4) Para cada vetor x, existe um vetor y tal que $x+y=\mathbf{0}$ (existência de simétrico);

5) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (distributividade do produto por escalar relativamente à adição de escalares);

6) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (distributividade do produto por escalar relativamente à adição de vetores);

7) $1x=x$;

8) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$.

ex:

$X^2=\{(x,y): x\in X$ e $y\in X$

$X^n=\{(x_1,\dots,x_n): x_1,\dots,x_n\in X\}$

$X^1=X$

$\sim\{\underset{\sim x}{(x)}: x\in X\}$

$\mathbb{R}^2$: $(x,y)+(z,w)=(x+z,y+w)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}$$

$\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$

$$\alpha\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

Propriedades elementares

1) $0x=\mathbf{0}$

2) $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$

3) Se $\alpha x=\mathbf{0}$ e $x\neq\mathbf{0}$ então $\alpha=0$.

4) Se $x\neq\mathbf{0}$ então, $\alpha x=\beta x$ se e só se $\alpha=\beta$.

5) Se $\alpha\neq0$ e $\alpha x=\mathbf{0}$ então, $x=\mathbf{0}$.

6) Se $\alpha\neq0$ então, $\alpha x=\alpha y$ se e só se $x=y$

7) $(-1)x=-x$

Definição:

Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $v_1,\dots,v_n\in V$ vetores em V. Uma combinação linear dos vetores $v_1,\dots,v_n$ é uma soma da forma:

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$$

onde $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$. Um vetor $x\in V$ é uma combinação linear de $v_1,\dots,v_n$ se existem escalares $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ tais que $x=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$.

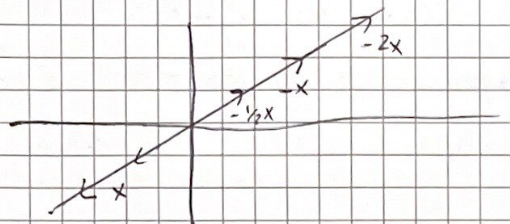
O conjunto de todos os vetores que são combinações lineares de $v_1,\dots,v_n$, denota-se por:

$$L_V(\{v_1,\dots,v_n\})$$

E designa-se de expansão linear de $\{v_1,\dots,v_n\}$ em V.

Por convenção definimos $L_V(\emptyset)=\{0\}$

$L_{\mathbb{R}^2}(\{x\})=\{\alpha x:\alpha\in\mathbb{R}\}$



$y\in L_{\mathbb{R}^2}(\{x\}) \Rightarrow y=\eta x$

$L_{\mathbb{R}^2}(\{x,y\})=\{\alpha x+\beta y:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

$=\{\alpha x+\beta(\eta x):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

$=\{(\underbrace{\alpha+\beta\eta}_{\in\mathbb{R}})x:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ $\Rightarrow$

$=\{\gamma x:\gamma\in\mathbb{R}\}$ $L_{\mathbb{R}^2}(\{x\})$

Combinações lineares (factos importantes)

O sistema $[A|b]$ é possível se e só se b é combinação linear das colunas de A.

Em particular, se $v, x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}^n$ então $v\in L_{\mathbb{K}^n}(\{x_1,\dots,x_n\})$ se e só se o sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & v \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$ é possível

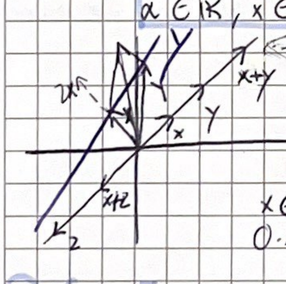
→ Os espaços lineares $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{n\times 1}$ e $\mathbb{K}^{1\times n}$ são essencialmente equivalentes, i.e. do ponto de vista da álgebra linear é indiferente trabalhar com o n-úplo $(x_1,\dots,x_n)$, com o vetor linha $[x_1\dots x_n]$ ou com o vetor coluna $[x_1\dots x_n]^T$. ←

subespaço de um espaço linear

13/10/2022

Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto não vazio $X\subset V$ diz-se fechado para as operações de espaço linear (de V) se:

$$\boxed{\begin{array}{l} x,y\in X \Rightarrow x+y\in X \\ \alpha\in\mathbb{K},\ x\in X \Rightarrow \alpha x\in X \end{array}}$$



$X=L_{\mathbb{R}^2}(\{x\})$

$\beta(\alpha x)=(\beta\alpha)x\in X$

$\alpha x+\beta x=(\alpha+\beta)x\in X$

$x\in Y$

$0\cdot x=0$

Definição

Sejam V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e W um subconjunto não vazio de V fechado para as operações de espaço linear (de V). Dizemos que W é um subespaço linear de V ou simplesmente um subespaço de V se, com as operações de V, se tem que W é um espaço linear.

Acontece que, se W é fechado para as operações em V isso é já suficiente para garantir que é um espaço linear e, consequentemente, é um subespaço de V.

As operações efetuam-se da mesma forma em V e W e, a maioria dos axiomas de espaço linear são universais. Assim todos os elementos de V satisfazem esses axiomas, em particular também os de W os satisfazem.

As excepções são a existência de simétrico, para cada vetor, bem como a existência de elemento neutro para a soma. No entanto tem-se:

$$x \in W \Rightarrow (-1)x = -x \in X$$
$$x \in W \Rightarrow 0x = \mathbb{0} \in W$$

Teorema

Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto $W \subset V$ é um subespaço de V se e só se:

$$\mathbb{0} \in W$$
$$y, y \in W \Rightarrow x + y \in W$$
$$\alpha \in \mathbb{K}, x \in W \Rightarrow \alpha x \in W$$

Ou se:

$$\mathbb{0} \in W$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in W \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$$

Escrevemos $\boxed{W \leq V}$ para indicar que W é um subespaço de V.

- Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ então $\{\mathbb{0}\} < V$ e $V \leq V$.
- Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $X \subset V$ então, $L_V(X) \leq V$.

$X \subset V$

$X = \emptyset$ $\qquad$ $L_V(\emptyset) = \{\mathbb{0}\} \leq V$

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ $\qquad$ $L_V(\{x_1, x_2, x_3\})$

$$\mathbb{0} = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \in L_V(\{x_1, x_2, x_3\})$$

$$x, y \in L_V(\{x_1, x_2, x_3\})$$

$$\alpha x + \beta y = \alpha(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3) + \beta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) = (\alpha\eta_1 + \beta\xi_1)x_1 + (\alpha\eta_2 + \beta\xi_2)x_2 +$$
$$+ (\alpha\eta_3 + \beta\xi_3)x_3 \longleftarrow L_V(\{x_1, x_2, x_3\})$$

$x \downarrow \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3$

$y \rightarrow \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$

Se $W \leq V$ e $X \subset V$ é tal que $W = L_V(X)$ dizemos que X é um conjunto gerador de W.

