A

Álgebra Linear

LEGI::LEE::LETI

Exame 2 [22.02.2022, 10:30]

NOME:

NÚMERO:

CURSO:

ENUNCIADO

1. Classifique as afirmações seguintes como **verdadeiras** ou **falsas**:

   1.(a) Existe uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém os vectores $(1,0,0,1), (1,0,1,1), (0,0,2,0)$.

   1.(b) $L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,1,1)\}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(1,0,-1)\})$.

   1.(c) $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Nuc}(A^\top)$.

   1.(d) Sendo $U = \{(x,y,z) : x+2y-z=0\}$ e $W = \{(x,y,z) : x-y+z=0\}$ tem-se que $\dim(U \cap W) = 0$.

   1.(e) O conjunto $\{(x,y,z) : |x| = |z|\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

2. Sejam $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, operadores lineares e $\boldsymbol{\beta}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sabendo que,

$$A = [T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = [S]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   2.(a) Justifique que T é bijectiva.

   2.(b) Determine $T^{-1}(x,y,z)$.

   2.(c) Determine $\mathrm{Nuc}(S)$ e conclua que S não é sobrejectiva.

   2.(d) Justifique que $(0,1,1) \in \mathrm{Im}(S)$ e determine $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $S(a,b,c) = (0,1,1)$.

   2.(e) Considere agora a base ordenada $\boldsymbol{\beta}^* = ((1,-1,0),(1,1,0),(0,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule $[ST]_{\beta^*}$.

3. Considere a matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   3.(a) Determine o polinómio característico de A e verifique que 1 é valor próprio de A.

   3.(b) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades, algébricas e geométricas.

   3.(c) Determine uma matriz invertível, Q, e uma matriz diagonal, D, tais que $D = Q^{-1}AQ$.

4. Sejam $S, T : V \to V$ operadores lineares num espaço V. Mostre que são equivalentes:

   (i) $\mathrm{Nuc}(S) \subset \mathrm{Nuc}(T)$;

   (ii) Existe um operador linear $R : V \to V$ tal que $T = RS$.

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Continua no verso →

Reservado ao docente

5. Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canónico e o subespaço $W = \{(x, y, z) : 5x - y + 2z = 0\}$
   (a) Determine uma base ortogonal de W.
   (b) Determine $W^\perp$.
   (c) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vectores da base determinada na alínea anterior.
   (d) Determine o vector de W que se encontra mais próximo do vector $(0, 1, 0)$.
   (e) Determine a distância de $(0, 1, 0)$ a $W^\perp$.

6. Seja A uma matriz $n \times n$ cujas entradas são números inteiros i.e., para $1 \leq i, j \leq n$ tem-se que $A_{i,j} \in \mathbb{Z}$ (escrevemos $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$). Mostre que se $\det(A) = 1$ então $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

Questão	Cotação	Class.
1.(a)	**1.0**	
1.(b)	**1.0**	
1.(c)	**1.0**	
1.(d)	**1.0**	
1.(e)	**1.0**	
2.(a)	**1.0**	
2.(b)	**1.0**	
2.(c)	**1.0**	
2.(d)	**1.0**	
2.(e)	**1.0**	
3.(a)	**1.0**	
3.(b)	**1.0**	
3.(c)	**1.0**	
4.	**1.0**	
5.(a)	**1.0**	
5.(b)	**1.0**	
5.(c)	**1.0**	
5.(d)	**1.0**	
5.(e)	**1.0**	
6.	**1.0**	
	Total	

Resolução da versão A

1.(a) A afirmação é **falsa** porque

$$\operatorname{car}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\right) = 2,$$

ou seja, os vectores dados são linearmente dependentes e nenhum conjunto linearmente dependente pode ser estendido a uma base de um espaço.

1.(b) A igualdade é verdadeira se e só se

$$(1,1,0),(1,0,-1) \in L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,1,1)\})$$

isto porque ops vectores $(1,1,0)$ e $(1,0,-1)$ geram um subespaço de dimensão 2 e se estiverem em $L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,1,1)\})$ que também tem dimensão 2 os dois subespaços são iguais.

