (b) Determine o polinómio de W que é a melhor aproximação de $1 + t^2$ relativamente ao produto interno em $\mathbb{R}_2[t]$ definido por:

$$\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \rangle := a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Questão	Cotação	Class.
1.(a)	1.0	
1.(b)	1.0	
1.(c)	1.0	
1.(d)	1.0	
2.(a)	1.0	
2.(b)	1.0	
2.(c)	1.0	
2.(d)	1.0	
3.(a)	1.0	
3.(b)	1.0	
3.(c)	1.0	
3.(d)	1.0	
4.(a)	1.0	
4.(b)	1.0	
5.(a)	1.0	
5.(b)	1.0	
5.(c)	1.0	
5.(d)	1.0	
6.(a)	1.0	
6.(b)	1.0	
Total		

Resolução da versão A

1.(a) Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

cujas linhas são os vectores dados. Verificar se os vectores em causa são linearmente independentes (uma condição necessária e suficiente para que constituam uma base) pode ser feito através do método de eliminação de Gauss ou através do cálculo do determinante. Seguindo esta última via tem-se:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ora o facto do determinante ser nulo significa precisamente que as linhas da matriz (ou seja os vectores dados) são linearmente dependentes. A afirmação é assim **falsa**.

1.(b) A afirmação é verdadeira se e só se o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

é possível. Procedendo à eliminação de Gauss obtemos a correspondente matriz em escada de linhas reduzida que é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

constatando-se claramente que o sistema é impossível. Assim, a afirmação é **falsa**.

1.(c) Considerando a matriz, A , cujas colunas são os vectores dados, o espaço em causa é $EC(A)$ cuja dimensão é a característica de A . Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Concluimos assim que $\dim(EC(A)) = \text{car}(A) = 2$. A afirmação é assim **verdadeira**.

1.(d) Em vez de determinar a intersecção dos dois subespaços e a respectiva dimensão, é mais simples calcular essa mesma dimensão indirectamente, calculando a dimensão da soma dos dois subespaços e depois recorrer à fórmula da dimensão:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W),$$

para calcular a dimensão da intersecção. É fácil verificar que os dois subespaços têm dimensão dois (em ambos os casos os vectores geradores são claramente linearmente independentes). A soma é gerada pela união dos dois conjuntos de geradores e pode ser vista como o espaço das linhas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Procedendo à eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concluimos que a dimensão da soma é 4 e assim, a intersecção tem dimensão nula. A afirmação é **verdadeira**.

2.(a) O vector $(x, y, z, w)_\beta$ é a solução do sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & w \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{y+z}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{z-y}{2} \end{array} \right]$$

ou seja,

$$(x, y, z, w)_\beta = \left(x, \frac{y+z}{2}, w, \frac{z-y}{2} \right).$$

2.(b) As colunas de $[T]_\beta$ são os vectores de coordenadas em β das imagens por T dos vectores de β . Tem-se:

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0, 0)_\beta &= (1, 1, 1, 0)_\beta = (1, 1, 0, 0) \\ T(0, 1, 1, 0)_\beta &= (0, 1, 0, 1)_\beta = (0, 1/2, 1, -1/2) \\ T(0, 0, 0, 1)_\beta &= (0, 0, 0, 1)_\beta = (0, 0, 1, 0) \\ T(0, -1, 1, 0)_\beta &= (0, -1, 0, 1)_\beta = (0, -1/2, 1, 1/2) \end{aligned}$$

Assim,

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

2.(c) Uma vez que o espaço de partida e chegada têm a mesma dimensão a transformação é sobrejectiva se e só se é injectiva se e só se $\text{Nuc}([T]_\beta) = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Isto acontece sse a matriz $[T]_\beta$ é máxima ou sse $\det([T]_\beta) \neq 0$. Calculando o determinante conclui-se que é nulo e assim a transformação não é sobrejectiva.

- 2.(d) Como o núcleo de T não é trivial, basta considerar $(0, 0, 0, 0) \neq u \in \text{Nuc}(T)$ e definir S na base canónica de $\mathbb{R}^2$ de acordo com $S(1, 0) = S(0, 1) = u$. Tem-se:

$$\begin{aligned} TS(x, y) &= T(S(x(1, 0) + y(0, 1))) = T((x + y)u) = \\ &= (x + y)T(u) = (x + y)(0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

e, como $u \neq (0, 0, 0, 0)$ a transformação S não é a transformação nula.

- 3.(a) Tem-se que:

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $(-1, 1, 0)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio -2 .

- 3.(b) Tem-se que $c_A(4) = 0$ pelo que 4 é um valor próprio de A . Assim sendo $c_A(t)$ é divisível por $(t - 4)$. Usando a regra de Ruffini conclui-se que

$$c_A(t) = -(t^2 + 4t + 4)(t - 4) = -(t + 2)^2(t + 4)$$

A matriz A tem então os valores próprios -2 e 4 e tem-se $m_{\text{alg}}(-2) = 2$ e $m_{\text{alg}}(4) = 1$.

No caso do valor próprio 4 , tem-se

$$1 \leq m_{\text{geo}}(4) \leq m_{\text{alg}}(4) = 1,$$

pelo que $m_{\text{geo}}(4) = 1$.

No caso do valor próprio -2 tem-se

$$m_{\text{geo}}(-2) = \dim(\text{Nuc}(A + 2\mathbb{1})) = \dim \text{Nuc} \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right) = E_A(-2).$$

Como

$$E_A(-2) = \text{Nuc} \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right) = \text{Nuc} \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}),$$

concluimos que $m_{\text{geo}}(-2) = 2$.