Tem-se que:

- Se $X \subset Y$ então $L_V(X) \leq L_V(Y)$
- Se $w \in L_V(X)$ então $L_V(X \cup \{w\}) = L_V(X)$

$w \in L_V(\{x\}) \longleftarrow (\alpha+\beta\eta)x$

$w = \eta x \quad \underline{L_V(\{x, w\})}$

$\downarrow$

$\alpha x + \beta w = \alpha x + \beta(\eta x) = \alpha x + (\beta\eta)x$

Seja $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. O espaço das colunas de A é:

$$EC(A) = L_{\mathbb{K}^{m\times 1}}(\{A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}\}) \leq \mathbb{K}^{m \times 1}$$

Ou, tendo em conta a identificação de n-úplos com vetores coluna:

$$EC(A) = L_{\mathbb{K}^m}(\{A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}\}) \leq \mathbb{K}^m$$

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$EC(A) = L_{\mathbb{R}^{2\times 1}}\left(\left\{\overset{(1,1)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{(2,2)}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}\right\}\right) \leq \mathbb{R}^{2\times 1}$$

$$\| $$

$$L_{\mathbb{R}^2}(\{(1,1),(2,2)\}) \leq \mathbb{R}^2$$

$(2,2) = 2(1,1) \Rightarrow (2,2) \in L_{\mathbb{R}^2} = \{(1,1)\}$

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

existem α, β, γ tais que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{sse:}$$

o sistema $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 1 & -1 & 2 & w \end{array}\right]$ é possível

Seja $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. O espaço das linhas de A é:

$$EL(A) = L_{\mathbb{K}^{1\times n}}(\{A_{1,*}, \ldots, A_{m,*}\}) \leq \mathbb{K}^{1 \times n}$$

Ou, tendo em conta a identificação de n-úplos com vetores linha:

$$EL(A) = L_{\mathbb{K}^n}(\{A_{1,*}, \ldots, A_{m,*}\}) \leq \mathbb{K}^n$$

$\mathbb{K}^n = L_{\mathbb{K}^n}(\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\})$

$\mathbb{R}^3 = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,\dots,1)$

$\mathbb{R}^{2\times3} = L_{\mathbb{R}^{2\times3}}(\{E(1,1), E(1,2), E(1,3), E(2,1), E(2,2), E(2,3)\})$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = x\overset{=E(1,1)}{\begin{bmatrix} x1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} + y\overset{=E(1,2)}{\begin{bmatrix} 0 & \overset{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} + z\overset{=E(1,3)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & z1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} + u\overset{=E(2,1)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} + v\overset{=E(2,1)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v1 & 0 \end{bmatrix}} + w\overset{=E(2,3)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w1 \end{bmatrix}}$$

Problemas

21/10/2022

Exercícios capítulo 2

✓ 54) subespaço de $\mathbb{R}^3$

$X \subset V \quad L_V(X) \leq V$

a) $A = \{(a,0,0) : a \in \mathbb{R}\} = \{a(1,0,0) : a \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0)\}) \leq \mathbb{R}^3$

$(0,0,0) \in A$

é subespaço de $\mathbb{R}^3$

$(x,0,0) + (y,0,0) = (x+y,0,0) \in A$

$\alpha(x,0,0) = (\alpha x,0,0) \in A$

b) $B = \{(a,1,1) : a \in \mathbb{R}\}$ n é subespaço pq $(0,0,0) \notin B$

c) $C = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = a+c\} \overset{\circledast}{=} \{(a,b,c) : a-b+c=0\} = \mathrm{Nuc}([1\ -1\ 1])$

$(0,0,0) \in C$

$(x,y,z) + (u,v,w) = (x+u, y+v, z+w)$ $\quad (x+u)+(z+w) = (x+z)+(u+w) = y+v$ ✓

$\Rightarrow \in C$

$\downarrow \quad \downarrow \in C$

$y = x+z \quad v = u+w$

$\uparrow$

é subespaço de $\mathbb{R}^3$

$\alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ $\quad \alpha x + \alpha z = \alpha(x+z) = \alpha y$ ✓

$\Rightarrow \in C$

$\circledast = \{(a, a+c, c) : a,c \in \mathbb{R}\} = \{(a,a,0) + (0,c,c) : a,c \in \mathbb{R}\} =$
$= \{a(1,1,0) + c(0,1,1) ; a,c \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,1,1)\}) \leq \mathbb{R}^3$

$\mathrm{Nuc}(A) = \{x : Ax = \mathbb{0}\}$

$A\mathbb{0} = \mathbb{0}$

$x+y \in \mathrm{Nuc}(A)$ $\quad A(x+y) = \underset{\overset{\shortparallel}{\mathbb{0}}}{\underline{Ax}} + \underset{\overset{\shortparallel}{\mathbb{0}}}{\underline{Ay}} = \mathbb{0}$ $\quad A(\alpha x) = \alpha \underset{\overset{\shortparallel}{\mathbb{0}}}{\underline{Ax}} = \alpha\mathbb{0} = \mathbb{0}$

$\in \mathrm{Nuc}(A)$

$\mathrm{Nuc}(A) \leq \mathbb{R}^{?}$ $\xrightarrow{}$ nº de colunas de A

e) $E = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = a+c+1\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : -a+b-c=1\}$

$(0,0,0) \notin E$

não é subespaço $\quad \{(a,b,c) : a^2 = 1\}$

um subespaço só vai ser caracterizado por equações lineares

d) $D = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a,b,c \in \mathbb{Z}\}$

n é subespaço

$(0,0,0) \in D$

$(x,y,z) + (u,v,w) = (x+u, y+v, w+z) \in D$

$\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\alpha}(x,y,z) =$ $\quad \frac{1}{2}\underset{\in D}{\underbrace{(1,0,0)}} = \underset{\notin D}{\underbrace{(\frac{1}{2},0,0)}}$

a união raramente é um subespaço

58)

✓c) $W = L_{\mathbb{R}}(\{(1,0,1)\}) \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=z\}$

Se $U, W \leq V$
então $U \cup W \leq V$
sse $U \subset W$ ou $W \subset U$

$U \leq V$
$L_V(X) \subset U \Leftrightarrow X \subset U$

é subespaço

$L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,1)\}) \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=z\}$

$\Leftrightarrow (1,0,1) \underset{\checkmark}{\in} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=z\}$

24/10/2022

Espaços lineares de dimensão finita

Definição

Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que V é um espaço linear de dimensão finita se existe um conjunto finito de vetores $\{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ tal que $V = L_V(\{x_1, \dots, x_n\})$ ou seja, qualquer vetor em V é uma combinação linear dos vetores $x_1, \dots, x_n$.

→ No curso consideraremos apenas espaços de dimensão finita. ←

Os espaços $\mathbb{K}^n$ são espaços lineares de dimensão finita.