Resolvendo o duplo sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Como os dois sistemas são possíveis, tem-se que $(1,1,0),(1,0,-1) \in L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,1,1)\})$ e assim, a afirmação é **verdadeira**.

1.(c) A afirmação é **falsa**, por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

então

$$\operatorname{Nuc}(A) = \{(x,y) : x+y=0\} \neq \{(x,y) : x+2y=0\} = \operatorname{Nuc}(A^\top).$$

1.(d) Tem-se que

$$U = \{(x,y,z) : z = x+2y\} = \{(x,y,x+2y) : x,y \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,1),(0,1,2)\}).$$

e

$$W = \{(x,y,z) : y = x+z\} = \{(x,x+z,z) : x,z \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,1,1)\})$$

Assim,

$$\dim(U+W) = \operatorname{car}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 3$$

Pela fórmula da dimensão, i.e.

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W),$$

concluímos que $\dim(U \cap W) = 1$, pelo que a afirmação é **falsa**.

1.(e) A afirmação é **falsa** já que o conjunto em questão não é fechado para a adição de vectores, e.g. $(1,0,-1),(1,0,1) \in W$ e $(1,0,-1)+(1,0,1) = (2,0,0) \notin W$.

2.(a) Uma transformação é bijectiva se e só se uma qualquer das suas representações matriciais for invertível (de forma equivalente, se qualquer uma das suas representações matriciais for invertível). Neste caso

$$\det[T]_\beta = -2 \neq 0$$

pelo que $[T]_\beta$ é invertível e assim, T é bijectiva.

2.(b) Tem-se que

$$[T^{-1}]_\beta = ([T]_\beta)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que

$$T^{-1}(x, y, z) = T(x, y, z)_\beta = [T^{-1}]_\beta (x, y, z)_\beta = [T^{-1}]_\beta [x\ y\ z]^\top =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(x + z, -x + 2y + z, x - z).$$

2.(c) Uma vez que a dimensão do espaço de partida e do espaço de de chegada é a mesma, S será sobrejectiva se e só se for injectiva, se e só se $\mathrm{Nuc}(S)$ for trivial. Uma vez que estamos a trabalhar na bas canónica (onde os vectores coincidem com os respectivos vectores de coordenadas), o núcleo de S coincide com o núcleo da sua representação matricial. Tem-se então que:

$$\mathrm{Nuc}(S) = \mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1, 0, 1)\}).$$

Como $\mathrm{Nuc}(S)$ não é trivial então S não é injectiva e, consequentemente, não é sobrejectiva.

2.(d) Mais uma vez, por estarmos a trabalhar com a base canónica, tem-se que $(0, 1, 1) \in \mathrm{Im}(S)$ se e só se $(0, 1, 1) \in \mathrm{EC}(\boldsymbol{B})$. Ou seja, se e só se o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é possível. Resolvendo o sistema obtemos o respectivo conjunto solução que é

$$\{(1 - z, -1, z) \,:\, z \in \mathbb{R}\}.$$

O que mostra que o sistema é possível e, ao mesmo tempo, que qualquer vector da forma $(1 - z, -1, z)$ é transformado por S no vector $(0, 1, 1)$.

2.(e) Temos que

$$[ST]_\beta = [S]_\beta [T]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$[\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[ST]_{\beta^*} = [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^*]^{-1}[ST]_\beta[\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.(a) Tem-se que:

$$c_A(t) = \det(A - t\mathbb{1}) = -t^3 + 3t^2 - 2t.$$

Substituindo obtém-se que $c_A(1) = 0$.

3.(b) Pela alínea anterior, usando a regra de Ruffini, sabemos que $c_A(t) = -(t-1)(t^2-2t) = -(t-1)(t-2)t$. Desta forma os valores próprios de A são $0, 1, 2$ todos com multiplicidade algébrica 1. Como para qualquer valor próprio, λ, se tem

$$1 \leq \mathrm{m}_{\mathrm{geo}}(\lambda) \leq \mathrm{m}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$$

concluímos que os valores próprios de A têm todos multiplicidade geométrica 1.

