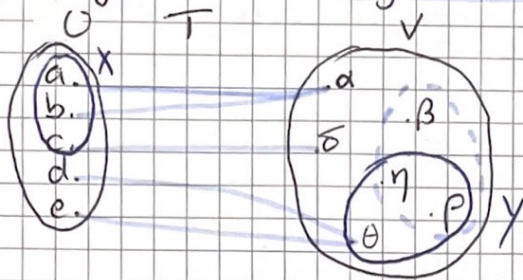


(2) Se  $Y \subset V$  é um conjunto não vazio de vetores então  $T^{-1}[Y] = \{x \in U : T(x) \in Y\}$   
 (este conjunto diz-se a **imagem inversa** de  $Y$  através de  $T$ ).



$$T^{-1}[\{\rho, \eta, \beta\}] = \emptyset$$

$$T^{-1}[Y] = \{e, d\}$$

$$T[X] = \{T(a), T(b), T(c)\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

### Teorema

Sejam,  $T: U \rightarrow V$  uma transformação linear,  $x_0, x_1 \in U$  e  $y_0, y_1 \in V$ . Tem-se:

$$(1) T[X] \subseteq V$$

$$(2) T^{-1}[Y] \subseteq U$$

Problema 4.2:

$$T: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T(v_1) = (1, -1, 2) \quad T(v_2) = (3, 3, 2) \quad T(v_3) = (-3, 1, 2)$$

$$T(3v_1 - v_2 + 10v_3) = 3T(v_1) - T(v_2) + 10T(v_3) = 3(1, -1, 2) - (3, 3, 2) + 10(-3, 1, 2) = (-30, 4, 24)$$

## Núcleo de uma transformação linear e injetividade

### Definição

Seja  $T: U \rightarrow V$  linear. Dizemos que  $T$  é **injetiva** se, para quaisquer  $x, y \in U$  se tem que  $x \neq y$  implica  $T(x) \neq T(y)$ .

Uma transformação linear injetiva também se diz um **monomorfismo**.

### Definição

Seja  $T: U \rightarrow V$  é linear. O **núcleo** de  $T$ , que se denota  $\text{Nuc}(T)$  consiste nos vetores  $x \in U$  tais que  $T(x) = \mathbf{0}$  i.e.

$$\text{Nuc}(T) = \{x \in U : T(x) = \mathbf{0}\}$$

### Teorema

Seja  $T: U \rightarrow V$  uma transformação linear. Tem-se que  $\text{Nuc}(T)$  é um subespaço de  $U$ .

Basta ter em conta que  $\text{Nuc}(T) = T^{-1}(\mathbf{0}) \subseteq U$  porque  $\mathbf{0} \in V$ .

Se  $T: U \rightarrow V$  é linear então, dados  $x, y \in U$ , tem-se que

$$T(x) = T(y) \text{ se e só se } x - y \in \text{Nuc}(T).$$

Como consequência deste facto tem-se o seguinte:



## Teorema

Seja  $T: U \rightarrow V$  linear.  $T$  é injetiva se e só se  $\text{Nuc}(T) = \{0\}$ , ou seja, se e só se o núcleo de  $T$  se reduz ao vetor nulo de  $U$  i.e.  $\dim(\text{Nuc}(T)) = 0$  ou, como também se diz, se e só se o núcleo de  $T$  é trivial.

ex:  $\rightarrow x-y \neq 0$   
 $x \neq y$  e  $T(x) = T(y)$   
 $T(x) = T(y) \Leftrightarrow T(x) - T(y) = 0$   
"  $T(x-y)$   
 $x-y \in \text{Nuc}(T)$

ex:

$$T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$
$$T(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & z+w \end{bmatrix}$$

$$\text{Nuc}(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : T(x, y, z, w) = 0\} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & z+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\} =$$

$$= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0, z+w=0\} = \{(x, -x, z, -z) : x, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathbb{R} \langle (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1) \rangle$$

## Definição

Seja  $T: U \rightarrow V$  uma transformação linear.  $T$  é **sobrejetiva** se, para todo  $y \in V$  existe  $x \in U$  tal que  $T(x) = y$ .

Uma transformação linear sobrejetiva também se designa de **epimorfismo**.

Se  $T: U \rightarrow V$  é linear então, a imagem direta de  $U$  através de  $T$  i.e., o subespaço  $T[U] \subseteq V$ , também se designa de **imagem de  $T$**  e denota-se  $\text{Im}(T)$ .

## Teorema

Seja  $T: U \rightarrow V$ , linear.

(1) Se  $U = \text{Lu}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$  então  $\text{Im}(U) = \text{Lu}\langle T(u_1), \dots, T(u_n) \rangle$

(2)  $\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(U)$

(3) A transformação  $T$  é sobrejetiva se e só se  $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$ .

(4) Tem-se que  $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(U)$  se e só se  $T$  é injetiva.

(5) A transformação  $T$  é injetiva sse transforma conjuntos linearmente independentes em conjuntos linearmente independentes.

→ Uma transformação linear fica completamente determinada pois imagens dos vetores de uma base do espaço de partida ←

## Teorema

Consideremos dois espaços lineares,  $U$  e  $V$ , sobre  $K$ .