- 3.(c) Como a soma das multiplicidades geométricas é 3, igualando a ordem da matriz, conclui-se que A é diagonalizável. A matriz Q é uma matriz cujas colunas são os vectores de uma base de vectores próprios de $\mathbb{R}^3$. A matriz diagonal, D , tem na diagonal os valores próprios correspondentes às colunas de Q . Para descrever Q precisamos de determinar uma base de $E_A(4)$. Tem-se:

$$E_A(4) = \text{Nuc}(A - 4\mathbb{1}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 1, 1)\}).$$

Tem-se então que:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- 3.(d) Como a matriz é diagonalizável, o polinómio mínimo de A é $m_A(t) = (t + 2)(t - 4)$. Como a matriz A é raiz do seu polinómio mínimo (e também do característico, pelo teorema de Cayley-Hamilton) tem-se que:

$$0 = (A + 2\mathbb{1})(A - 4\mathbb{1}) = A^2 - 2A - 8\mathbb{1}.$$

Ou seja,

$$A^2 - 2A = 8\mathbb{1} \Leftrightarrow (A - 2\mathbb{1})A = 8\mathbb{1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}(A - 2\mathbb{1})\right)A = \mathbb{1}.$$

Ou seja, a matriz

$$\frac{1}{8}(A - 2\mathbb{1})$$

é a inversa de A .

- 4.(a) Temos que,

$$c_A(t) = \det(A - t\mathbb{1}) = \det\left((A - t\mathbb{1})^\top\right) = \det(A^\top - t\mathbb{1}^\top) = \det(A^\top - t\mathbb{1}) = c_{A^\top}(t).$$

- 4.(b) Se λ é um valor próprio de A e de $A^\top$ tem-se:

$$\begin{aligned} m_{\text{geo},A}(\lambda) &= \dim(E_A(\lambda)) = \dim \text{Nuc}(A - \lambda\mathbb{1}) = \text{nul}(A - \lambda\mathbb{1}) = \\ &= \text{nul}(A - \lambda\mathbb{1})^\top = \text{nul}(A^\top - \lambda\mathbb{1}) = \dim E_{A^\top}(\lambda) = m_{\text{geo},A^\top}(\lambda). \end{aligned}$$

- 5.(a) A função indicada é um produto interno se e só se a matriz A for simétrica e tiver todos os seus valores próprios positivos. A simetria é evidente e, $c_A(t) = t^2 - 6t + 1$. Os valores próprios de A (que são as raízes de $c_A(t)$) são $3 + 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2} > 0$.

- 5.(b) Tem-se que

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{5}$$

- 5.(c) Tem-se que,

$$\begin{aligned} W^\perp &= \left\{ (x, y) : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \{(x, y) : -3x - y = 0\} = \\ &= \{(x, y) : y = -3x\} = L_{\mathbb{R}^2}(\{(1, -3)\}). \end{aligned}$$

- 5.(d) Os vectores pretendidos são:

$$x = \text{Proj}_W(2, 1) = \text{Proj}_{(-1, 1)}(2, 1) = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}(-1, 1)$$

e

$$y = (2, 1) - x.$$

- 6.(a) O polinómio nulo (que é o vector nulo do espaço $\mathbb{R}_2[t]$) anula em $t = 0$ (e em qualquer outro valor de t) logo é um elemento de W .

Observe-se agora que os elementos de W , por serem os polinómios de grau ≤ 2 que têm $t = 0$ como raiz são exactamente os polinómios de graus ≤ 2 divisíveis por t , ou seja os polinómios da forma $tp(t)$ onde $p(t)$ tem grau ≤ 1 .

Para vermos que W é fechado para a soma, consideremos $tp(t), tq(t) \in W$ tem-se que

$$tp(t) + tq(t) = t(p(t) + q(t))$$

e como o grau de $p(t) + q(t)$ é ≤ 1 , concluímos que $tp(t) + tq(t) \in W$.

Relativamente à multiplicação por escalar tem-se:

$$\alpha(tp(t)) = t(\alpha p(t)) \in W.$$

Como W é fechado para a adição de vectores e para a multiplicação de um escalar por um vector, é um subespaço de $\mathbb{R}_2[t]$.

- 6.(b) O vector pedido é $\text{Proj}_W(1 + t^2)$. Para calcular esta projecção ortogonal é necessário obter primeiro uma base ortogonal de W . Da alínea precedente sabemos que os elementos de W são da forma $t(\alpha + \beta t)$ ou seja, da forma $\alpha t + \beta t^2$ que são as combinações lineares dos vectores t e t^2 que são linearmente independentes porque são vectores da base canónica de $\mathbb{R}^2[t]$. Ou seja,

$$W = L_{\mathbb{R}^2[t]}(\{t, t^2\}).$$

Tendo em conta o produto interno indicado, o conjunto $\{t, t^2\}$ é uma base ortogonal de W . Desta forma, o vector pretendido é:

$$\text{Proj}_W(1 + t^2) = \frac{\langle 1 + t^2, t \rangle}{\langle t, t \rangle} t + \frac{\langle 1 + t^2, t^2 \rangle}{\langle t^2, t^2 \rangle} t^2 = \frac{0}{1} t + \frac{1}{1} t^2 = t^2.$$