# Álgebra Linear

19/09/2022

## Matrizes

par ordenado → n-uplos ordenados

$(x,y)=(a,b) \underset{(=)}{\equiv} x=a \wedge y=b$

1ª comp. 2ª componente

se $x \neq y$ $(x,y) \neq (y,x)$

se $x=y$ $\{x,y\}=\{x\}$

$\{x,y\}=\{y,x\}$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)=(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv x_1=a_1 \wedge \dots \wedge x_n=a_n$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

"$\{(x, f(x)): \dots\}$

$p \leq q \Leftrightarrow \equiv ms \leq rn$ $\quad p = \frac{m}{n}, \; q = \frac{r}{s}$

$\frac{m}{n}=\frac{r}{s} \equiv ms=rn$

$\leq = \{(p,q) \dots\}$ está na condição $p \leq q$

$X \times Y = \{(x,y): x \in X \wedge y \in Y\}$

$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n): x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$

$X^1 = X$ n-uplo ordenado $(a)=a$

$X^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_1, \dots, x_n \in X\}$

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

**Definição Matriz:**

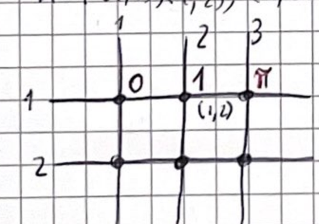
Uma matriz do tipo $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, é uma função $A: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{K}$

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Uma matriz do tipo 2x3 com entradas em $\mathbb{R}$:

$A: \{1,2\} \times \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$

$A: \{(1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,2);(2,3)\} \to \mathbb{R}$ $\quad A(1,1)=0, A(1,2)=1, A(1,3)=\pi, \dots$




$$\begin{bmatrix} 0, & 1, & \pi \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ denota-se $\mathbb{K}^{m \times n}$

matrizes identificadas com letras maiúsculas $A$ exceto vetores coluna: $\mathbb{K}^{m\times 1}$, $[a]$, $\left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right]$ $\underset{a}{\overset{\mathbb{S}}{}}$

$\mathbb{K}^{\overset{\text{linhas}}{m}\times \overset{\text{colunas}}{n}}$

vetores linha: $\mathbb{K}^{1\times n}$

$u, b$

$A = [A_{i,j}]$

$A_{i,j}$ = entrada $i,j$ de $A$

$A_{i,*}$ = linha $i$ de $A$

$A_{*,j}$ = coluna $j$ de $A$

exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$A_{1,2} = 2$

$A_{2,*} = [0 \quad 1]$

$A_{*,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Matrizes quadradas $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$\to A$ é de ordem $n$

triangular superior

diagonal $\to$ fora da diagonal só há zeros

triangular inferior $\to$ acima da diag. principal só há zeros

$\to$ se abaixo da diag. principal só há zeros

Definição:

Numa matriz quadrada a diagonal principal consiste nas posições $i,i$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\to$ é uma matriz nula

Definição:

A matriz nula do tipo $m\times n$ é a matriz $\mathbb{O}_{m,n} = \mathbb{O}$ que se caracteriza por:

$$(\forall i,j) \quad \mathbb{O}_{i,j} = 0$$

Definição:

matriz identidade de ordem $n$: $\mathbb{1}_n = \mathbb{1}$

$\mathbb{1}_{i,i} = 1$ se $i \neq j$ $\mathbb{1}_{i,j} = 0$

$$\mathbb{1}_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{se } i = j) \\ 0 & (\text{se } i \neq j) \end{cases}$$

$\mathbb{1}_1 = [1]$ $\quad \mathbb{1}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbb{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

...

21/09/2022

# Álgebra de Matrizes

• multiplicar escalar por matriz

$\underset{\text{matriz}}{A} \in K^{m \times n}$ $\quad \underset{\text{escalar}}{a} \in K \quad \overset{\text{multiplicar}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\text{matriz}}{aA} \in K^{m \times n}$

$(aA)_{i,j} = a A_{i,j}$

ex:

$$\pi \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & \pi & 0 & 2\pi \\ \pi & -\pi & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• adicionar matrizes

Se $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ então, o resultado de adicionar A a B é a matriz $A+B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ que satisfaz

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & 1+b \\ c & 1+d \\ 2+e & 3+f \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \text{indefinido!}$$

têm de ser do mesmo tipo
mesmo nº colunas e linhas

$A = B$ sse:
A e B são do mesmo tipo e $(\forall i,j)\ A_{i,j} = B_{i,j}$

$A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$\underset{\mathbb{K}^{m \times n}}{A+B} \qquad \underset{\mathbb{K}^{m \times n}}{B+A}$

$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} = B_{i,j} + A_{i,j} = (B+A)_{i,j}$

$\Downarrow$

$A+B = B+A$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}}_{(-A)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• multiplicação de matrizes

$(\underset{A}{m \times p}) \cdot (\underset{B}{p \times n}) \qquad AB\ (m \times n)$

produto AB : A é do tipo $m \times p$ e B é do tipo $p \times n$ $\Rightarrow$ AB é do tipo $m \times n$

- caso básico → vetor linha por vetor coluna    resultado: matriz $1 \times 1$

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{1,1} \\ B_{2,1} \\ \vdots \\ B_{p,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} B_{1,1} + A_{1,2} B_{2,1} + \cdots + A_{1,p} B_{p,1} \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{K}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{K}^{p \times n} \Rightarrow AB \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$(AB)_{i,j} = A_{i,*} B_{*,j}$$

multiplica-se a linha i de A pela coluna j de B

ex:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha + b\lambda & a\beta + b\mu & a\gamma + b\theta \\ c\alpha + d\lambda & c\beta + d\mu & c\gamma + d\theta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha & a\beta & a\gamma \\ b\alpha & b\beta & b\gamma \end{bmatrix}$$

Propriedades:

1- $A+B=B+A$

2- $(A+B)+C=A+(B+C)$

3- $A+O=A$

4- Toda a matriz $A$ tem uma matriz simétrica que se denota $-A$ e é a matriz $B$ do mesmo tipo de $A$ satisfazendo $B_{ij}=-A_{ij}$. Tem-se que $A+(-A)=O$. (Em geral, escrevemos $A-B$ em vez de $A+(-B)$)

5- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

6- $(a+b)A=aA+bA$

7- $1A=A$ e $0A=O$

8- $(-1)A=-A$

Operações de adição e multiplicação por escalar, a álgebra de matrizes possui as mesmas propriedades de a álgebra numérica.