Tem-se $\mathbb{K}^n = L_{\mathbb{K}^n}(\{e_1, \dots, e_n\})$ onde:

$$e_1 = (1,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,\dots,0),\ \dots,\ e_n = (0,0,\dots,1)$$

Com efeito:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1(1,0,\dots,0) + \alpha_2(0,1,\dots,0) + \dots + \alpha_n(0,0,\dots,1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

Os espaços $\mathbb{K}^{m\times n}$ são espaços lineares de dimensão finita.
Tem-se $\mathbb{K}^{m\times n} = L_{\mathbb{K}^{m\times n}}(\{E^{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\})$ onde $E^{i,j}$ é a matriz que se obtém da matriz nula colocando 1 na posição (i,j). No caso de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, por exemplo, tem-se:

$$E^{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E^{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E^{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E^{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e,}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = aE^{1,1} + bE^{1,2} + cE^{3,1} + dE^{2,2}$$

O conjunto dos polinómios de grau $\leq n$, numa variável, x, e com coeficientes em $\mathbb{K}$, denota-se $\mathbb{K}_n[x]$. Tem-se que $\mathbb{K}_n[x] \overset{\mathbb{K}}{\leq} \mathbb{K}$.
O espaço $\mathbb{K}_n[x]$ tem dimensão finita:

$$\mathbb{K}_n[x] = L_{\mathbb{K}_n[x]}(\{x^0, x^1, \dots, x^n\})$$

Esse facto é completamente trivial pois, tendo em conta a definição das operações de adição de funções e multiplicação de um escalar por uma função tem-se que:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = (a_0 \cdot x^0) + (a_1 \cdot x^1) + \dots + (a_n \cdot x^n)$$

O conjunto dos polinómios de grau arbitrário, numa variável, x, e com coeficientes em $\mathbb{K}$, denota-se $\mathbb{K}[x]$. Tem-se que $\mathbb{K}[x] \leq^{\mathbb{K}} \mathbb{K}$. De facto,

$$\mathbb{K}[x] = L_{\mathbb{K}[x]}(\{x^0, x^1, x^2, \dots\})$$

Mas, o espaço $\mathbb{K}[x]$ não tem dimensão finita.

$$gr(-x^2+2x-1)=2 \qquad gr(1)=gr(1x^0)=0$$

$$gr(\alpha\, p(x)) \leq gr(p(x)) \qquad gr(p(x)+q(x)) \leq \max\{gr(p(x)), gr(q(x))\}$$

$$(x^2+1)+(-x^2+1)$$

Bases e dimensão

Recorde-se que V é um espaço de dimensão finita se $V = L_V(X)$ para algum $X \subset V$, finito.

Uma interessante questão é a seguinte:

→ Se V é um espaço de dimensão finita, qual é a menor cardinalidade possível de um conjunto gerador de V? ◄-

$L_V(\{x, \alpha x\})$ $\qquad \eta x + \theta(\alpha x) = \eta x + (\theta\alpha)x = (\eta + \theta\alpha)x$

Definição

Sejam, V um espaço linear e $x_1, \dots, x_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ é linearmente dependente, ou que os vetores $x_1, \dots, x_n$ são linearmente dependentes se existe algum $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_i \in L_V(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\})$, ou seja, se algum vetor x_i se pode escrever como combinação linear dos restantes.

Um conjunto de vetores que não é linearmente dependente diz-se linearmente independente.

Teorema

Sejam V um espaço linear e $\{x_1, \dots, x_n\} \subset V$. Tem-se que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é linearmente dependente se existem escalares, não todos nulos, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \textcircled{0}$$

caso contrário, ou seja, se a única forma de obter $\textcircled{0}$ como combinação linear dos vetores $x_1, \dots, x_n$ for, considerando os coeficientes da combinação linear todos nulos, o conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ diz-se linearmente independente.

ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é determinado
os vetores são linearmente independentes

$\mathbb{R}_2[x]$ $\qquad \{x, x^2-x+1, x^2+x+1\}$

$$\underline{0} = \alpha x + \beta(x^2-x+1) + \gamma(x^2+x+1) = \alpha x + \beta x^2 - \beta x + \beta + \gamma x^2 + \gamma x + \gamma = (\beta+\gamma)x^2 + (\alpha-\beta+\gamma)x + (\beta+\gamma) \Leftrightarrow$$

$\Downarrow$

$0x^2+0x+0$

*

$0x^3 + ax^2 + bx + c = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma + \delta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = a \\ \gamma = b \\ \delta = c \end{cases}$

* c) $\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ vetores linearmente dependentes

Definição

Sejam, V um espaço linear e X um conjunto gerador de V. Se X é linearmente independente então X diz-se uma base de V. Uma base ordenada de V é um n-úplo $(v_1, \dots, v_n)$ em que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V.

(Note-se que uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$, de V, determina n! bases ordenadas distintas)

Teorema

Se $V = L_V(X)$ então, existe $Y \subset X$ tal que Y é uma base de V. Desta forma todo o espaço linear tem uma base.

ex:

base de $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = L_{\mathbb{R}^2}(\{(1,0),(0,1)\}) \longrightarrow \begin{array}{l} \beta_1 = ((1,0),(0,1)) \\ \beta_2 = ((0,1),(1,0)) \end{array}$

$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ é det.

$\{x\}$ $x \neq 0$ é linearmente independente

$\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

$\{0\}$ é linearmente dependente

$\alpha 0 = 0$

Teorema

Seja V um espaço linear. Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_m\}$ são bases de V então, $m = n$. Ou seja as bases de V têm todas as mesmas quantidades de elementos (a mesma cardinalidade)

Definição

Seja V um espaço linear. A dimensão de V, que se denota dim(V), é o número de elementos que integram uma qualquer base de V. Convencionalmente, $\dim(\{0\}) = 0$

Tem-se então que:

$\dim(\mathbb{K}^n) = n$,
$\dim(\mathbb{K}^{m \times n}) = mn$,
$\dim(\mathbb{K}_n[x]) = n+1$.

Teorema

Seja V um espaço linear. Se $X \subset V$ é linearmente independente então, existe uma base Y tal que $X \subset Y$.

➔ Ou seja, todo o conjunto linearmente independente pode ser completado até se obter uma base. ◄

Teorema

Seja V um espaço linear com dimensão n. Se $\{x_1, \dots, x_k\} \subset V$ e $k > n$ então, o conjunto $\{x_1, \dots, x_k\}$ é linearmente dependente.

➔ Num espaço de dimensão n, mais que n vetores são necessariamente linearmente dependentes. ◄

Teorema

Seja V um espaço linear com dimensão n. Se $X \subset V$ é linearmente independente e tem n vetores, então, X é uma base de V.

➔ Num espaço de dimensão n, quaisquer n vetores linearmente independentes constituem uma base. ◄

Teorema

Se $W \leq V$ e V é um espaço de dimensão finita então, W é um espaço de dimensão finita e $\dim(W) \leq \dim(V)$; se W é não-trivial então, $1 \leq \dim(W) < \dim(V)$.