Seja  $\beta = (u_1, \dots, u_k)$  uma base de  $U$ . Se  $f: \{u_1, \dots, u_k\} \rightarrow V$  é uma função, então, existe uma única transformação linear  $T_f: U \rightarrow V$  tal que,

$$T_f(u_i) = f(u_i), \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$





Além disso,  $T$  é definida por:

$$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_k f(u_k)$$

Se  $T: U \rightarrow V$  é linear então  $T = T \circ f$  onde a função  $f: \{u_1, \dots, u_k\} \rightarrow U$  é definida por:

$$f(u_i) = T(u_i), \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Problema 4.8

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(1,1,0) = (2,1) \quad T(0,1,1) = (3,-1) \quad T(0,0,1) = (2,-1)$$

$$B = \{(1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

$$A) T(1,1,0) = (2,1)$$

$$T(0,1,1) = (1,1) \quad X$$

$$B) T(1,1,0) = (0, \dots) \quad X$$

$$C) T(1,1,0) = (2,1)$$

$$T(0,1,1) = (3,-1) \quad \checkmark$$

$$T(0,0,1) = (2,-1)$$

**Matriz MAP**  $\rightarrow$  espaços lineares e transformações lineares

22/11/2022

**Relações entre as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação linear**

**Teorema** - Teorema da dimensão

Sejam  $T: U \rightarrow V$ , linear. Nestas condições tem-se que:

$$\dim(U) = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

$$T: U \rightarrow V$$

$$\text{Nuc}(T) = \{x \in U : T(x) = 0\} \subseteq U$$

$$\text{Im}(T) = \{T(x) : x \in U\} \subseteq V$$

$$U = \text{L.v.}(\{u_1, \dots, u_n\})$$

$$\text{Im}(T) = \text{L.v.}(T(u_1), \dots, T(u_n))$$

Problema 4.9

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x,y,z) = (x-2y+z, 4x+2y-z, -6y+3z)$$

$$a) \text{Nuc}(T) = \{(x,y,z) : (x-2y+z, 4x+2y-z, -6y+3z) = (0,0,0)\}$$

$$\text{Nuc} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \{(x,y,z) : x=0 \wedge 2y-z=0\} = \{(0,y,z) : y \in \mathbb{R}\} = \text{L.v.}(\{(0,1,2)\}) \rightarrow \dim(\text{Nuc}(T)) = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 4 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -6 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 10 & -5 & | & 0 \\ 0 & -6 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -6 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

pois trata de um sistema homogêneo não é preciso estar sempre igual mas tem de estar no final

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

3

1

2



$$\mathbb{R}^3 = L_{\mathbb{R}}(\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}) \Rightarrow \text{Im}(T) = L_{\mathbb{R}}(\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\}) =$$

$$= L_{\mathbb{R}}(\{(1,4,0), (-7,2,-6), (1,-1,3)\})$$

## Isomorfismos

### Definição

Uma transformação linear  $T: U \rightarrow V$  diz-se um **isomorfismo** se for bijetiva.

### Teorema

Se  $T: U \rightarrow V$  é um isomorfismo então:

(1)  $\dim(U) = \dim(V)$

(2) os vetores  $u_1, \dots, u_n \in U$  satisfazem uma propriedade  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  (envolvendo operações de álgebra linear) em  $U$  se e só se os vetores  $T(u_1), \dots, T(u_n) \in V$  satisfazem a propriedade  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  em  $V$ .

Sejam  $U$  um espaço linear sobre  $K$  e  $\beta = (u_1, \dots, u_n)$  uma base ordenada de  $U$ .

A transformação  $(\cdot)_{\beta}: U \rightarrow K^n$  que transforma cada  $u \in U$  no seu vetor de coordenadas,  $x_{\beta}$ , na base  $\beta$ , é um **isomorfismo**.

Do mesmo modo, a transformação  $(\cdot)_{\beta}: K^n \rightarrow U$  que transforma cada  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  no vetor  $(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) \in U$  que tem aquele  $n$ -úpla como vetor de coordenadas é um **isomorfismo**.

Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Em que condições  $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo?

É injetiva sse  $\dim(\text{Nuc}(T_A)) = \dim(\text{Nuc}(A)) = 0$  sse  $\text{con}(A) = n$ .

Recorrendo à fórmula concluímos que

$$n = \dim(\text{Im}(T_A)) + \dim(\text{Nuc}(T_A)) = \dim(\text{Im}(T_A))$$

logo,

$$\text{Im}(T_A) = \mathbb{R}^n$$

e assim  $T_A$  é também sobrejetiva.

→ Resumindo:  $T_A$  é um isomorfismo sse  $A$  é invertível. ←

Observe-se que  $\text{Im}(T_A) = \mathcal{E}(A)$

Se  $A \in K^{n \times n}$ . Tem-se que

$$T_A(x_1, \dots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A_{1,1} + \dots + x_n A_{n,n} \in \mathcal{E}(A)$$

Operações envolvendo transformações lineares

### Definição

Sejam  $S, T \in \text{Hom}(U, V)$  e  $\alpha \in K$

(1) A transformação  $S+T: U \rightarrow V$  é definida por  $(S+T)(x) := S(x) + T(x)$

(2) A transformação  $\alpha T: U \rightarrow V$  é definida por  $(\alpha T)(x) := \alpha T(x)$ .