$$3x+B=C$$
$$3x=C-B$$
$$x=\frac{1}{3}(C-B)$$

9- $(AB)C=A(BC)$

10- $OA=O$ e $AO=O$

11- $IA=A$ e $AI=A$

12- $a(AB)=(aA)B=A(aB)$

13- $(A+B)C=AC+BC$

14- $A(B+C)=AB+AC$

esta não pode estar do outro lado pq assim não estaria definida

$$\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

a multiplicação continua a ter precedência à adição

A falha da comutatividade do produto de matrizes pode ocorrer por várias razões:

- $AB$ pode estar definido e $BA$ não (ou vice-versa)
  ex: $A\in\mathbb{K}^{2\times3}$, $B\in\mathbb{K}^{3\times4}$
- $AB$ e $BA$ podem estar ambos definidos mas serem de tipos diferentes
  ex: $A\in\mathbb{K}^{1\times3}$, $B\in\mathbb{K}^{3\times1}$
- $AB$ e $BA$ podem estar ambos definidos, serem do mesmo tipo mas serem matrizes diferentes
  ex:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

A falha do anulamento do produto* pode ser exemplificada do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

*No contexto matricial a lei do anulamento do produto enuncia-se:

$$AB=O \Leftrightarrow A=O \vee B=O$$

by Staples

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $A$ é uma matriz quadrada, podemos fazer corresponder a cada $n \in \mathbb{N}$ a n-ésima potência de $A$ que se denota $A^n$

$$A^0 = \mathbb{1} \qquad A^{n+1} = A\,A^n$$

ou seja: $A^0 = \mathbb{1}$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, $A^4 = AAAA$, etc.

$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ e uma matriz quadrada $A$

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 \mathbb{1}$$

$$t^2 + 1 \to \cancel{A^2 + 1}$$

$$\underset{A}{t^2 + t^0} \Leftrightarrow A^2 + A^0 = A^2 + \mathbb{1}$$

Definição:

Seja $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ um matriz. A transposta de $A$ é a matriz $A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ que se caracteriza através da seguinte relação:

$$(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$$

Mais informalmente, as linhas (resp. colunas) de $A^T$ são as colunas (resp. linhas) de $A$.

ex: $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

1- $A^{T^T} = A$
2- $(A+B)^T = A^T + B^T$
3- $(aA)^T = aA^T$
4- $(AB)^T = B^T A^T$

Prática

23/09/2022

3) $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$: Descreva $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ onde $B_{i,j} = A_{i,n+1-j}$

linha $i$ de $B$: $[B_{i,1} \; B_{i,2} \; \ldots \; B_{i,n-1} \; B_{i,n}]$

$[A_{i,n} \; B_{i,n-1} \; \ldots \; B_{i,2} \; B_{i,1}]$ as linhas de B são as de A mas por ordem inversa

4) $A, B, D \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$
$C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
$E \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

(a) $\underset{3\times2}{B}\underset{3\times2}{A}$ ñ definido. multiplicação de mesmo tipo só em matrizes quadradas

(b) $\underbrace{\underset{3\times2}{A}\underset{2\times2}{C}}_{3\times2} + \underset{3\times2}{D}$ é possível e o resultado é 3x2

(c) $\underbrace{\underset{3\times2}{A}\underset{2\times3}{E}}_{3\times3} + \underset{3\times2}{B}$ ñ definido. ñ posso somar as matrizes pq são diferentes

(d) $\underset{3\times2}{A}\underset{3\times2}{B} + B$ ñ definido

(e) $\underset{2\times3}{E}\underbrace{(\underset{3\times2}{A} + \underset{3\times2}{B})}_{3\times2}$ é possível e o resultado é 2x2

(f) $\underset{2\times3}{E}\underbrace{(\underset{3\times2}{A}\underset{2\times2}{C})}_{3\times2}$ é possível e o resultado é 2x2

(h) $\underbrace{(\underset{2\times3}{A^T} + \underset{2\times3}{E})}_{2\times3}\underset{3\times2}{D}$ é possível e o resultado é 2x2

(g) $\underset{3\times2}{E^T}\underset{3\times2}{A}$ ~~é possível e o resultado é 2x2~~ ñ definido

$x(yz) = (xy)z$

6) $3\left(X+\frac{1}{2}A\right) = 5\left(X-\frac{3}{4}B\right) \Leftrightarrow 3X+\frac{3}{2}A = 5X - \frac{15}{4}B \Leftrightarrow 3X-5X = -\frac{15}{4}B - \frac{3}{2}A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2X = -\frac{15}{4}B - \frac{3}{2}A \Leftrightarrow 2X = \frac{15}{4}B + \frac{3}{2}A \Leftrightarrow X = \frac{15}{8}B + \frac{3}{4}A$

11) $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, traço de $tr(A) = A_{1,1} + A_{2,2} + \dots + A_{n,n}$

(a) $tr(A+B) = (A+B)_{1,1} + (A+B)_{2,2} + \dots + (A+B)_{n,n} =$
$= A_{1,1} + B_{1,1} + A_{2,2} + B_{2,2} + \dots + A_{n,n} + B_{n,n} =$
$= (A_{1,1} + A_{2,2} + \dots + A_{n,n}) + (B_{1,1} + B_{2,2} + \dots + B_{n,n}) =$
$= tr(A) + tr(B)$

$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

(b) $tr(aA) = (aA)_{1,1} + (aA)_{2,2} + \dots + (aA)_{n,n} = aA_{1,1} + aA_{2,2} + \dots + aA_{n,n} =$
$= a(A_{1,1} + A_{2,2} + \dots + A_{n,n}) = a\,tr(A)$

$(aA)_{ij} = a\cdot A_{ij}$

14) $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

$A^{m+n} = A^m A^n$
$(A^n)^m = A^{nm}$

$a(AB) = (aA)B = A(aB)$

$0\times 0 + i\times i$, $i^2 = -1$

$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbb{1}$ $\quad A^3 = A^2A = \cancel{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}}$

$A^4 = A^2\cdot A^2 = (-\mathbb{1})\times(-\mathbb{1}) = (-1)\times(-1)\times \mathbb{1}\times\mathbb{1} = \mathbb{1}$ $\quad (-\mathbb{1})\cdot A = -(\mathbb{1}A) = -A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{1}$ | $A$ | $-\mathbb{1}$ | $-A$ | $\mathbb{1}$ | $A$ | $-\mathbb{1}$ | $-A$ | $\mathbb{1}$ |

$\xrightarrow{\times A}\quad \xrightarrow{\times A}\quad \xrightarrow{\times A}\quad \xrightarrow{\times A}$

$A^n = \begin{cases} \mathbb{1} & n = 4k \\ A & n = 4k+1 \\ -\mathbb{1} & n = 4k+2 \\ -A & n = 4k+3 \end{cases}$