26/10/2022

$\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V
se
(1) $V = L_V(\{u_1, \dots, u_n\})$ e,
(2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente i.e. $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n =$ ⓪ sse $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Bases e Dimensão

Teorema

Se V é um espaço linear e $X = \{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V então, qualquer $x \in V$ pode ser escrito de forma única como uma combinação linear dos vetores em X.

ex:

Suponhamos que $\{e_1, e_2\}$ é base de V.

$X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \Leftrightarrow \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2 =$ ⓪ $\Leftrightarrow (\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 =$ ⓪ $\Leftrightarrow$

e_1, e_2 são linearmente independentes

$\Leftrightarrow \alpha_1 - \beta_1 = 0$ e $\alpha_2 - \beta_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1$ e $\alpha_2 = \beta_2$

$X \in V$ pode ser identificado com $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

Teorema

Seja A^* uma matriz que se obtém de A através da aplicação de uma sequência de operações elementares.
Nestas condições $EL(A) = EL(A^*)$.

Em particular, se A^* é uma matriz em escada de linhas então as linhas com pivôs constituem uma base para $EL(A^*)$ (e também para $EL(A)$).

➡ Em certos casos interessa-nos obter uma base constituída por linhas da matriz original. Podemos então aplicar o seguinte:

Teorema

Seja A^* uma matriz em escada de linhas que se obtém de A através da aplicação de uma sequência de operações elementares. Nestas condições, as linhas de A que (a menos de eventuais trocas de linhas) correspondem às linhas de A^* com pivôs, são uma base de $EL(A)$.

Teorema

Seja A^* uma matriz em escada de linhas que se obtém de A através da aplicação de uma sequência de operações elementares. Nestas condições, as colunas de A que correspondem a A^* que contém os pivôs são uma base de $EC(A)$.

➡ Observe-se que o método de eliminação de Gauss não preserva o espaço das colunas, pelo que já não é possível fazer escolhas na matriz original.

Problema 3.8.

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}$$

a) $W=\{(x,y,z): x-2y+3z=0\}=\{(x,y,z): x=2y-3z\}=\{(2y-3z,y,z): y,z\in\mathbb{R}\}=$

$=\{(2y,y,0)+(-3z,0,z): y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(2,1,0)+z(-3,0,1): y,z\in\mathbb{R}\}=$

$=L_{\mathbb{R}^3}(\{\underbrace{(2,1,0),(-3,0,1)}_{\text{base}}\})$

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-2L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2\leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+3L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$y=1, z=0: (2,1,0)$
$y=0, z=1: (-3,0,1)$

vetor de coordenadas $=(2,1)$

$(1,2,1)=2(2,1,0)+1(-3,0,1)$ $\qquad$ $B=((2,1,0),(-3,0,1))$

Problema 3.9.

$$W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y+2z-w=0 \wedge -x+z=0\}$$

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1-L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \to$ $x=z$
$y=3z-w$

$W=\{(z,3z-w,z,w): z,w\in\mathbb{R}\}=L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,3,1,0),(0,-1,0,1)\})$

$B=((1,3,1,0),(0,-1,0,1))$ $\qquad$ dimensão: 2

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-3L_1 \\ L_3-L_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4+L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ vetor de coordenadas $= (1,1)$

Relações entre as dimensões dos espaços das linhas e das colunas de uma matriz

Teorema

Seja $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ uma matriz. Tem-se que a dimensão do espaço das linhas de A coincide com a dimensão do espaço das colunas de A e ambos coincidem com a característica de A. Assim tem-se que:

$$car(A) = dim(EL(A)) = dim(EC(A))$$

Problema 3.16.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$car = 3 = dim(EL(A)) = dim(EC(A))$

$Au = b \Leftrightarrow u = A^{-1} b$

R.: (D)

Problema 3.21.

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$ a é falsa

b e d são vetores independentes mas b $(1,2,0)$ n̄ faz parte do espaço linear c é falsa a dimensão vai ser 2

R.: (d)

Nulidade de uma matriz

Definição

Seja $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ uma matriz. A nulidade de A, que se denota $nul(A)$, é a dimensão do núcleo de A.

Teorema

Seja $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ uma matriz. Tem-se que:

$$n = car(A) + nul(A)$$

→ Ou seja, a soma da nulidade com a característica de uma matriz iguala o número das suas colunas.

Problema 3.22.

→ $\{(1,1,0,0), (1,0,2,1)\}$ (a) é verdade sse $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$ é possível

(c) é verdadeira

(b) é verdadeira

(d)

Problemas

28/10/2022

Exercícios capítulo 2

59) $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ I- $\dim(Nuc(A^T)) = 3 = nul(A^T)$ $p=?$ $q=?$

II- $v \underset{\notin}{\in} \mathbb{R}^p$ $EL(A^T) = EC(A)$

III- $\dim(Nuc(A)) = 4$

$q =$ nº colunas de $A = \overset{\overset{①}{dim(EC(A))}}{car(A)} + \overset{④}{nul(A)} = 5$

$p =$ nº colunas de $A^T = \underset{dim(EL(A^T)) = ①}{car(A^T)} + \underset{③}{nul(A^T)} = 4$

Teor $\dim(EL(A)) = \dim(EC(A)) = car(A)$

Def $nul(A) = \dim(Nuc(A))$

Teor nº colunas $A = car(A) + nul(A)$

válido em geral

Teor. $\boxed{car(A) = car(A^T)}$

R.: (C)

62) $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in V$, $W = Lv(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\})$ Sabendo que:

(a) $v_2 \notin Lv(\{v_1\})$, (b) $2v_1 - 3v_2 + 2v_3 = 0$, (c) $v_4 \notin Lv(\{v_1, v_2, v_3\})$, (d) $v_5 \notin Lv(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$

Qual a dimensão de W?

$-2v_3 = 2v_1 - 3v_2$

$v_3 = -v_1 + 3/2\, v_2$

$\overset{l.ind.}{Lv(\{v_1\})} \subsetneq \overset{l.ind}{Lv(\{v_1, v_2\})} = Lv(\{v_1, v_2, v_3\})$ $\dim(W) = 4$

$\underset{\text{é lin. indep}}{\{v_1, v_2, v_4\}}$ $Lv(\underbrace{\{v_1, v_2, v_4, v_5\}}_{\text{é lin. indep.}}) = W$

R.: (B)

67) $S \overset{\to S \text{ é subespaço}}{\leq} \mathbb{R}^{3\times 3}$ matrizes triang. sup. com traço nulo. Qual a dimensão de S?

$$\left\{\begin{bmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{bmatrix} : a+d+f=0\right\} = \left\{\begin{bmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&-a-d\end{bmatrix} : a,b,c,d,e \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}? \begin{bmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&-a-d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&0\\0&0&-a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&b&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&c\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0\\0&d&0\\0&0&-d\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&e\\0&0&0\end{bmatrix} =$$

$$= a\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} + e\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\dim(S) = 5$