→ É simples verificar que se  $S$  e  $T$  são lineares então  $S+T$  e  $\alpha T$  são transformações lineares. ←



## Definição

Sejam  $S \in \text{Hom}(U, V)$  e  $T \in \text{Hom}(V, W)$ . A composição  $T \circ S: U \rightarrow W$  define-se:

$$(T \circ S)(x) = T(S(x))$$

No contexto dos espaços lineares, em lugar de escrevermos  $T \circ S$  escrevemos simplesmente  $TS$ .

A composição  $TS: U \rightarrow W$  é uma transformação linear.

$$\begin{aligned} TS(\alpha x + \beta y) &= T(S(\alpha x + \beta y)) = T(\alpha S(x) + \beta S(y)) = \\ &= \alpha T(S(x)) + \beta T(S(y)) = \alpha (TS)(x) + \beta (TS)(y) \end{aligned}$$

## Definição

Sejam  $U$  e  $V$  espaços com a mesma dimensão e  $T: U \rightarrow V$  uma transformação linear bijetiva. Enquanto função,  $T$  tem uma inversa (única) que é a função  $T^{-1}: V \rightarrow U$ , definida pelas identidades:

$$T^{-1}T(x) = x \quad (x \in U) \quad TT^{-1}(y) = y \quad (y \in V)$$

## Teorema

Sejam  $U$  e  $V$  espaços com a mesma dimensão e  $T: U \rightarrow V$  bijetiva. A inversa de  $T$  é uma transformação linear  $T^{-1}: V \rightarrow U$ .

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha u + \beta w) &= T^{-1}(\alpha T(x) + \beta T(y)) = \\ &= T^{-1}(T(\alpha x + \beta y)) = \alpha x + \beta y = \alpha T^{-1}(u) + \beta T^{-1}(w) \end{aligned}$$

## Representação matricial de uma transformação linear

### Definição

Seja  $T: U \rightarrow V$  é uma transformação linear. Sejam ainda  $\beta = (e_1, \dots, e_n)$  e  $\bar{\beta} = (f_1, \dots, f_m)$  bases ordenadas de  $U$  e  $V$ , respectivamente. Uma representação matricial de  $T$  relativamente às bases  $\beta$  e  $\bar{\beta}$  é uma matriz que se denota por  $[T]_{\bar{\beta}, \beta}$  e que satisfaz:

- (1)  $[T]_{\bar{\beta}, \beta} \in \mathbb{K}^{m \times n}$
- (2)  $T(x)_{\bar{\beta}} = [T]_{\bar{\beta}, \beta} x_{\beta}$

### Teorema

Sejam  $T: U \rightarrow V$  uma transformação linear,  $\beta = (e_1, \dots, e_n)$  e  $\bar{\beta} = (f_1, \dots, f_m)$  bases ordenadas de  $U$  e  $V$ , respectivamente. A matriz que representa  $T$ , relativamente às bases  $\beta$  e  $\bar{\beta}$  é a matriz que se denota por  $[T]_{\bar{\beta}, \beta}$ , cujas colunas são os vetores de coordenadas,  $T(e_i)_{\bar{\beta}}$ , das imagens dos vetores da base  $\beta$ , na base  $\bar{\beta}$ .

Nas condições do teorema acima, se  $A$  é uma matriz que satisfaz  $T(x)_{\bar{\beta}} = Ax_{\beta}$  para qualquer  $x \in U$  então,  $[T]_{\bar{\beta}, \beta} = A$ . Ou seja, a matriz que representa relativamente às bases  $\beta, \bar{\beta}$  é única.



ex 1:

$$[T]_{\beta, \beta} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(1,1,0)_{\beta} & T(1,-1,0)_{\beta} & T(0,0,1)_{\beta} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ (3)_{\beta} & (0,1)_{\beta} & (0,-1)_{\beta} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & | & y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & x-y \\ 0 & 1 & | & y \end{bmatrix} \quad (x,y)_{\beta} = (x-y, y)$$

ex 2:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad T(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$$

base canônica de  $\mathbb{R}^2$

$$\beta = ((1,0), (0,1)) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{\beta} = (a, b, c, d)$$

$$[T]_{\beta, \beta} = \begin{bmatrix} | & | \\ T(1,0)_{\beta} & T(0,1)_{\beta} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(1,0)_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\beta} = (1,0,0,1) \quad T(0,1)_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\beta} = (0,1,1,0)$$

$$T \Leftrightarrow [T]_{\beta, \beta}$$

# Problemas

28/11/2022

112)  $T_1, T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T_1(x,y) = (x-y, x+y) \quad T_2(x,y) = (2x, y-x)$$

faça para  $T_2$  a)  $\beta = ((1,0), (0,1))$    
 se possível

$T_1$  é invertível ou  $[T]_{\beta, \beta}$  é invertível ou  $[T]_{\beta}$  é invertível