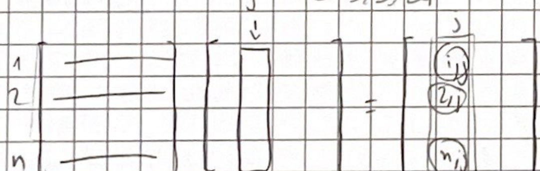
16) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \;\; b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; b_4 \end{array}$$

$Ab_1 = b_4$
$A(b_2 - b_3) = b_1 \Leftrightarrow Ab_2 - Ab_3 = b_1$
$A(b_2 + b_3) = b_4 \Leftrightarrow Ab_2 + Ab_3 = b_4$
$Ab_4 = b_3$

$2Ab_2 = b_1 + b_4$

$Ab_2 = \frac{b_1 + b_4}{2}$



$AB_{*,j} = (AB)_{*j}$

$\begin{cases} Ab_3 = -b_1 + Ab_2 \\ Ab_3 = b_4 - Ab_2 \end{cases} \Leftrightarrow 2Ab_3 = b_4 - b_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Ab_3 = \frac{b_4 - b_1}{2}$

$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$ não sei. pq?

Teórica 26/09/2022

quando é que a matriz $\overset{\text{quadrada}}{A}$ tem uma matriz B, tal que, $BA = AB = \mathbb{1}$

$ab = ba = 1$
$\ \ \frac{1}{a}$

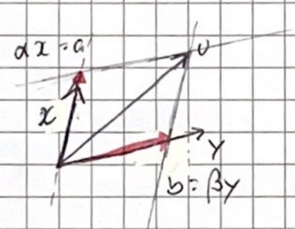
① Definição:
Sejam $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{K}^{1\times n}$ ou $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Uma combinação linear dos vetores $u_1,\dots,u_n$ é uma soma do tipo $a_1u_1 + \dots + a_nu_n$ onde $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$.

(Os escalares $a_1,\dots,a_n$ dizem-se os coeficientes da combinação linear)

$[1\ 1\ 1] = u_1,\ u_2 = [0\ 1\ 2]$

$u_1 = 1u_1 + 0u_2$ $\qquad$ $2u_1 - 3u_2 = 2u_1 + (-3)u_2$

$[0\ 0\ 0] = 0u_1 + 0u_2$




$u = a + b = \alpha x + \beta y$

Teorema:
Sejam $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ e $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$. Tem-se que

$$(AB)_{i,*} = A_{i,1}B_{1,*} + A_{i,2}B_{2,*} + \dots + A_{i,p}B_{p,*}$$

e

$$(AB)_{*,j} = B_{1,j}A_{*,1} + A_{2,j}A_{*,2} + \dots + B_{p,j} + A_{j,*}$$

Ou seja, a i-ésima linha de AB é a combinação linear das linhas de B

exemplo:
$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \eta & \theta \end{bmatrix}$

$(AB)_{1,*} = a[\alpha\ \beta] + \beta[\gamma\ \delta] + c[\eta\ \theta]$

$(AB)_{*,2} = \beta\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} + \theta\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$

Equação linear em $\mathbb{K}$

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ $\qquad$ $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$ e $x_1, x_2, \dots x_n$ são letras (as variáveis)
↓
é uma equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$

$3x = 1 - y \Leftrightarrow 3x + y = 1$

conjunto solução: $\{(\xi_1,\dots,\xi_n) \mid a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n = b\}$

$0=b$

pode ser: $0x=b$

$0x+0y=b$

$0x+0y+0z=b$

$\vdots$

Sistemas de equações lineares:

observação:

na resolução de um sistema de equações é conveniente apresentar todas as equações com a mesma ordenação das variáveis, isolando o termo que não contém nenhuma variável (o termo independente) no segundo membro.

$x+y=0$ possível

$y=-x$ $(x,y)$ $(0,0), (1,-1), (-1,1) \dots$

$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ impossível

$\begin{cases} x+y=0 \\ x=2 \end{cases}$ $(x,y)=(2,-2)$ sistema determinado

$$(\Sigma)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \to \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_n \end{bmatrix}$$

matriz aumentada

exemplo:

sistema

$$\begin{cases} -x+w=-1 \\ x+y+z+w=0 \\ x-y+w=1 \\ y-z+w=-2 \end{cases}$$

matriz dos coeficientes

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

coluna dos termos independentes

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

coluna das variáveis

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

diferente ordenação para as variáveis

$$\begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$Ax=b \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Exercícios do capítulo 1

1) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

a) $A_{ij} = i + j$

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) $A_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{se } i+j \text{ é par}) \\ 0 & (\text{se } i+j \text{ é ímpar}) \end{cases}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A_{ij} = (-1)^{i-j}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A_{ij} = \begin{cases} -1 & (\text{se } i > j) \\ 0 & (\text{se } i = j) \\ 1 & (\text{se } i < j) \end{cases}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{erro nas soluções} \quad 3 = 3 \Rightarrow 0}$

2) $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 \end{bmatrix}$

? b) $A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & & 2 & & 2 \\ & & 3 & & & 3 \\ & 2 & & 4 & & 2 \\ & & & & 5 & \\ & 2 & 3 & 2 & & 6 \end{bmatrix}$

mmc $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

mdc $=$

1

5) $\begin{bmatrix} x-y & y-x & z-w \\ w-x & x-y & y-z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x-w & y-x & z-y \\ y-x & z-y & w-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y-x+w & y-x-y+x & z-w-z+y \\ w-x-y+x & x-y-z+y & y-z-w+z \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} w-y & 0 & y-w \\ w-y & x-z & y-w \end{bmatrix}$

7) $A = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$X + A = 2(X - B) \Leftrightarrow X + A = 2X - 2B \Leftrightarrow -X = -A - 2B \Leftrightarrow X = A + 2B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

28/09/2022

$[A|b]$ — matriz coef. ↳ coluna do termo indep.

$Ax = b$ ↳ coluna das variáveis

O algoritmo para a redução de sistemas de equações lineares envolve um método conhecido como método de eliminação de Gauss que vamos descrever agora.

ponto partida → matriz aumentada $[A|b]$ $\overset{\text{transforma}}{\Longrightarrow}$ matriz aumentada $[\bar{A}|\bar{b}]$

• **Definição:**

O primeiro elemento ñ nulo numa linha de uma matriz $A$ diz-se o pivô dessa linha.