R.: (C)

68) $$A = \begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&-2\\1&2&-3\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-L_1\\L_3-L_1}]{} \begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&1&-2\end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-L_2]{} \begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$ $car(A) = 3$

A é invertível $Au = b \Leftrightarrow u = A^{-1}b$

R.: (D)

31/10/2022

Bases ordenadas e vetores de coordenadas

Definição

Uma base ordenada de um espaço linear V é uma base onde se fixa uma ordem para os vetores da base. Ou seja é uma sequência ordenada de vetores de V,

$$\beta = (v_1, \dots, v_n),$$

tal que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V.
Se $x \in V$, o vetor de coordenadas de x na base ordenada β é o (único) n-úplo $x_\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ que satisfaz:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

ex:

$\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

base canónica $\beta = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$

$\beta_1 = ((0,1,0), (0,0,1), (1,0,0))$

$$(x, y, z) = \underline{x}(1,0,0) + \underline{y}(0,1,0) + \underline{z}(0,0,1)$$

$(x,y,z)_\beta = (x, y, z)$
$(x,y,z)_{\beta_1} = (y, z, x)$

$\mathbb{R}_3[x]$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$\beta = (1, x, x^2, x^3)$
"x^0"

$(1 - x + x^2)_\beta = (1, -1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$
$1 - x + x^2 = \underline{1} \cdot 1 + \underline{(-1)} x + \underline{1} \cdot x^2 + \underline{0} \cdot x^3$

$\mathbb{R}_2[x]$

$\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ é uma base? $\{1, x, x^2\}$

$$a + bx + cx^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(1+x) + \gamma(1+x+x^2)$$

Se V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ é uma base ordenada de V então a correspondência $x \mapsto x_\beta$ é uma função bijetiva $V \to \mathbb{K}^n$. A inversa desta função é a função

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\beta = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Ou seja, tem-se:

$$(x_\beta)^\beta = x \text{ e } ((\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\beta)_\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$\beta = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ $(1, 2, 1)^\beta = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) + 1 \cdot (1+x, x^2)$

Em $\mathbb{R}^2$ $\beta = ((1,0),(1,1))$

(x,y) ↳ vetor

$(x,y)_\beta = (x-y, y)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & y \end{array}\right]$$

$\underbrace{(x-y,y)}_{\text{coordenadas}}$ $\quad (x-y,\ y)^{\beta} = ((x,y)_{\beta})^{\beta} = (x-y)(1,0) + y(1,1) =$

$= (x-y,\ 0) + (y,y) = (x,y)$

① Definição

Se $n = \dim V$ e V é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$, dizemos que $\mathbb{K}^n$ é o espaço de coordenadas de V. Ou seja, o espaço de coordenadas de um espaço linear V é $\mathbb{K}^{\dim V}$.

Por exemplo, os espaços de coordenadas de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{m\times n}$ e $\mathbb{K}_n[x]$ são, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{mn}$ e $\mathbb{K}^{n+1}$, respetivamente.

Vetores de coordenadas e combinações lineares

① Dados $x_1, \dots, x_n \in V$ tem-se:

$$(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)_{\beta} = \alpha_1 (x_1)_{\beta} + \dots + \alpha_n (x_n)_{\beta}$$

Analogamente, dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n$ tem-se:

$$(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)^{\beta} = \alpha_1 (x_1)^{\beta} + \dots + \alpha_n (x_n)^{\beta}$$

➡ Do ponto de vista da álgebra linear um vetor num espaço linear pode ser identificado com o respetivo vetor de coordenadas. ⬅

$\mathbb{R}_2[x]$ $\quad \{1, x, x^2\}$ $\quad B = (1, x, x^2)$

$\{\overset{(1,0,0)}{1},\ \underset{(1,1,0)}{1+x},\ \underset{(1,1,1)}{1+x+x^2}\}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Identificação dos vetores com os vetores de coordenadas

Mais especificamente sejam, V um espaço linear, cujo espaço de coordenadas é $\mathbb{K}^n$ e $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ uma proposição envolvendo apenas noções de álgebra linear. Então:

- para $x_1, \dots, x_m \in V$, tem-se que $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ é verdadeira em V se e só se $\Phi((x_1)_{\beta}, \dots, (x_m)_{\beta})$ é verdadeira em $\mathbb{K}^n$;
- para $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}^n$, tem-se que $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ é verdadeira em $\mathbb{K}^n$ se e só se $\Phi((x_1)^{\beta}, \dots, (x_m)^{\beta})$ é verdadeira em V.

ex:

Em $\mathbb{R}^{2\times2}$, $W = L_{\mathbb{R}^{2\times2}}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right)$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in W?$ $\quad \beta = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$\Updownarrow$

$(1,1,1,1) \in L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,-1,1,1), (1,1,0,2)\})$ $\quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{\beta} = (a,b,c,d)$

$\Updownarrow$

⇘ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$ é possível (fazendo a ñ é possível)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \quad X$$

Definição

Dados $X \subset V$ e $Y \subset \mathbb{K}^n$, definimos $X_\beta = \{x_\beta \mid x \in X\}$ e $Y^\beta = \{y^\beta \mid y \in Y\}$

Tem-se:

$X \leq V$ sse $X_\beta \leq \mathbb{K}^n$ e $Y \leq \mathbb{K}^n$ sse $Y^\beta \leq V$.

$X_1 \subset X_2$ sse $(X_1)^\beta \subset (X_2)^\beta$ e $Y_1 \subset Y_2$ sse $(Y_1)^\beta \subset (Y_2)^\beta$.

Se $x_1, \dots, x_n \in V$ então $(L_V(\{x_1, \dots, x_n\}))_\beta = L_{\mathbb{K}^n}(\{(x_1)_\beta, \dots, (x_n)_\beta\})$.

Se $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n$ então $(L_{\mathbb{K}^n}(\{x_1, \dots, x_n\}))^\beta = L_V(\{(x_1)^\beta, \dots, (x_n)^\beta\})$.

ex:

$W = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,1,1),(1,-1,0,-1),(0,2,1,2)\})$

$\|$ $\{(1,1,1,1),(0,-2,-1,-2)\}$ é uma base de W

$W^\beta = L_{\mathbb{R}^{2\times2}}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right)$

↳ vetores com coordenadas em W $\quad \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de W^β

$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_\beta = (a,b,c,d)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}_n[x] \qquad \beta = (1 = x^0, x, x^2, \dots, x^n)$

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)_\beta = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$

Matriz de mudança de base

- Se β_1 e β_2 são bases ordenadas de V, e se x_{β_1} é conhecido, como obter de modo efetivo x_{β_2}? ←

02/11/2022

matriz de mudança de base

Definição

A matriz de mudança da base ordenada $\beta_1 = (v_1, \dots, v_n)$ para base ordenada $\beta_2 = (w_1, \dots, w_n)$ é a única matriz A que possui a seguinte propriedade:

$$A x_{\beta_1} = x_{\beta_2}$$

Esta matriz denota-se por $[\beta_2,\beta_1]$ e as suas colunas são os vetores de coordenadas dos vetores da base β_1 na base β_2 ie. $(v_1)_{\beta_2},\dots,(v_n)_{\beta_2}$.