$$[T_1]_{\beta, \beta} = [T_1]_{\beta} = \begin{bmatrix} | & | \\ T_1(1,0)_{\beta} & T_1(0,1)_{\beta} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ (1,1)_{\beta} & (-1,1)_{\beta} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2]_{\beta} = \begin{bmatrix} | & | \\ T_2(1,0)_{\beta} & T_2(0,1)_{\beta} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ (2,1)_{\beta} & (0,1)_{\beta} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{car}[T_1]_{\beta} = \text{car}[T_2]_{\beta} + 2 \quad (\text{e máxima} \Rightarrow \text{são invertíveis})$$

$$T_1^{-1}(x,y)$$

$$\begin{matrix} T \\ \downarrow \Leftrightarrow \uparrow \\ \beta \xrightarrow{T^{-1}} \beta \end{matrix}$$

$$[T_1^{-1}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T^{-1}]_{\beta, \beta}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1/2 \\ 0 & 1 & | & -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1/2 \\ 0 & 1 & | & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$T_1^{-1}(x,y)$$

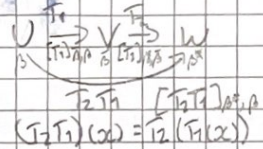
$$[T_1^{-1}]_{\beta}(x,y)_{\beta} = T_1^{-1}(x,y)_{\beta} \Leftrightarrow T_1^{-1}(x,y) = [T_1^{-1}]_{\beta}(x,y)_{\beta} \Leftrightarrow T_1^{-1}(x,y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (x+y, x-y)$$





faixa

b)  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $T(x) = \begin{bmatrix} 2x-2y \\ 2y \end{bmatrix}$



$[T]_{\beta, \beta} = [T]_{\beta, \beta} [T]_{\beta, \beta}$

$[T]_{\beta, \beta} = [T]_{\beta, \beta} [T]_{\beta, \beta} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$([T]_{\beta, \beta})(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-2y \\ 2y \end{bmatrix} = (2x-2y, 2y)$

$x \mapsto T(x)$  A representa T

$T(x) = T(x)\beta$

116)  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $T(x, y, z) = (x-2y+z, 4x+2y-z, -6y+3z)$

(a)  $\text{Nuc}(T), \text{Im}(T)$

$A = [T]_{\beta, \beta} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

$T = T_{\beta} \Rightarrow \text{Nuc}(T) = \text{Nuc}(A)$

$\text{Im}(T) = \text{EC}(A) = \mathbb{L}\mathbb{R}^3 \langle (1, 1, 0), (-1, 1, 3) \rangle$

ex:

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\beta = ((1, 1), (1, 0))$

$\text{Nuc}(T) = ?$

$T_{\beta}$

$A = [T]_{\beta, \beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$\text{Im}(T) = ?$

$\text{Nuc}(T_{\beta}) = \text{Nuc}(A) = \text{Nuc}(T)_{\beta}$

$\text{Im}(T_{\beta}) = \text{EC}(A) = \text{Im}(T)_{\beta}$

$T(x, y)_{\beta} = A(x, y)_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ -2y+2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x-2y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 1 & 0 & | & y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & | & y-x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & | & 2-y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & y \\ 0 & 1 & | & 2-y \end{bmatrix}$

$T(x, y) = (-x+2y)(1, 1) + (2x-4y)(1, 0)$

ex3:

30/11/2022

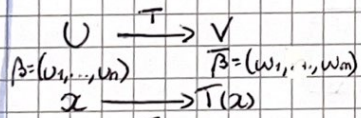
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A = [T]_{\beta, \beta}$

$\downarrow$

$T_{\beta}(x) = Ax$

$\beta = (1+t, 2t, 1+t^2)$



$x_{\beta} \xrightarrow{T_{\beta}} (T(x))_{\beta}$

$\mathbb{K}^n \xrightarrow{T_{\beta}} \mathbb{K}^m$

$x \mapsto T(x)$

$\downarrow$

$x_{\beta} \xrightarrow{T_{\beta}} A x_{\beta} = (T(x))_{\beta}$

$T(x) = (A x_{\beta})_{\beta}$

$\beta = ((1, 1), (1, -1))$

$(2, 3)_{\beta} = 2(1, 1) + 3(1, -1)$

$(2, 3)_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -1 & | & 3 \end{bmatrix}$

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$   $\beta = (1+t, 2t, 1+t^2)$

$\beta = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$

$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\beta} = (x+y, y-2z, y+2z)_{\beta} = (x+y)(1+t) + (y-2z)2t + (y+2z)(1+t^2)$

$= x + 2xy + yt + 2yt - 2zt + y + y^2 + 2z + 2zt^2 = (y+2z)t^2 + (x+3y-2z)t + (x+2y+2z)$



# Representação matricial e mudanças de base



## Problema

Supondo que  $T: U \rightarrow V$  é linear,  $\beta_1, \beta_2$  são bases ordenadas de  $U$  e que  $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$  são bases ordenadas de  $V$ .

Qual a relação entre  $[T]_{\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_1}$  e  $[T]_{\beta_2, \beta_1}$ ?