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• **Definição:**

Uma matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ diz-se em escada de linhas se verifica todas as condições seguintes:

- linhas nulas são as últimas da matriz
- Se $A_{1,j_1}, A_{2,j_2}, \dots, A_{s,j_s}$ $(s \leq m)$ é a sequência de pivôs de $A$ $j_1 < j_2 < \dots < j_s$.

ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ está em escada de linhas

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ñ está em escada de linhas

## Operações elementares do método de eliminação de Gauss:

→ Trocar duas linhas
 troca da linha r com a linha s $\quad L_s \leftrightarrow L_r$

→ Multiplicar uma linha por um escalar não nulo
 multiplicar por $\alpha \neq 0$ a linha s $\quad \alpha L_s$

→ Adicionar a uma linha outra previamente multiplicada por um escalar
 adicionar à linha r a linha s multiplicada por $\alpha$ $\quad L_r + \alpha L_s$
 (o resultado da operação fica guardado na linha r)

$$[A|b] \xrightarrow[\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2L_1}]{} [A'|b']$$

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 - \frac{3}{2}L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$: Colocar na prim. linha uma linha com o pivô mais à esq. possível

$L_3 - L_1$: Anular todas as entradas abaixo do pivô da prim. linha

ñ se mexe mais na 1ª linha

De entre as linhas q ñ sejam a linha 1, escolher uma com o pivô o mais à esq. possível e colocá-la como segunda linha

$L_4 - \frac{3}{2}L_2$: anular todas as entradas abaixo do pivô da segunda linha

$2L_4$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4-3L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de entre as linhas q ñ sejam as linhas 1 e 2, escolher uma com o pivô o mais à esq. possível e considerá-la a terceira linha

## Teorema

Se a matriz $[B|c]$ se obtém da matriz $[A|b]$ depois da aplicação de uma sequência de operações elementares então, os sistemas representados por $[A|b]$ e $[B|c]$ são equivalentes, ou seja, têm as mesmas soluções.

ex: m.e.G

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{cases} x+2y=0 \\ y+z=1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2-L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ está em escada de linha reduzida (ñ tem nºs em cima dos pivôs)

$x+y=0$

$\{(x,y): x=-y\}$

variável livre, variável dependente

$\{(x,y): y=-x\}$

$$\begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases} \quad \{(x,y,z): x=-z \wedge y=-z\} = \{(-z,z,z): z \in \mathbb{R}\}$$

## Problema 2.7:

a) $\begin{cases} -2v+3w=1 \\ 3u+6v-3w=-2 \\ 6u+6v+3w=5 \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{6} \end{array}\right]$$

impossível

b) $\begin{cases} w+2x-y=4 \\ x-y=3 \\ w+3x-2y=7 \\ 2u+4v+w+7x=9 \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u & v & w & x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 9 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_1 \leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4-L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_4+L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} 2u+4v+w+7x=9 \\ w+3x-2y=7 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{2}(-4v-w-7x+9) \\ w=-3x+2y+7 \\ x=y+3 \end{cases}$$

são variáveis dependentes

$\{(y+3, \ldots) \ldots\}$

# Problemas

30/09/2022

## Exercícios do capítulo 1

26)

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

a) $b$ é combinação linear de $u_1, u_2, u_3$ se $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \delta u_3 = b$$

$$(\exists \alpha,\beta,\delta) \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow (\exists \alpha,\beta,\delta) \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha+2\beta\\-\beta+\delta\\2\alpha+\beta+\delta\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha + 2\beta = 1\\ -\beta + \delta = 1\\ 2\alpha + \beta + \delta = 2\end{cases}$$ é possível

$$\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & \delta & \\ \end{array}$$
$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc}1&2&0\\0&-1&1\\2&1&1\end{array}\right.}_{A}\left|\begin{array}{c}1\\1\\2\end{array}\right]_{b} \Leftrightarrow A\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\delta\end{bmatrix} = b$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&-1&1&1\\2&1&1&2\end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&-1&1&1\\0&-3&1&0\end{array}\right] \xrightarrow{L_3-3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&-1&1&1\\0&0&-2&-3\end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}L_3]{-L_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&3/2\end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&1&0&1/2\\0&0&1&3/2\end{array}\right] \xrightarrow{L_1-2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&1/2\\0&0&1&3/2\end{array}\right]$$

$$\boxed{b = 0 \cdot u_1 + 1/2 \cdot u_2 + 3/2 \cdot u_3}$$

b) $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & b \\ | & | & | \end{bmatrix}$ determinar $w = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\-1\end{bmatrix}$ e $\delta$ t.q. $Aw = \delta u_3$

$$\delta u_3 = Aw = \alpha u_1 + \beta u_2 - b \Leftrightarrow \delta u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 - b \Leftrightarrow \boxed{b = \alpha u_1 + \beta u_2 - \delta u_3}$$

com base em a)

$\alpha = 0 \quad \beta = 1/2 \quad -\delta = 3/2 \Leftrightarrow \delta = -\frac{3}{2}$ $\qquad b = 0 \cdot u_1 + 1/2\, u_2 + 3/2\, u_3$

33)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}5&-3&\lambda&0\\2&0&0&-2\\0&1&-1&\mu\end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&-2\\5&-3&\lambda&0\\0&1&-1&\mu\end{array}\right] \xrightarrow{L_2-\frac{5}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&-2\\0&-3&\lambda&5\\0&1&-1&\mu\end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&-2\\0&1&-1&\mu\\0&-3&\lambda&5\end{array}\right] \xrightarrow{L_3+3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&-2\\0&1&-1&\mu\\0&0&\lambda-3&5+3\mu\end{array}\right]$$

$\boxed{\lambda = 3}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&-2\\0&1&-1&\mu\\0&0&0&5+3\mu\end{array}\right]$$

$\mu = -5/3$ é indet.

$\mu \neq -5/3$ é imp.

$\lambda \neq 3$ é possível e determinado

R.: (A)

$$\left[\begin{array}{cc|c}\mu&1&1\\\mu-2&2&1\end{array}\right] \begin{array}{l}\xrightarrow{\mu\neq 0}\\ \searrow_{\mu=0}\end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c}\mu&1&1\\\mu-2&2&1\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1&\mu&1\\2&\mu-2&1\end{array}\right]$$ eliminação de Gauss

trocar colunas

é indeterminado se tiver mais variáveis do que pivôs

# TeoricoPrática

03/10/2022

Considerando uma matriz inicial A é possível obter diferentes matrizes em escadas de linhas $A^*$ e $A^+$.
No entanto, o nº de pivôs de $A^*$ e $A^+$ em cada linha, bem como as colunas em que ocorrem em cada linha, são as mesmas.