Ou seja, se $\beta_1=(v_1,\dots,v_n)$ então,

$$[\beta_2,\beta_1] = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ (v_1)_{\beta_1} & (v_2)_{\beta_2} & \cdots & (v_n)_{\beta_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$[\beta_1,\beta_2] = [\beta_2,\beta_1]^{-1}$$

$$[\beta_3,\beta_1] = [\beta_3,\beta_2][\beta_2,\beta_1)$$

$$x_{\beta_1} = \underbrace{\underbrace{[\beta_1,\beta_2][\beta_2,\beta_1]}_{\mathbb{1}}\;\underbrace{x_{\beta_1}}_{x_{\beta_2}}}_{x_{\beta_1}} = \mathbb{1}\,x_{\beta_1} \qquad x_{\beta_3} = \underbrace{\underbrace{[\beta_3,\beta_2]\underbrace{[\beta_2,\beta_1)\,x_{\beta_1}}_{x_{\beta_2}}}_{x_{\beta_3}}}_{[\beta_3,\beta_1]}$$

Problema

$\mathbb{R}^2 \quad \beta_1=((1,1),(1,-1)) \qquad \beta_2=((1,1),(2,3))$

1) $(x,y)_{\beta_1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y-x \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & \frac{x-y}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+\frac{y-x}{2} \to \frac{y+x}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x-y}{2} \end{array}\right]$

$= \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$

2) $[\beta_2,\beta_1] = \begin{bmatrix} | & | \\ (1,1)_{\beta_2} & (1,-1)_{\beta_2} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$(1,1)_{\beta_2} = (\alpha,\beta) = (1,0)$

$(1,1) = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\alpha}}(1,1) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\beta}}(2,3)$

$(1,-1)_{\beta_2} = (5,-2)$

$(1,-1) = 5(1,1) + (-2)(2,3)$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

3) $(x,y)_{\beta_2} = [\beta_2,\beta_1]\,(x,y)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(x+y+5(x-y), -2(x-y)\right)$

$\alpha . 1 + \beta(1+t) + \gamma(1+t^2) = 0$

1) $(\alpha+\beta+\gamma) + \beta t + \gamma t^2 = 0 \iff \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$

2) $1_{\beta can} = (1,0,0)$
$(1+t)_{\beta can} = (1,1,0)$
$(1+t^2)_{\beta can} = (1,0,1)$

$1 = 1 + 0t + 0t^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(x, y-x, 2x),\ x,y \in \mathbb{R} \qquad \{(1,-1,2),(0,1,0)\}$

Problema

$(2-t-3t^2)_\beta = (6,-1,-3)$

$$2-t-3t^2 = x.1 + y(1+t) + z(1+t^2)$$

$$2-t-3t^2 = (x+y+z) + yt + zt^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ y=-1 \\ z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=2 \\ y=-1 \\ z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \\ z=-3 \end{cases}$$

Interseção e soma de subespaços

Teorema

Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leq V$. A interseção de U e W é um subespaço de V. Dito de outra forma, a interseção de dois subespaços de um espaço é ainda um subespaço.

- Se $U, W \leq V$ então $U \cap W$ é o maior subespaço contido em U e em W.
- Se queremos descrever o menor subespaço que contém U e W precisamos de uma ideia nova.

Definição

Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leq V$. A soma dos subespaços U e W, que se denota $U+W$ consiste nos vetores da forma $u+w$ onde $u \in U$ e $w \in W$. Ou seja,

$$U+W = \{u+w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}$$

Teorema

Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leq V$. Tem-se que $U+W \leq V$. Além disso, tem-se ainda que $U \cup W \subset U+W$

Teorema

Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$. Tem-se:

$$L_V(\{x_1, \dots, x_n\}) + L_V(\{y_1, \dots, y_n\}) = L_V(\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\})$$

Ou seja, se X e Y são conjuntos de vetores em V tem-se:

$$L_V(X) + L_V(Y) = L_V(X \cup Y)$$

Problemas

04/11/2022

Exercícios do capítulo 2

81) $S = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}\right)$ $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ I. $\dim(S)=2$, II. $\dim(S)=3$, III. $A \in S$, IV. $A \notin S$

$\dim(S_\beta)=2$ $\dim(S_\beta)=3$ $(1,0,-1,1) \in S_\beta$ $(1,0,-1,1) \notin S_\beta$

$\beta = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$ $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}_\beta = (a,bc,d)$ $A_\beta = (1,0,-1,1)$

↳ base canónica de S

$S_\beta = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,-1,5),(1,2,-2,1),(1,-1,1,1)\})$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 9 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -24 & -16 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -24 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

I - F
II - V
III - F
IV - V

R: ①)

83) $\mathbb{R}_2[t]$

a) $\beta = (\overset{}{\underset{t^0}{1}}, t, t^2) \rightarrow$ base canónica $\qquad p(t) = (1-t)(1+t)$

$((1-t)(1+t))_{\beta_0} = (1-t^2)_{\beta_0} = (1,0,-1)$

b) $S = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\underbrace{\{1-2t, 1+t^2, 1+2t-3t^2, t^2\}}_{=X})$ verifique que X n é uma base de S e indique uma base ordenda de S

X tem 4 vetores e $\dim(\mathbb{R}_2[t]) = 3$ $\qquad \rightarrow \beta_1 = (1-2t, 1+t^2, 1+2t-3t^2)$

$S_{\beta_0} = L_{\mathbb{R}}(\{(1,-2,0),(1,0,1),(1,2,-3),(0,0,1)\}) \Rightarrow \dim = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \circled{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \circled{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \circled{-5} & 1 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = ((1,-2,0),(1,0,1),(1,2,-3))$

c) $p(t) = 5+t^2$

$\beta_0 = (1, t, t^2)$
$\beta_1 = (1-2t, 1+t^2, 1+2t-3t^2)$

① $\beta_0 = (1, t, t^2)$
determinar $(5+t^2)_{\beta_1}$ é equivalente a determinar as coordenadas
$(5,0,1)$ na base $(1,2,0),(1,0,1),(1,2,-3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & 0 & 13/5 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \end{array}\right]$$

② $5+t^2 = \alpha(1+2t) + \theta(1+t^2) + \eta(1+2t-3t^2)$
$5+t^2 = (\alpha+\theta+\eta) + (-2\alpha+2\eta)t + (\theta-3\eta)t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\theta+\eta = 5 \\ -2\alpha+2\eta = 0 \\ \theta-3\eta = 1 \end{cases}$

③ $(5+t^2)_{\beta_0} = (5,0,1)$
$(5+t^2)_{\beta_1} = [\beta_1, \beta_0] \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\beta_0, \beta_1]^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$[\beta_3,\beta_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Interseção e soma de subespaços

21/11/2022

Teorema

Sejam V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leq V$. A interseção de U e W é um subespaço de V. Dito de outra forma, a interseção de dois subespaços de um espaço é ainda um subespaço.