A relação, que envolve as matrizes de mudança de base é a seguinte:

$$[T]_{\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_1} = [\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_2] [T]_{\beta_2, \beta_2} [\beta_2, \beta_1]$$

$$\begin{array}{c}
 U \xrightarrow{T} V \\
 \beta_2 \leftarrow \beta_1 \quad \bar{\beta}_1 \rightarrow \bar{\beta}_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 [T]_{\beta_2, \beta_1} \\
 \underbrace{(\text{Id})_{\bar{\beta}_2} [T]_{\beta_2, \beta_2} (\text{Id})_{\beta_1}}_{(\text{Id})_{\bar{\beta}_2}} \\
 \underbrace{[\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_1] [T]_{\beta_2, \beta_2} [\beta_2, \beta_1]}_{(\text{Id})_{\bar{\beta}_2}}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \alpha \beta_2 \\
 \alpha \beta_1
 \end{array}$$

ex:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \beta = ((1, 0), (1, 1)) \quad [T]_{\beta, \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\beta} = \text{base canônica} = ((1, 0), (0, 1))$$

$$[T]_{\bar{\beta}, \bar{\beta}} = [\bar{\beta}, \bar{\beta}] [T]_{\beta, \beta} [\beta, \beta] = [\bar{\beta}, \bar{\beta}] [T]_{\beta, \beta} [\bar{\beta}, \bar{\beta}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

## A relação entre $\text{Im}(T)$ e $\text{EC}([T]_{\bar{\beta}, \bar{\beta}})$

### Teorema

Suponhamos que  $T: U \rightarrow V$  é linear,  $\beta, \bar{\beta}$  são bases ordenadas de  $U$  e  $V$ , respectivamente e que  $A = [T]_{\bar{\beta}, \beta}$  é a matriz que representa  $T$  relativamente às bases  $\beta$  e  $\bar{\beta}$ . Nestas condições tem-se:

- (1)  $\text{EC}(A) = \text{Im}(\bar{\beta})$ , ou seja,  $\text{EC}(A)^{\bar{\beta}} = \text{Im}(T)$ .
- (2) Em particular, se  $\text{EC}(A) = L_{\mathbb{R}^m}(u_1, \dots, u_r)$ , onde  $m = \dim(V)$ , então  $\text{Im}(T) = L_V(u_1^{\beta_1}, \dots, u_r^{\beta_r})$ .
- (3) Além disso,  $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{EC}(A)) = \text{ca}(A)$ .



ex:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \beta = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)) \quad \bar{\beta} = ((1, 1), (1, 2))$$

$$A = [T]_{\bar{\beta}, \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Im}(TA) = E(A) = (\text{Im}(T))_{\beta}$$

$$E(A) = L_{\mathbb{R}^2}(\{(1, -1), (1, 0)\})$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= L_{\mathbb{R}^2}(\{(1, -1)^{\beta}, (1, 0)^{\beta}\}) \\ &= 1(1, 1) - 1(1, 1) \rightarrow = 1(1, 1) + 0(1, 2) \\ &= 1(1, 1) - 1(1, 1) \end{aligned}$$

## A relação entre $\text{Nuc}(T)$ e $\text{Nuc}(A)$

Teorema

Suponhamos que  $T: U \rightarrow V$  é linear,  $\beta, \bar{\beta}$  são bases ordenadas de  $U$  e  $V$ , respectivamente e que  $A = [T]_{\bar{\beta}, \beta}$  é a matriz que representa  $T$  relativamente às bases  $\beta$  e  $\bar{\beta}$ . Nestas condições tem-se:

- (1)  $\text{Nuc}(A) = \text{Nuc}(T)_{\beta}$ , ou seja,  $\text{Nuc}(T) = \text{Nuc}(A)_{\beta}$ .
- (2) Em particular, se  $\dim(U) = n$  e  $\text{Nuc}(A) = L_{\mathbb{K}^n}(\{u_1, \dots, u_r\})$  então,  $\text{Nuc}(T) = L_U(\{u_1^{\beta}, \dots, u_r^{\beta}\})$ .
- (3) Além disso,  $\dim \text{Nuc}(T) = \dim \text{Nuc}(A) = \text{nu}(A)$ .

$$\text{Nuc}(TA) = \text{Nuc}(A) = (\text{Nuc}(T))_{\beta}$$

## Álgebra de Representações Matriciais

Teorema

Sejam  $S, T: U \rightarrow V$ ,  $R: V \rightarrow W$ , transformações lineares e  $\beta, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  bases ordenadas de  $U, V, W$ , respectivamente. Consideramos ainda escalares  $\lambda, \xi \in \mathbb{K}$ . Tem-se:

$$[\lambda S + \xi T]_{\bar{\beta}, \beta} = \lambda [S]_{\bar{\beta}, \beta} + \xi [T]_{\bar{\beta}, \beta}$$

$$[RS]_{\bar{\gamma}, \beta} = [R]_{\bar{\gamma}, \bar{\beta}} [S]_{\bar{\beta}, \beta}$$

Se  $R$  é invertível (caso em que  $\dim V = \dim W$ ) então:

$$[R^{-1}]_{\bar{\beta}, \bar{\beta}} = [R]_{\bar{\beta}, \bar{\beta}}^{-1}$$



# Exercícios do capítulo 2

05/12/2022

(12)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$   $X_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}$   $W_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}$

$\beta$  a base canônica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}_\beta = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$   $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sse  $(W_1)_\beta, (W_2)_\beta \subseteq \mathbb{R}^4$