**Definição**

A característica de uma matriz, A, que se denota car(A), é o número de pivôs numa qualquer matriz em escada de linhas $A^*$, obtida a partir de A usando o método de eliminação de Gauss.

ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$2 = \min\{2,4\}$

característica da matriz

Pode demonstrar-se que

$$car(A) = car(A^T)$$

Assim, se $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ tem-se

$$car(A) \leq \min\{m,n\}$$

Se $a \neq 0$ então

$$car(aA) = car(A)$$

Sejam $[A|b]$ a matriz aumentada de um sistema e $[\bar{A}|\bar{b}]$ a matriz em escada de linhas que se obtém de $[A|b]$ através do método de eliminação de Gauss. Tem-se:

Se $car([\bar{A}|\bar{b}]) > car(A)$ o sistema é impossível.

Se $car([\bar{A}|\bar{b}]) = car(A)$ o sistema é possível e, neste caso, se car(A) coincide com o número de variáveis (= número de colunas de A) então, o sistema é possível e determinado; se car(A) for inferior ao número de variáveis então o sistema é possível e indeterminado.

$$[A|b] \underset{m.e.G}{\longrightarrow} \overset{car(A) \atop car([\bar{A}|\bar{b}])}{[\bar{A}|\bar{b}]}$$

escada de linhas

Se $car([A|b]) = car(A) <$ nº de variáveis, o sistema é, como vimos indeterminado. Neste caso, a solução do sistema consiste em exprimir algumas variáveis – as variáveis dependentes – à custa de outras – as variáveis livres. Neste caso, podem sempre escolher-se as variáveis nas colunas de $[\bar{A}|\bar{b}]$ que contêm os pivôs como variáveis dependentes, sendo as restantes as variáveis livres.

O grau de indeterminação de um sistema é o nº de variáveis livres que ocorrem na solução e é a diferença entre o nº de colunas de A e car(A).

ex:

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z + w = 0 \\ -w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - z - w \\ w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - z \\ w = 0 \end{cases}$$

$\{(-2y-z, y, z, 0) : y, z \in \mathbb{R}\}$

→ solução do sistema

$\cdots \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - 2y - w \\ w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - 2y \\ w = 0 \end{cases}$ $\{(x, y, -x-2y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$

As operações elementares podem ser descritas em termos puramente algébricos.

## Matrizes elementares

→ ① Denotamos por $E_m^{(i,j)} \in \mathbb{K}^{m \times m}$, ou simplesmente $E^{(i,j)}$, a matriz identidade (que é como a matriz) excepto que com as linhas i e j da identidade trocadas entre si.

$E_3^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ foram trocadas

→ ① Denotamos por $E_m^{(i,j)}(\alpha) \in \mathbb{K}^{m \times m}$, ou simplesmente $E^{(i,j)}(\alpha)$ com $i \neq j$, a matriz que é como a matriz identidade excepto com a entrada $(i,j)$ é $\alpha$.

$E_2^{(2,1)}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

→ Denotamos por $E_m^{(i)}(\alpha) \in \mathbb{K}^{m \times m}$, ou simplesmente $E^{(i)}(\alpha)$, para $\alpha \neq 0$, a matriz é como a identidade excepto que na i-ésima posição da diagonal tem o escalar $\alpha$.

$E_4^{(2)}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

## Multiplicação à esquerda

$E^{(i,j)} A = B$

Neste caso B é a matriz que se obtém de A, trocando as linhas i e j.

$E^{(i,j)}(\alpha) A = B$

Neste caso B é a matriz que resulta de A substituindo a linha i de A por $A_{i*} + \alpha A_{j*}$, i.e. adicionando à linha i de A a linha j multiplicada por $\alpha$.

$E^{(i)}(\alpha) A = B$

Neste caso B é a matriz que se obtém de A, multiplicando a linha i de A pelo escalar $\alpha \neq 0$.

$A \xrightarrow[\text{m.e.E}]{} \bar{A}$ escada de linhas

$E_n \dots E_2 E_1 A = \bar{A}$

ex:

$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E^{(3,1)}(1)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$L_3 + 1L_1$

## Multiplicação à direita

$AE^{(i,j)} = B$

Neste caso B é a matriz que se obtém de A, trocando as colunas i e j.

$AE^{(i,j)}(\alpha) = B$

Neste caso B é a matriz que resulta de A substituindo a coluna j de A por $A_{*j} + \alpha A_{*i}$, i.e. adicionando à coluna j de A a coluna i multiplicada por $\alpha$.

$AE^{(i)}(\alpha) = B$

Neste caso B é a matriz que se obtém de A, multiplicando a coluna i de A pelo escalar $\alpha \neq 0$.

**ex:**

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&2\\0&0&4\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}}_{E^{(3,1)}(1)}=\begin{bmatrix}2&2&1\\2&0&2\\4&0&4\end{bmatrix}$$

$$E_2^{(1,2)}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\cdot E_2^{(1,2)}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$$

## Definição

Um **sistema homogéneo** é um sistema da forma $Ax=\mathbb{0}$, ou seja um sistema onde os termos independentes são todos nulos. Dado um sistema $Ax=b$, o sistema homogéneo associado é o sistema $Ax=\mathbb{0}$.

é sempre possível
a solução nula é sempre solução do sistema

$$\begin{cases}2x+y=0\\5x-8y=0\end{cases}$$

Um sistema homogéneo é sempre possível: $A\mathbb{0}=\mathbb{0}$ (possui sempre a solução nula).

Se $u$ e $w$ são soluções do sistema $Ax=b$ então, $u-w$ é uma solução do sistema homogéneo.

• Sendo $u_0$ uma solução do sistema $Ax=b$, qualquer solução de $Ax=b$ é da forma $u_0+w$ onde $w$ é uma solução do sistema homogéneo associado.

$Ax=b$ $\qquad$ $Ax=\mathbb{0}$

Se $u_0$ e $u_1$ são sol. de $Ax=b$

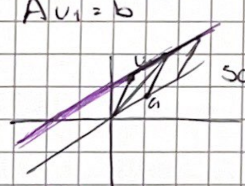
$Au_0=b$

$Au_1=b$

$Au_1-Au_0=b-b=\mathbb{0}$

$A(u_1-u_0)=\mathbb{0}$

$$u_1=\underbrace{u_0}_{\text{sol. particular de } Ax=b}+\overbrace{(u_1-u_0)}^{\text{sol. de } Ax=\mathbb{0}}$$



sol. de prob. homogéneo

## Definição

Seja $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$. O núcleo de $A$, que se denota $Nuc(A)$, consiste nos vetores $w\in\mathbb{K}^{n\times 1}$ tais que $Aw=\mathbb{0}$. Ou seja, $Nuc(A)$ é o conjunto solução do sistema homogéneo $Ax=\mathbb{0}$

Se $Nuc(A)=\{\mathbb{0}\}$ dizemos que o núcleo é trivial, caso contrário o núcleo diz-se não-trivial.