→ Se $U, W \leq V$ então $U \cap W$ é o maior subespaço contido em U e em W. ←

$x, y \Rightarrow x + y \in V$ Ⓘ V

$x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$ Ⓘ W

$L_V(\{u_1, \dots, u_n\})$

Nuc(A)

$V \cap W$ Ⓘ x, y

ex1:

$L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,1),(1,-1,0)\}) \overset{?}{=} \{(x,y,z) : \dots\}$

$\{(x,y,z) : x + y - 2z = 0\}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y-x \\ 0 & -1 & z-x \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x-z \\ 0 & -2 & y-x \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x-z \\ 0 & 0 & \underbrace{2x-2z+y-x}_{x+y-2z} \end{array}\right]$$

ex2:

$$\underset{\overset{\shortparallel}{L_{\mathbb{R}^3}(\{\dots\})}}{\overset{= Nuc([1\ -1\ 1])}{\{(x,y,z) : x - y + z = 0\}}} = \{(x, x+z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{(x,x,0) + (0,z,z) : x, z \in \mathbb{R}\} = *$$

$x - y + z = 0 \Leftrightarrow y = x + z$

$* = \{x(1,1,0) + z(0,1,1) : x, z \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(0,1,1)\})$

Sejam $U = L_{\mathbb{K}^n}(A)$ onde $A = \{u_1, \dots, u_r\}$ e $W = L_{\mathbb{K}^n}(B)$ onde $B = \{w_1, \dots, w_s\}$. Para determinar uma base de $U \cap W$ fazemos a seguinte observação:

$x \in U \cap W \Leftrightarrow (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s)\, x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = \beta_1 w_1 + \dots + w_s$ (2)

$\Leftrightarrow (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s)[x = \alpha_1 u_1 + \dots \alpha_r u_r \text{ e } \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r - \beta_1 w_1 - \dots - w_s = \mathbb{0}]$ (2)

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \dots \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s) \in Nuc([A|-B])$ e $x = A[\alpha_1 \dots \alpha_r]^T$

Para determinar uma base de $U \cap W$ seguimos então os seguintes passos:

1- Determinamos uma base para o núcleo da matriz

$$[A|-B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1 & \cdots & u_r & -w_1 & \cdots & -w_s \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right]$$

2- Essa base é da forma:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_r^1 \\ \beta_1^1 \\ \vdots \\ \beta_s^1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \alpha_1^n \\ \vdots \\ \alpha_r^n \\ \beta_1^n \\ \vdots \\ \beta_s^n \end{bmatrix} \right\}$$

3- A interseção $L_V(A) \cap L_V(B)$ é então gerada pelos vetores:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1 & \cdots & u_r \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_r^1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1 & \cdots & u_r \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^n \\ \vdots \\ \alpha_r^n \end{bmatrix} \right\}$$

4- A partir deste conjunto gerador pode obter-se uma base pelos métodos usuais.

Observação:

Na sequência dos slides anteriores, se o espaço W é gerado pelos vetores do conjunto $B = \{w_1, \dots, w_s\}$ então, também é gerado pelos vetores $B^* = \{-w_1, \dots, -w_s\}$. Desta forma, a determinação de uma base para a interseção $U \cap W$ pode passar pela determinação de uma base do núcleo de $[A \mid -B^*]$ que, como $-B^* = B$, corresponde à determinação de uma base do núcleo da matriz $[A \mid B]$.

ex 2 PowerPoint:

$U, W \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$

$U = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}\right)$ $W = L_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}\right)$

β = base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\dim(V \cap W) = \underbrace{\dim(V_\beta \cap W_\beta)}_{\dim \mathbb{R}^4}$

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{A}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{B}$

fazer eliminação Gauss
determinar núcleo → PowerPoint

Se $U, W \leq \mathbb{K}^n$, $U = Nuc(A)$ e $W = Nuc(B)$ então, $U \cap W = Nuc(A \,\bar{\wedge}\, B)$ onde $A \,\bar{\wedge}\, B$ é a matriz que se obtém aumentando a matriz A com as linhas da matriz B.

$\mathbb{R}^3$:

$V = \{(x,y,z) : x - y = 0\} = Nuc([1 \ -1 \ 0])$

$W = \{(x,y,z) : x + y + z = 0\} = Nuc([1 \ 1 \ 1])$

base para $V \cap W$? $V \cap W = Nuc\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$V \cap W = \{(x,y,z) : x - y = 0 \wedge x + y + z = 0\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Nuc}\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\right) = \{(x,y,z) : x = \tfrac{1}{2}z \wedge y = -\tfrac{1}{2}z\} =$$

$$= \{(\tfrac{1}{2}z, -\tfrac{1}{2}z, z) : z \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1)\}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(-1, 1, -2)\})$$

Definição

Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leq V$. A soma dos subespaços U e W, que se denota $U+W$ consiste nos vetores da forma $u+w$ onde $u \in U$ e $w \in W$. Ou seja,

$$U+W = \{u+w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}$$

Teorema

Sejam, V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leq V$. Tem-se que $U+W \leq V$. Além disso, tem-se ainda que $U \cup W \subset U+W$.

Teorema

Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$. Tem-se:

$$L_V(\{x_1, \dots, x_n\}) + L_V(\{y_1, \dots, y_m\}) = L_V(\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}).$$

Ou seja, se X e Y são conjuntos de vetores em V tem-se:

$$L_V(X) + L_V(Y) = L_V(X \cup Y)$$

$$L(\{x_1, x_2\}) + L(\{y_1, y_2, y_3\})$$

$$\downarrow$$

$$u = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3) =$$
$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3$$

somas diretas

Definição

Se $U, W \leq V$ a soma $U+W$ diz-se uma soma direta se $U \cap W = \{0\}$.

▸ Se a soma $U+W$ é direta representamo-la simbolicamense por $U \oplus W$. ◂

Teorema

Sejam $U, W \leq V$. Suponhamos ainda que a soma destes dois subespaços é direta. Nestas condições, qualquer $x \in U \oplus W$ é da forma $x = u+w$ sendo u, w únicos. Ou seja, se $u, \bar{u} \in U$ e $w, \bar{w} \in W$ então, $u+w = \bar{u}+\bar{w}$ se e só se $u = \bar{u}$ e $w = \bar{w}$.