$(W_1)_\beta = \{ (a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \} = \{ (a, 0, 0, 0) + (0, b, 0, 0) + (0, 0, c, 0) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^4$   
 $(W_2)_\beta = \{ (0, a, -a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \{ a(1, 0, -1, 0) + b(0, 1, 0, 1) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^4 \cdot \{ (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1) \}$

$\dim(W_1)_\beta = 2 \Rightarrow \dim(W_1) = 2$

$\dim(W_2)_\beta = 3 \Rightarrow \dim(W_2) = 3$   
 como  $\dim(W_\beta) = \dim(W)$

$W_1$  e  $W_2$  são subespaços de  $V$

$(W_1)_\beta \cap (W_2)_\beta = \{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1) \} = \mathbb{R}^4 \cdot \{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \}$   
 $\Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 4$

$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$   
 $4 = 2 + 3 - \dim(W_1 \cap W_2) \Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $\dim(\text{EC}(A)) = \text{cor}(A) = 4$

(17)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$   $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $B = (w_1, w_2)$   $w_1 = (-1, 0)$   $w_2 = (-1, 2)$   $\beta = (-1, 0), (-1, 2)$

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \xrightarrow{T} T \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_\beta$   $\begin{pmatrix} -1 & -4 & x \\ 0 & 2 & y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -x \\ 0 & 1 & \frac{y}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x - 2y \\ 0 & 1 & \frac{y}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_\beta \rightarrow A \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_\beta = T \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_\beta$   $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_\beta = (-x - 2y, \frac{y}{2})$

$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x-2y \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x-11y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_\beta$

$T \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}_\beta = (-2y)(-1, 0) + (2x - 11y)(-1, 2) = (2x + 8y - 2y, -4x - 11y) = (2x + 6y, -4x - 11y)$

$T \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} = (8(-1) + 6(-2), -4(-1) - 11(-2)) = (-10, 6)$

$T \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} = (8(-1) + 6(0), -4(-1) - 11(0)) = (-8, 4)$

$R = (B)$



121)  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $T(x,y,z) = (2x+1, y, 2z-x)$   $S(x,y,z) = (2z, y-z)$

- A - falsa ( $T(0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$ )
- B - verdadeira ( $S(T(0,0,0)) = S(1,0,0) = S^{-1}(1,0,0) = (2,0)$ )
- C - falsa  $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^2$
- D - falsa  $T$  n. e' transformaç. linear

R: (B)

123)

a) para ser injetiva o núcleo tem de ser trivial em  $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  inj

Não  
falsa

$$\dim(U) = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

$$\Rightarrow 5 = \underbrace{\dim(\text{Nuc}(T))}_{\geq 2} + \underbrace{\dim(\text{Im}(T))}_{\leq 3}$$

$\text{Nuc}(T)$  não trivial  $\Rightarrow T$  não é injetiva

b) Existem  $T: \mathbb{R}^5 \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}^3$  sobrejetivos

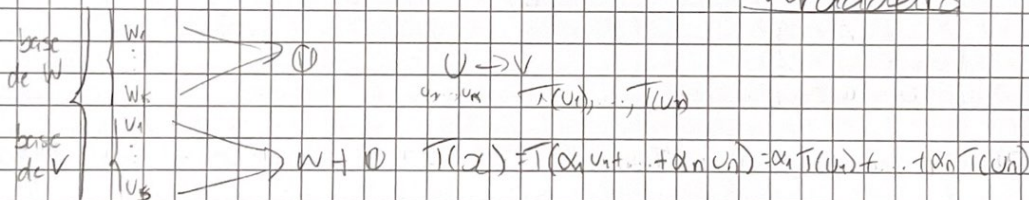
$$T(x,y,z,w,t) = (2x, y, z)$$

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$$

$$[T]_{\beta_{\text{can}} \beta_{\text{can}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$W \subseteq V$ , existe  $T: U \rightarrow V$  <sup>for</sup>  $\text{Im}(T) = W$

Verdadeira



h)  $k = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$

Verdadeira

# Problemas

05/12/2022

## Exercícios do capítulo 7

113)  $v_1 = (1,3)$   $v_2 = (4,5)$   $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$   $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $B = (v_1, v_2)$   
 $\beta = ((1,3), (-1,4))$

a)  $T(v_1)_B = (1, -2)$   $T(v_2)_B = (3, 5)$

b)  $T(1,3)$   $T(-1,4)$

$$[T]_{\beta, \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (T(v_1))_{\beta} & (T(v_2))_{\beta} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T(1,3) = (1, -2)^B = 1(1,3) - 2(-1,4) = (1,3) + (2,-8) = (3,-5) = (3,-5)_{\beta_{\text{can}}}$$

$$T(-1,4) = (3,5)^B = 3(1,3) + 5(-1,4) = (3,9) + (-5,20) = (-2,29) = (-2,29)_{\beta_{\text{can}}}$$

$(z,y)^B$  vetor que tem coordenadas  $(z,y)$  na base  $\beta$

$(x,y)_B$  coordenadas do vetor na base canônica



$$c) [T]_{B_{\text{can}}, B_{\text{can}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (T(1,2))_{B_{\text{can}}} & (T(-1,1))_{B_{\text{can}}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 29 \end{bmatrix}$$