**ex:**

$$Nuc\left(\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\right)=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}:\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}_{\text{sistema homogéneo}}\right\}$$

$Ax = b \rightarrow [A|b]$

sol. das var.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 - 2L_2]{} \begin{array}{cccccc} x & y & z & w & & \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{array}$$

$x = -z + w$
$y = -w$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -z+w \\ -w \\ z \\ w \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{R} \right\} \quad \{(-z+w, -w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$$

## Exercícios capítulo 1

8)
$$[x \; y \; 1] \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = [x \; y \; 1] \begin{bmatrix} ax + hy + g \\ hx + by + f \\ gx + fy + c \end{bmatrix} = [ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + 2hxy + c]$$

a) $x^2 + 9xy + y^2 + 8x + 5y + 2 = 0$

$$[x \; y \; 1] \begin{bmatrix} 1 & 9/2 & 4 \\ 9/2 & 1 & 5/2 \\ 4 & 5/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

b) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$

$$[x \; y \; 1] \begin{bmatrix} 1/\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

c) $xy = a^2 \Leftrightarrow a^2 - xy = 0$

$$[x \; y \; 1] \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

d) $y^2 = 4xy \Leftrightarrow y^2 - 4xy = 0$

$$[x \; y \; 1] \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

ñ está nas sol.

9)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10) $(A(B+C))^T = (AB + AC)^T = (AB)^T + (AC)^T = B^T A^T + C^T A^T$

distributividade à esq. $\quad (A+B)^T = A^T + B^T \quad (AB)^T = B^T A^T$

fiz de outra maneira das sol

12) $S_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $S_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ $S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $i^2 = -1$

Verificamos apenas um dos caso os outros são análogos.

$S_x S_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ $-S_y S_x = -\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$

$S_x S_y = -S_y S_x$, c.q.m

13) $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $tr(AB) = (AB)_{1,1} + (AB)_{2,2} + \dots + (AB)_{n,n} =$

$= (A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + \dots + A_{1,n}B_{n,1}) + (A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} + \dots + A_{2,n}B_{n,2}) + \dots +$

$+ (A_{n,1}B_{1,n} + A_{n,2}B_{2,n} + \dots + A_{n,n}B_{n,n}) =$

$= (B_{1,1}A_{1,1} + B_{1,2}A_{2,1} + \dots + B_{1,n}A_{n,1}) + (B_{2,1}A_{1,2} + B_{2,2}A_{2,2} + \dots + B_{2,n}A_{n,2}) + \dots +$

$+ (B_{n,1}A_{1,n} + B_{n,2}A_{2,n} + \dots + B_{n,n}A_{n,n}) = tr(BA)$, c.q.m.

15) $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $A$ e $AB - BA$ comutam $n \geq 1$ $A^nB - BA^n = n(AB - BA)A^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$

- $n = 1$

$A^1B - BA^1 = 1(AB - BA)\underbrace{A^{1-1}}_{A^0 = I} \Leftrightarrow AB - BA = AB - BA$ P.V.

- Hipótese de indução: $A^nB - BA^n = n(AB - BA)A^{n-1}$, para qualquer $n$ fixo
- Tese: $A^{n+1}B - BA^{n+1} = (n+1)(AB - BA)A^n$

Demonstração:

$A^nB - BA^n = n(AB - BA)A^{n-1}$

mult. à esq. por $A$

$A^{n+1}B - ABA^n = nA(AB - BA)A^{n-1} = n(AB - BA)A^n$

mult. à dir. por $A$

$A^nBA - BA^{n+1} = n(AB - BA)A^n$

somando membro a membro

$A^{n+1}B - ABA^n + A^nBA - BA^{n+1} = 2n(AB - BA)A^n \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow A^{n+1}B - BA^{n+1} &= 2n(AB - BA)A^n - (A^nBA + ABA^n) = \\
&= 2n(AB - BA)A^n - A(A^{n-1}BA - BA^n) = \\
&= 2n(AB - BA)A^n - A(A^{n-1}B - BA^{n-1})A = \\
&= 2n(AB - BA)A^n - A((n-1)(AB - BA)A^{n-2})A = \\
&= 2n(AB - BA)A^n - (n-1)A(AB - BA)A^{n-1} = \\
&= 2n(AB - BA)A^n - (n-1)(AB - BA)A^n = \\
&= (n+1)(AB - BA)A^n, \text{ c.q.m}
\end{aligned}$$

35) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 8 \\ -4 & -1 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-3L_1]{L_2+4L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right]$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=5 \end{cases}$ $x+y+z=-1+1+5=5$

R.: (C)

37) $Au=b$, $[A|b]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 6 & 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2-L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & 6 & 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3-2(b_2-b_1) \end{array}\right]$ é sempre possível e determinado

I-F, II-V, III-F, IV-F

R.: (II)

# Problemas

07/10/2022

## Exercícios capítulo 1

32)

a) $\begin{cases} \alpha x+\beta z=2 \\ \alpha x+\alpha y+4z=4 \\ \alpha y+2z=\beta \end{cases}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{L_2-L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 4-\beta & 2 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 4-\beta & 2 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-2 \end{array}\right]$

$\alpha\neq0$ → $\beta\neq2$: possível e determinado

$\alpha\neq0$ → $\beta=2$: possível e indeterminado

$\alpha=0$ → $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta & 2 \\ 0 & 0 & 4-\beta & 2 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-2 \end{array}\right]$

$\beta=0$ → impossível

$\beta\neq0$, $L_2+\frac{\beta-4}{\beta}L_1$, $L_3+\frac{2-\beta}{\beta}L_1$ → $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{\beta-4}{\beta}+2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{2-\beta}{\beta}+\beta-2 \end{array}\right]$

→ se: $2\frac{\beta-4}{\beta}+2\neq0 \vee 2\frac{2-\beta}{\beta}+\beta-2\neq0$

$\overbrace{(4\beta-8\neq0)}$ $2(\beta-4)+2\beta\neq0$ $\overbrace{(\beta^2-4\beta+4\neq0)}$ $2(2-\beta)+\beta(\beta-2)\neq0$ $\Rightarrow(\beta-2)^2\neq0$

impossível → $\boxed{\beta\neq2}$

→ caso contrário: indeterminado $\boxed{\beta=2}$

b) $\begin{cases} -2z=0 \\ cy+4z=d \\ 4x+5y-2z=-2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & c & 4 & d \\ 4 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & c & 4 & d \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$