3.(c) Como a matriz A é de ordem 3 e tem três valores próprios distintos, A é diagonalizável e as matrizes D e Q existem. A matriz Q tem como colunas os vectores de uma base de $\mathbb{R}^3$, constituída por vectores próprios de A. A matriz D é diagonal e consiste nos valores próprios correspondentes aos vectores. Tem-se:

$$\begin{aligned}
E_A(0) &= \mathrm{Nuc}(A) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1,0,1)\});\\
E_A(1) &= \mathrm{Nuc}(A-\mathbb{1}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(0,1,0)\});\\
E_A(2) &= \mathrm{Nuc}(A-2\mathbb{1}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,1)\});
\end{aligned}$$

Assim,

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Comecemos por ver que (i)⇒(ii). Podemos fixar uma base de V da forma:

$$\boldsymbol{\beta}_V = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_s, \mathrm{u}_{s+1}, \ldots, \mathrm{u}_r, \mathrm{u}_{r+1}, \ldots, \mathrm{u}_n)$$

Onde $\mathrm{Nuc}(S) = L_V(\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_s\})$ e $\mathrm{Nuc}(T) = L_V(\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_r\})$. Considerando,

$$\begin{aligned}
W_S &= L_V(\{\mathrm{u}_{s+1}, \ldots, \mathrm{u}_n\});\\
W_T &= L_V(\{\mathrm{u}_{r+1}, \ldots, \mathrm{u}_n\});
\end{aligned}$$

tem-se que $V = \mathrm{Nuc}(S) \oplus W_S = \mathrm{Nuc}(T) \oplus W_T$.

Nestas condições resulta que $\boldsymbol{\beta}_S = (S(\mathrm{u}_{s+1}), \ldots, S(\mathrm{u}_n))$ é uma base de $\mathrm{Im}(S)$ enquanto que $\boldsymbol{\beta}_T = (T(\mathrm{u}_{r+1}), \ldots, T(\mathrm{u}_n))$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$. Depois de completar $\boldsymbol{\beta}_S$ de modo a obter uma base $\boldsymbol{\beta}$ de V podemos definir R da seguinte forma: R aplica os vectores de $\boldsymbol{\beta} \setminus \boldsymbol{\beta}_S$ no vector nulo, aplica os vectores $S(\mathrm{u}_{s+1}), \ldots, S(\mathrm{u}_r)$ no vector nulo e $R(S(\mathrm{u}_{r+1})) = T(\mathrm{u}_{r+1}), \ldots, R(S(\mathrm{u}_n)) = T(\mathrm{u}_n)$. É agora fácil constatar que $RS = T$, constatando que as duas transformações calculas da mesma forma a imagem de

$$\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \alpha_s \mathrm{u}_s + \alpha_{s+1}\mathrm{u}_{s+1} + \cdots + \alpha_r \mathrm{u}_r + \alpha_{r+1}\mathrm{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n \mathrm{u}_n,$$

para qualquer escolha de escalares.

Para estabelecer (ii)⇒(i) suponhamos que para um dado operador R se tem $RS = T$. Se $\mathrm{x} \in \mathrm{Nuc}(S)$ então

$$T(\mathrm{x}) = RS(\mathrm{x}) = R(S(\mathrm{x})) = R(\mathbb{0}) = \mathbb{0},$$

ou seja, $\mathrm{x} \in \mathrm{Nuc}(T)$. Concluímos então que $\mathrm{Nuc}(S) \subset \mathrm{Nuc}(T)$, como se pretendia estabelecer.

5.(a) Observamos que

$$W = \{(x,y,z) : 5x - y + 2z = 0\} = \{(x, 5x+2z, z) : x, z \in \mathbb{R}^3\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,5,0),(0,2,1)\}).$$

Como os dois vectores não são ortogonais recorresmos ao método de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal de W que pode ser:

$$\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\} = \left\{ (1,5,0), (0,2,1) - \frac{\langle (0,2,1),(1,5,0)\rangle}{\langle (1,5,0),(1,5,0)\rangle}(1,5,0) \right\}.$$

5.(b) Dado que estamos a considerar o produto interno canónico, temos que:

$$W^{\perp} = \operatorname{Nuc}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{(x,y,z)_x + 5y = 0 \wedge 2y + z = 0\} = \{(-5y, y, -2y) \,:\, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= L_{\mathbb{R}^3}(\{(-5,1,-2\})).$$

5.(c) Uma base nas condições pedidas é $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, (-5,1,-2)\}$.