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ -5x + 29y \end{bmatrix} = (3x - 2y, -5x + 29y)$$

$$d) T(1, 1) = (3 \times 1 - 2 \times 1, -5 \times 1 + 29 \times 1) = (1, 24)$$

$$114) T: \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t] \quad \tilde{p} = p - 3p \quad B_c = (1, t, t^2) \quad B = (1-t, 2t+1, 1-t^2)$$

$$a) A = [T]_{B_c, B_c} = [T]_{B, B_c}$$

$$\begin{array}{l} T(1) = 1 - 3 \times 1 = -3 \\ T(t) = t - 3t = -2t \\ T(t^2) = t^2 - 3t^2 = -2t^2 \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$c) S = [T]_B = [B, B_c] [T]_{B_c, B_c} [B_c, B] = [B_c, B]^{-1} [T]_{B_c, B_c} [B_c, B]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \times 1/3 \\ L_3 \times (-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 - L_2 \\ L_3 + L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 2/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b) B = [T]_{B_c, B} = [B_c, B_c] [T]_{B_c, B_c} [B_c, B] = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\pi(p) T(1-t) = 1 - 3 + 3t = -2 + 3t$$

$$T(2t+1) = 2 + 3 - 6t = 5 - 6t$$

$$T(1-t^2) = -2t - 3 + 3t^2 = -3 - 2t + 3t^2$$

$$[T]_{B_c, B} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$120) T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad T(x, y, z) = (2z, 2+3y)$$

$$(0, 0) \notin \text{Nuc}(T)$$

$$(3, 0) \notin \text{Nuc}(T)$$

$\pi$  são subespaços de partição

$$\begin{array}{l} T(1, 0, 0) = (0, 1) \\ T(0, 1, 0) = (0, 3) \\ T(0, 0, 1) = (2, 0) \end{array} \quad A = [T]_{B_{\text{can}}, B_{\text{can}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nuc}(T) = \text{Nuc}(A)$$

$$\text{Im}(T) = \text{EC}(A) = \mathbb{R}^2$$

$$\text{car}(A) = 2$$

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 3$$

$$\dim(\text{Nuc}(T)) = 1$$

$$\Rightarrow 3 = \dim(\text{Nuc}(T)) + 2 \Rightarrow \dim(\text{Nuc}(T)) = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

R: (c)



128)  $T: \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$   $p(t) = 4p(1-t)$   
 a)  $A = [T]_{\beta \text{ can}}$   $A$  é invertível?  $\beta \text{ can} = (1, t, t^2)$

$T(1) = 4 \times 0 - 1 = -1$   
 $T(t) = 4 \times 1 - t = 4 - t$   
 $T(t^2) = 4 \times 2t - t^2 = 8t - t^2$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como  $A$  é invertível tem-se que  $T$  é injetiva.

b)  $p \in \mathbb{R}_2[t]$   $T(p(t)) = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1, t \in \mathbb{R}$

$q = T^{-1}(1 - 2t + t^2)$   
 $[T^{-1}]_{\beta \text{ can}} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$[q]_{\beta \text{ can}} = [T^{-1}]_{\beta \text{ can}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$p(t) = 39 + 10t + t^2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + 4L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 32 & | & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + 32L_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & -32 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + 8L_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & -32 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \times (-1)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & -32 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + 32L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & -32 & 256 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 32 & -256 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 32 & -256 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# n-Paralelogramos 09/12/2022

## 1) Definição

Seja  $U$  um espaço de dimensão  $n$ . Dados  $n$  vetores  $u_1, \dots, u_n \in U$  o  $n$ -paralelogramo determinado por aqueles vetores é um conjunto

$$P(u_1, \dots, u_n) = \{ \eta_1 u_1 + \dots + \eta_n u_n \mid \eta_1, \dots, \eta_n \in [0, 1] \}$$

Não excluímos a possibilidade de os vetores  $u_1, \dots, u_n$  serem linearmente dependentes, caso em que obtemos sólidos degenerados cujo volume se considera nulo (correspondendo à situação nas dimensões dois e três).

Uma transformação linear  $T: V \rightarrow V$  transforma  $n$ -paralelogramos em  $n$ -paralelogramos, mais precisamente:

$$\begin{aligned} T(P(u_1, \dots, u_n)) &= T(\{ \eta_1 u_1 + \dots + \eta_n u_n \mid \eta_1, \dots, \eta_n \in [0, 1] \}) = \\ &= \{ T(\eta_1 u_1 + \dots + \eta_n u_n) \mid \eta_1, \dots, \eta_n \in [0, 1] \} = \\ &= \{ \eta_1 T(u_1) + \dots + \eta_n T(u_n) \mid \eta_1, \dots, \eta_n \in [0, 1] \} = \\ &= P(T(u_1), \dots, T(u_n)) \end{aligned}$$

## Volume de um n-Paralelogramo

Para cada dimensão  $n$  procuramos uma função que possa medir o volume dos  $n$ -paralelogramos. Representamos essa função por  $\det(u_1, \dots, u_n)$ .