$c\neq0$ → possível e determinado

$c=0$ → $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & d \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & d \\ 0 & 0 & 0 & d/2 \end{array}\right]$

$d=0$ → possível e indeterminado

$d\neq0$ → impossível

variáveis dependentes

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ tem 1 variável livre, o C.S. tem 1 grau de liberdade ⇓ reta

$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -3y-z=0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ 2 variáveis livres ⇓ plano

$x+2y+3z=1$

c) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ z=2 \\ (a-4)z=a-2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-(a-4)L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6-a \end{array}\right]$

$a=6 \Rightarrow$ possível e indeterminado

$a \neq 6 \Rightarrow$ impossível

40) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+5L_1]{E^{(2,1)}(5)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{E^{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}L_2]{E^{(2)}(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}$

" $E^{(2,1)}(5).A$ " $E^{(2,3)}E^{(2,1)}(5)A$ " $\underbrace{E^{(2)}(-1/2)}_{E_3}\underbrace{E^{(2,3)}}_{E_2}\underbrace{E^{(2,1)}(5)}_{E_1}A$

a) $E_3E_2E_1A = \mathbb{1}$ $\quad A \underset{e/G}{\rightarrow} \mathbb{1}$

$E^{(2,1)}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; $E^{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; $E^{(2)}(-\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

# A inversa de matrizes (quadradas)

10/10/2022

~~$AB = \mathbb{0} \Rightarrow A = \mathbb{0} \vee B = \mathbb{0}$~~

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad a \neq 0 \quad ax = b \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}b$

**Definição**

Seja $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. Uma matriz $B$ diz-se inversa de $A$ se $AB = BA = \mathbb{1}$.

**Observação**

A definição é simétrica i.e., $B$ é inversa de $A$ se e só se $A$ é inversa de $B$.

Nem todas as matrizes quadradas são invertíveis. Um exemplo óbvio são as matrizes nulas. Mas, mesmo matrizes não nulas podem não ter inversa!

**Definição**

Uma matriz quadrada $A \neq \mathbb{0}$ para a qual existe uma matriz quadrada $B \neq \mathbb{0}$ satisfazendo $AB = \mathbb{0}$ ou $BA = \mathbb{0}$ diz-se um divisor de zero.

**Lema** - Se $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ é um divisor de zero então $A$ não tem inversa.

exemplo do PowerPoint.

Se $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tivesse inversa $B$: $B\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\left(B\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = B\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ absurdo.

**Lema** - Se $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tem inversa então ela é única.

Admitindo que $B$ e $C$ possam ser inversas de $A$ tem-se:

$$B = B\,\mathbb{1} = B(AC) = (BA)C = \mathbb{1} = C$$

ou seja, $B = C$.

▸ Tendo em conta o resultado anterior, se a inversa de $A$ exist, ela denota-se $A^{-1}$.

$Ax = B$ $\cancel{x = \frac{B}{A}}$ $A^{-1}B \vee BA^{-1}$ $A^{-1}$ $\cancel{\frac{1}{A}}$

$xA = B \Leftrightarrow x = BA^{-1}$

## Propriedades da inversa

1) $(A^{-1})^{-1} = A$
2) se $A$ tem inversa e $\alpha \neq 0$ então,

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$$

3) se $A, B$ têm inversa então

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

4) se $A$ tem inversa então

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

5) se $B$ é tal que $AB = \mathbb{1}$ então $BA = \mathbb{1}$ e assim $B = A^{-1}$. Se $B$ é tal que $BA = \mathbb{1}$ então $AB = \mathbb{1}$ e assim $B = A^{-1}$.

$$\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right)(\alpha A) = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right)A = \underbrace{\alpha\frac{1}{\alpha}}_{1}\underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(\mathbb{1}B) = B^{-1}B = \mathbb{1}$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = \mathbb{1}^T = \mathbb{1}$$

▸ Consideramos $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se $Nuc(A) \neq \{\mathbb{0}\}$ então $A$ não tem inversa.

Se $A$ tem inversa e $x \in Nuc(A)$ então $x = A^{-1}Ax = A^{-1}\mathbb{0} = \mathbb{0}$. Ou seja $Nuc(A) = \{\mathbb{0}\}$

$Nuc(A) = \{x : Ax = \mathbb{0}\}$

## Teorema

As matrizes elementares são invertíveis e as suas inversas são matrizes elementares. Mais precisamente:

1) $(E^{(i,j)})^{-1} = E^{(i,j)}$
2) $(E^{(i,j)}(\alpha))^{-1} = E^{(i,j)}(-\alpha)$
3) $(E^{(i)}(\alpha))^{-1} = E^{(i)}(\alpha)^{-1}$

## Teorema

A transposta de uma matriz elementar é uma matriz elementar. Mais precisamente:

1) $(E^{(i,j)})^{T} = E^{(i,j)}$
2) $(E^{(i,j)}(\alpha))^{T} = E^{(j,i)}(\alpha)$
3) $(E^{(i)}(\alpha))^{T} = E^{(i)}(\alpha)$

→ Se $Nuc(A) = \{0\}$ então A tem inversa.

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&1&2&0\\ 0&0&1&-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-L_2]{E^{(3,2)}(-1)} \begin{bmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&1&-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4-L_3]{E^{(4,3)}(-1)} \begin{bmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1 \end{bmatrix} \quad car = 4$$

$$\xrightarrow[(-1)L_4]{E^{(4)}(-1)} \begin{bmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1-L_4]{E^{(1,4)}(-1)} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2-L_3]{E^{(2,3)}(-1)} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$E^{(2,3)}(-1)\,E^{(1,4)}(-1)\,E^{(4)}(-1)\,E^{(4,3)}(-1)\,E^{(3,2)}(-1)\,A = \mathbb{1}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot \end{bmatrix}} \underset{A' \;=\; A^{-1}}{\begin{bmatrix} x&x&x\\ x&x&x\\ x&x&x \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}$$

$[A|\mathbb{1}]$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} & 1&0&0\\ A & 0&1&0\\ & 0&0&1 \end{array}\right] \underset{e.G}{\leadsto} \underset{\text{esc. linhas}}{\left[\begin{array}{c|ccc} A^* & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right]} \xrightarrow[\text{esc. linhas reduzida}]{} \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \underbrace{b_1^* \;\; b_2^* \;\; b_3^*}_{A^{-1}} \end{array}\right]$$

12/10/2022

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ é invertível se

- $car(A) = n$
- $Nuc(A) = \{x \mid Ax = 0\} = \{0\}$

$$\left[A \mid \mathbb{1}\right] \xrightarrow{a.e.G} \underbrace{\left[A^* \mid B^*\right]}_{\text{escada de linhas}} \xrightarrow{\text{se } A \text{ é invertível}} \underbrace{\left[\mathbb{1} \mid A^{-1}\right]}_{\text{escada de linhas reduzida}}$$

## Problema

2.18)

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad A = (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 - 2L_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[1/3 L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 + L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right]$$

$\mathbb{1}$ $\quad (A^{-1})^{-1} = A$

$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

c) $(8A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad 8A^T = ((8A^T)^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

$A^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ $\quad A = (A^T)^T = \left(\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right)^T = \frac{1}{8}\left(\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\right)^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

---

$\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ é solução do sistema $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$

?