5.(d) O vector pretendido é:

$$\operatorname{Proj}_W(0,1,0) = (0,1,0) - \operatorname{Proj}_{W^{\perp}}(0,1,0) = (0,1,0) - \frac{\langle (0,1,0), (-5,1,-2)\rangle}{\langle (-5,1,-2), (-5,1,-2)\rangle}(-5,1,-2).$$

5.(e) Tem-se que

$$d((0,1,0), W^{\perp}) = \|\operatorname{Proj}_{W^{\perp\perp}}(0,1,0)\| = \|\operatorname{Proj}_W(0,1,0)\|.$$

6. Suponhamos que $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ e $\det(A) = 1$. A inversa de A pode ser calculada através da fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\operatorname{Cof}(A))^{\top} = (\operatorname{Cof}(A))^{\top}.$$

Cada entrada (i,j) da matriz $\operatorname{Cof}(A)$ é o cofactor-i,j de A que, a menos de sinal é o determinante do menor i,j de A. As entradas neste menor são números inteiros, por hipótese, e o respectivo determinante que se obtém das entradas do menor usando operações de adição e multiplicação é necessariamente um inteiro, pois este conjunto de números é fechado para aquelas operações. Concluí-se assim que $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

B

Álgebra Linear

LEGI::LEE::LERC

Exame 1 [14.02.2022, 13:00]

NOME:

NÚMERO:

CURSO:

ENUNCIADO

1. Classifique as afirmações seguintes como **verdadeiras** ou **falsas**:

   1.(a) Existe uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém os vectores $(1,0,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,0)$.

   1.(b) $L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,1,1)\}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(1,0,1)\})$.

   1.(c) $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Nuc}(A^\top)$.

   1.(d) Sendo $U = \{(x,y,z) : x+y-2z=0\}$ e $W = \{(x,y,z) : x-y+z=0\}$ tem-se que $\dim(U\cap W)=0$.

   1.(e) O conjunto $\{(x,y,z) : |x|=|z|\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

2. Sejam $S,T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, operadores lineares e β a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sabendo que,

$$A = [T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = [S]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   2.(a) Justifique que T é bijectiva.

   2.(b) Determine $T^{-1}(x,y,z)$.

   2.(c) Determine $\mathrm{Nuc}(S)$ e conclua que S não é sobrejectiva.

   2.(d) Justifique que $(0,1,1)\in \mathrm{Im}(S)$ e determine $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tal que $S(a,b,c)=(0,1,1)$.

   2.(e) Considere agora a base ordenada $\beta^* = ((1,-1,0),(1,1,0),(0,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule $[ST]_{\beta^*}$.

3. Considere a matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   3.(a) Determine o polinómio característico de A e verifique que 1 é valor próprio de A.

   3.(b) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades, algébricas e geométricas.

   3.(c) Determine uma matriz invertível, Q, e uma matriz diagonal, D, tais que $D = Q^{-1}AQ$.

4. Sejam $S,T : V \to V$ operadores lineares num espaço V. Mostre que são equivalentes:

   (i) $\mathrm{Nuc}(S) \subset \mathrm{Nuc}(T)$;

   (ii) Existe um operador linear $R : V \to V$ tal que $T = RS$.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Continua no verso →

Reservado ao docente

5. Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canónico e o subespaço $W = \{(x, y, z) : x - 3y + 2z = 0\}$
   (a) Determine uma base ortogonal de W.
   (b) Determine $W^\perp$.
   (c) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vectores da base determinada na alínea anterior.
   (d) Determine o vector de W que se encontra mais próximo do vector $(0, 1, 0)$.
   (e) Determine a distância de $(0, 1, 0)$ a $W^\perp$.
6. Seja A uma matriz $n \times n$ cujas entradas são números inteiros i.e., para $1 \leq i, j \leq n$ tem-se que $A_{i,j} \in \mathbb{Z}$ (escrevemos $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$). Mostre que se $\det(A) = 1$ então $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