Teorema

Sejam V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $U, W \leq V$. Tem-se a seguinte relação entre as dimensões de V, U e W:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Exercícios

② $U=\mathcal{L}_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1+t, 1+t^2\}) \leq \mathbb{R}_2[t]$ queremos W tal que $U \oplus W = \mathbb{R}_2[t]$
Fixando em $\mathbb{R}_2[t]$ a base canónica: (o espaço coord. de $\mathbb{R}_2[t]$ é $\mathbb{R}^3$)

$U_\beta = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0),(1,0,1)\})$ queremos W_β tal que $U_\beta \oplus W_\beta = \mathbb{R}^3$

encontrar vetor fora deste plano ver os que são combinações lineares e escolher um que não é

Problemas

21/11/2022

Exercícios do capítulo 2

85) Determine bases e dimensões de $U+W$ e $U \cap W$ e diga se as somas são diretas.

b) $U=\mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,-1,0),(0,1,1,0)\})$ e $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid -x+y-2w=0 \wedge 2y-z=0\}$

$$W=\{(x,y,z,w) \in -x+y-2w=0 \wedge 2y-z=0\}$$
$$=\{(x,y,z,w): y=\tfrac{1}{2}z, x=\tfrac{1}{2}z-2w\}=$$
$$=\{(\tfrac{1}{2}z-2w, \tfrac{1}{2}z, z, w): z,w\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,0),(-2,0,0,1)\})=$$
$$=\mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,2,0),(-2,0,0,1)\})$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -\tfrac{1}{2} & 2\\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$\dim(U)=\dim(W)=2$

$U=\mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\underbrace{\{(1,0,-1,0),(0,1,1,0)\}}_{\text{base}})$ $W=\mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\underbrace{\{(1,1,2,0),(-2,0,0,1)\}}_{\text{base}})$

$U+W=\mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\underbrace{\{(1,0,-1,0),(0,1,1,0),(1,1,2,0),(-2,0,0,1)\}}_{\text{base}}) = EL(A)$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

↳ base

$\dim(U+W)=4$

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$
$$4 \;=\; 2 \;+\; 2 \;-\; 0 \longrightarrow U\cap W=\{(0,0,0,0)\}$$

a soma é direta

c) $U=\mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(0,0,1,0),\underset{(1,0,0,1)}{(-2,0,0,-2)}\})$ $W=\{(x,y,z,w): x+2y-z-w=0 \wedge x-w=0\}$

$$=\{(x,y,z,w): x=w, y=\tfrac{1}{2}z\}=$$
$$=\{(x,\tfrac{1}{2}z,z,w): z,w\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,0,1),(0,\tfrac{1}{2},1,0)\})=$$
$$=\mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\underbrace{\{(1,0,0,1),(0,1,2,0)\}}_{B})$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -1 & -1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

Nuc(A|B])

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad\quad}^{A}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad\quad}^{B}} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\alpha & \beta & \gamma & \delta\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$Nuc([A|B])=\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta): \delta=0, \beta=-\gamma, \alpha=0\}=\{(0,-\gamma,-\gamma,0): \gamma\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(0,-1,1,0)\})$$

Um conjunto gerador de $U \cap W$ é $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \{(-1,0,0,-1)\}$

$U \cap W = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,0,1)\})$ $\dim(U \cap W) = 1$

$U + W = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(0,0,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,1),(0,1,2,0)\}) =$
$= \mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\underbrace{\{(0,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,2,0)\}}_{\text{base}})$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\dim(U+W) = 3$ $\dim(U) = \dim(W) = 2$

a soma não é direta

96)

a) $W_1 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A^T = -A\}$

$\mathbb{0}^T = \mathbb{0} = -\mathbb{0} \Rightarrow \mathbb{0} \in W_1$

$A, B \in W_1$

$(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$ ✓ é subespaço
$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -(\alpha A)$ ✓

b) $W_2 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} : A^T = A\} \leq \mathbb{K}^{n \times n}$ mostre que $\mathbb{K}^{n \times n} = W_1 \oplus W_2$
$\hookrightarrow$ a soma é direta

$W_1 \cap W_2 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \overset{?}{=} \mathbb{K}^{n \times n}$

$A \in W_1 \Rightarrow A^T = -A$
$A \in W_2 \Rightarrow A^T = A$ $\Rightarrow A \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow -A = A^T = A \equiv A = \mathbb{0}$

$\underbrace{1/2(A+A^T)}_{W_2} + \underbrace{1/2(A-A^T)}_{W_1} = 1/2(2A) = A$

$(1/2(A+A^T))^T = 1/2(A+A^T)^T = 1/2(A^T+A) = 1/2(A+A)$ a soma dá todo o espaço

23/11/2022

Transformações lineares

Definição

Se U e V são espaços lineares sobre $\mathbb{K}$ então, uma função $T: U \to V$ é uma transformação linear se, para quaisquer $x, y \in U$ e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tem:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

ou, em alternativa se:

$T(x+y) = T(x) + T(y)$ e $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

O conjunto das transformações lineares de U em V denota-se $Hom(U,V)$.

(A notação justifica-se porque uma transformação linear de U em V também se designa de homomorfismo de U em V.)

A transformação nula, $\mathbb{O}: U \to V$, que transforma qualquer vetor $x \in U$ em $\mathbb{O}_V$ (o vetor nulo de V) é linear.

A transformação identidade, $\mathbb{I}: U \to U$, definida por $\mathbb{I}(x) = x$, para todo o $x \in V$ é linear.

ex:

$$\mathbb{O}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$\mathbb{O}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{O}: U \to V$$

$$\mathbb{O}_V = \mathbb{O}(\alpha x + \beta y)$$

$$\shortparallel$$

$$\alpha \mathbb{O}_V + \beta \mathbb{O}_V = \alpha \mathbb{O}(x) + \beta \mathbb{O}(y)$$

$$\mathbb{I}(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha \mathbb{I}(x) + \beta \mathbb{I}(y)$$

Se $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ é uma matriz, a transformação $T_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por $T_A(x) = Ax$ é uma transformação linear.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

então $T_A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ é a transformação definida por:

$$T_A(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z + w \\ z - w \end{bmatrix} = (x+z+w, z-w)$$

A:

$$T_A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x) + A(\beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha T_A(x) + \beta T_A(y)$$

$$(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Propriedades básicas

Se $T: U \to V$ é linear então $T(\mathbb{O}_U) = \mathbb{O}_V$.

Se T é linear então $T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 T(x_1) + \dots + \alpha_n T(x_n)$.

Se $T: U \to V$ é linear então T transforma conjuntos linearmente dependentes em conjuntos linearmente dependentes i.e. se $\{x_1, \dots, x_n\} \subset U$ é linearmente dependente então $\{T(x_1), \dots, T(x_n)\}$ é linearmente dependente.

Nesta afirmação não se pode substituir linearmente dependente por linearmente independente.

Definição

Seja $T: U \to V$, uma transformação linear.

(1) Se $X \subset U$ é um conjunto não vazio de vetores então $T[X] = \{T(x) : x \in X\}$ (este conjunto diz-se a imagem direta de X através de T).