$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ é solução do sistema $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right]$

---

d) $(\mathbb{1} - 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbb{1} - 2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow \mathbb{1} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = 2A \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right) = A \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} E^{(1,2)}\right)^{-1} = \underbrace{\left(E^{(1,2)}\right)^{-1}}_{E^{(1,2)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$

se conhecer a inversa de $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

→ $EA$ afeta as linhas de $A$

→ $AE$ afeta as colunas de $A$

2.19) $A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix}$ $\quad \mu \in \mathbb{R}$

a) $A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 3L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mu^2 - 12 & -2\mu \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 + (12-\mu^2) L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2(12-\mu^2) - 2\mu \end{bmatrix}$

$car(A_\mu) = 3$ se $2(12-\mu^2) - 2\mu \neq 0$

$car(A_\mu) = 2$ se $2(12-\mu^2) - 2\mu = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24 - 2\mu^2 - 2\mu = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu^2 + \mu - 12 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \mu = -4 \vee \mu = 3$

b) $\mu = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 + 11L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 11 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 11 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{20}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11/20 & -3/20 & 1/20 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 + 7L_3]{L_2 - 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/20 & -1/20 & 7/20 \\ 0 & 1 & 0 & -2/20 & 6/20 & -2/20 \\ 0 & 0 & 1 & 11/20 & -3/20 & 1/20 \end{array}\right]$$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 7 \\ -2 & 6 & -2 \\ 11 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.20) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 - L_3]{L_2 - L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(the right-hand block is labelled $A^{-1}$)

b) $A^2 u = [1\ 2\ 3]^T = \left[\begin{array}{c|c} A^2 & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}\right]$ $\quad A^2 u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u = (A^2)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u = (A^{-1})(A^{-1})\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u = \frac{1}{4}\Big[$$

# Problemas

14/10/2022

## Exercícios capítulo 1

40) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + 5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{I}$$

$E^{(2,1)}(5) \qquad E^{(2,3)} \qquad E^{(2)}(-\frac{1}{2}) \qquad E^{(2)}(-\frac{1}{2})E^{(2,3)}E^{(2,1)}(5)A = \underline{I}$

$E$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3$$

b) $A^{-1}A = \mathbb{1} \Rightarrow A^{-1} = E_3 E_2 E_1$

$A^{-1} = E^{(1)}(-1/2) E^{(2,3)} E^{(2,1)}(5)$

c) $A = (A^{-1})^{-1} = (E^{(2,1)}(5))^{-1} (E^{(2,3)})^{-1} (E^{(2)}(-1/2))^{-1} = E^{(2,1)}(-5) E^{(2,3)} E^{(2)}(-2)$ $\quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(2 \to) \underbrace{L_2 + 5L_1}_{L_2} + (-5L_1)$ as inversas das matrizes elementares são as que cancelam o efeito

46) A idempotente, i.e. $A^2 = A$

a) $(\mathbb{1} - A)^2 = (\mathbb{1} - A)(\mathbb{1} - A) = \mathbb{1}^2 - 2\mathbb{1}A + A^2 = \mathbb{1} - 2A + A = \mathbb{1} - A$, c.q.m.

b) $(\mathbb{1} - 2A)^2 = \mathbb{1}^2 - 2\mathbb{1}(2A) + (2A)^2 = \mathbb{1} \underbrace{- 4A + 4A^2}_{=0} = \mathbb{1}$

$(\mathbb{1} - 2A)(\mathbb{1} - 2A) = (\mathbb{1} - 2A)^2 = \mathbb{1}$
logo $(\mathbb{1} - 2A)$ é invertível

$(\mathbb{1} - 2A)^{-1} = (\mathbb{1} - 2A)$

Nem sempre se pode usar os casos notáveis.
Se soubermos que $AB = BA$ podemos usar os casos notáveis
$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
$\pm xy \pm yx$

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
$xy - yx$

$\alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

47) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad AB = A - B$

a) $(A + \mathbb{1})(\mathbb{1} - B) = (A + \mathbb{1})\mathbb{1} - (A + \mathbb{1})B = A + \mathbb{1} - (AB + \mathbb{1}B) = A + \mathbb{1} - AB - B = \mathbb{1} + \underbrace{(A - B) - AB}_{=0} = \mathbb{1}$

b) $\mathbb{1} = (\mathbb{1} - B)(A + \mathbb{1}) = (\mathbb{1} - B)A + \mathbb{1} - B = A - BA + \mathbb{1} - B = \mathbb{1} - BA + AB$

$\mathbb{1} = AB - BA \equiv AB = BA$

# Espaços Lineares

17/11/2022

Um espaço linear, V, sobre $\mathbb{K}$, consiste num conjunto não vazio V, cujos elementos se designam genericamente de vetores, equipado com operações de adição de vetores e de multiplicação por escalar (i.e., um membro de $\mathbb{K}$).

A adição de vetores associa a cada par de vetores $(u, v) \in V^2$ um vetor de V, que se designa de soma de u com v e que se denota por $u + v$.

A operação de multiplicação por escalar faz corresponder a cada par $(\alpha, v) \in \mathbb{K} \times V$ um vetor que se designa de multiplicação do escalar $\alpha$ pelo vetor v e se denota $\alpha v$. Um vetor da forma $\alpha v$ diz-se um múltiplo escalar de v ou simplesmente, um múltiplo de v.

Devem ainda ser verdadeiros os seguintes axiomas de espaço linear, descritos a seguir.

## Axiomas de espaço linear

1) $x + y = y + x$ (a adição de vetores é comutativa);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (a adição de vectores é associativa);

3) Existe um vetor $u$ tal que, dado qualquer outro vector $x$, se tem $x + u = x$ (ou seja, existe um elemento neutro para a adição);
vetor nulo