Questão	Cotação	Class.
1.(a)	**1.0**	
1.(b)	**1.0**	
1.(c)	**1.0**	
1.(d)	**1.0**	
1.(e)	**1.0**	
2.(a)	**1.0**	
2.(b)	**1.0**	
2.(c)	**1.0**	
2.(d)	**1.0**	
2.(e)	**1.0**	
3.(a)	**1.0**	
3.(b)	**1.0**	
3.(c)	**1.0**	
4.	**1.0**	
5.(a)	**1.0**	
5.(b)	**1.0**	
5.(c)	**1.0**	
5.(d)	**1.0**	
5.(e)	**1.0**	
6.	**1.0**	
	Total	

C

Álgebra Linear

LEGI::LEE::LERC

Exame 1 [14.02.2022, 13:00]

NOME:

NÚMERO:

CURSO:

ENUNCIADO

1. Classifique as afirmações seguintes como **verdadeiras** ou **falsas**:

   1.(a) Existe uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém os vectores $(1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,1,0)$.

   1.(b) $L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,1,1)\}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(2,1,1)\})$.

   1.(c) $\text{Nuc}(A) = \text{Nuc}(A^\top)$.

   1.(d) Sendo $U = \{(x,y,z) : x+y+z=0\}$ e $W = \{(x,y,z) : x-y+z=0\}$ tem-se que $\dim(U \cap W) = 0$.

   1.(e) O conjunto $\{(x,y,z) : |x| = |z|\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

2. Sejam $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, operadores lineares e β a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sabendo que,

$$A = [T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = [S]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   2.(a) Justifique que T é bijectiva.

   2.(b) Determine $T^{-1}(x,y,z)$.

   2.(c) Determine $\text{Nuc}(S)$ e conclua que S não é sobrejectiva.

   2.(d) Justifique que $(0,1,1) \in \text{Im}(S)$ e determine $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $S(a,b,c) = (0,1,1)$.

   2.(e) Considere agora a base ordenada $\beta^* = ((1,-1,0),(1,1,0),(0,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule $[ST]_{\beta^*}$.

3. Considere a matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   3.(a) Determine o polinómio característico de A e verifique que 1 é valor próprio de A.

   3.(b) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades, algébricas e geométricas.

   3.(c) Determine uma matriz invertível, Q, e uma matriz diagonal, D, tais que $D = Q^{-1}AQ$.

4. Sejam $S, T : V \to V$ operadores lineares num espaço V. Mostre que são equivalentes:

   (i) $\text{Nuc}(S) \subset \text{Nuc}(T)$;

   (ii) Existe um operador linear $R : V \to V$ tal que $T = RS$.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Continua no verso →

Reservado ao docente

5. Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canónico e o subespaço $W = \{(x, y, z) : 2x - y - z = 0\}$
   (a) Determine uma base ortogonal de W.
   (b) Determine $W^\perp$.
   (c) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vectores da base determinada na alínea anterior.
   (d) Determine o vector de W que se encontra mais próximo do vector $(0, 1, 0)$.
   (e) Determine a distância de $(0, 1, 0)$ a $W^\perp$.

6. Seja A uma matriz $n \times n$ cujas entradas são números inteiros i.e., para $1 \leq i, j \leq n$ tem-se que $A_{i,j} \in \mathbb{Z}$ (escrevemos $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$). Mostre que se $\det(A) = 1$ então $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

Questão	Cotação	Class.
1.(a)	1.0	
1.(b)	1.0	
1.(c)	1.0	
1.(d)	1.0	
1.(e)	1.0	
2.(a)	1.0	
2.(b)	1.0	
2.(c)	1.0	
2.(d)	1.0	
2.(e)	1.0	
3.(a)	1.0	
3.(b)	1.0	
3.(c)	1.0	
4.	1.0	
5.(a)	1.0	
5.(b)	1.0	
5.(c)	1.0	
5.(d)	1.0	
5.(e)	1.0	
6.	1.0	
	Total	