Uma tal função existe e pode ser definida de modo que:

$$|\det(u_1, \dots, u_n)| = \text{volume}(P(u_1, \dots, u_n))$$



# Definição do Determinante

## Definição:

Uma forma  $n$ -linear alternada (ou simplesmente: multilinear alternada) em  $K^n$  é uma função:

$$f: \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n \text{ vezes}} \rightarrow K$$

que é linear i.e.,

$$f(u_1, \dots, \alpha u_i + \beta v_i, \dots, u_n) = \alpha f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) + \beta f(u_1, \dots, v_i, \dots, u_n)$$

para qualquer  $1 \leq i \leq n$ , e é alternada i.e. para qualquer  $1 \leq i < j \leq n$  tem-se:

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

$$f(x, y)$$

2-linear ou bilinear

$$f(\alpha u + \beta v, y) = \alpha f(u, y) + \beta f(v, y)$$

$$f(x, \alpha u + \beta v) = \alpha f(x, u) + \beta f(x, v)$$

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

$$f(x, x) = -f(x, x) \Rightarrow f(x, x) = 0$$

## Teorema:

Para qualquer  $n$  existe uma (única) forma  $n$ -linear alternada em  $K^n$ .

## Definição:

Para cada  $n$ , dada uma matriz  $A \in K^{n \times n}$ , o determinante de  $A$  define-se da seguinte forma:

$$\det(A) = |A| := f_n(A_{1,1}, \dots, A_{n,n})$$

Onde  $f_n$  é a única forma  $n$ -linear em  $K^n$  (ou seja, o determinante é uma função das colunas da matriz).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

## Teorema:

Usando a definição de  $f_n$  e a definição de  $\det(A)$  resulta que:

$$\det(A) = |A| := f_n(A_{1,1}, \dots, A_{n,n}) = f_n(A_{1,1}, \dots, A_{n,n})$$

Assim,  $\det(A) = \det(A^T)$ . (Ou seja, o determinante pode também ser visto como uma função das linhas da matriz).





## Propriedades $\begin{matrix} \swarrow \\ \downarrow \\ \searrow \end{matrix}$

A função  $\det: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$  possui as seguintes propriedades

1)  $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$

2)  $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$

3) Se B se obtém de A trocando duas linhas (ou duas colunas), então  $\det(B) = -\det(A)$

4) Se B se obtém de A substituindo  $A_{i,*}$  por  $A_{i,*} + \alpha A_{j,*}$  (ou  $A_{*,j}$  por  $A_{*,j} + \alpha A_{*,i}$ ) então,  $\det(B) = \det(A)$

5) Se B se obtém de A substituindo  $A_{i,*}$  por  $\alpha A_{i,*}$  (ou  $A_{*,j}$  por  $\alpha A_{*,j}$ ) com  $\alpha \neq 0$ , então  $\det(B) = \alpha \det(A)$

6) Seja  $A_{i,*} = \sum_{j \neq i} n_j A_{j,*}$  (ou  $A_{*,j} = \sum_{i \neq j} n_i A_{*,i}$ ) então,  $\det(A) = 0$ .

$$f(u,v) \\ f(\alpha u + v, v) = f(u,v) + \alpha \overset{=0}{f(v,v)} = f(u,v)$$

## Determinantes e o método de eliminação de Gauss

→ Usando o método de eliminação de Gauss, podemos transformar uma matriz A numa matriz  $\tilde{A}$  em escada de linhas (e portanto triangular superior). Tem-se então que  $|A| = K |\tilde{A}|$  onde o valor de K é determinado pela forma como as operações elementares afetam o determinante. ←

### Teorema

Se uma matriz  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  é triangular superior (ou inferior) então, o determinante de B é o produto dos elementos da diagonal principal.

→ Como uma matriz em escada de linhas é uma matriz triangular superior, o método de eliminação de Gauss permite calcular o determinante de uma qualquer matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . ←

ex:

Calcular os determinantes das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$



### Problema 5.4

Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para  $x=0$  e  $x=2$  tem que:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x=0: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ combinação linear}$$

$$x=2: \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ combinação linear}$$

### Problema 5.5

Sem calcular explicitamente o determinante mostre que:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$L_1 + L_2 = (a+b+c, a+b+c, a+b+c) = (a+b+c)(1, 1, 1)$$

$$L_1 + L_2 - (a+b+c)L_3 = (0, 0, 0)$$

### Problema 5.6

Sem calcular explicitamente o determinante escreva:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix}$$

Como uma soma de quatro determinantes em cujas entradas não figurem adições.

$$(a_1, c_1) + (b_1, d_1)$$

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{vmatrix} = f_2((a_1+b_1, c_1+d_1), (a_2+b_2, c_2+d_2)) = f_2((a_1, c_1) + (b_1, d_1), (a_2, c_2) + (b_2, d_2))$$

$$= f_2((a_1, c_1), (a_2, c_2)) + f_2((b_1, d_1), (a_2, c_2)) + f_2((a_1, c_1), (b_2, d_2)) + f_2((b_1, d_1), (b_2, d_2)) =$$

$$= f_2((a_1, c_1), (a_2, c_2)) + f_2((a_1, c_1), (b_2, d_2)) + f_2((b_1, d_1), (a_2, c_2)) + f_2((b_1, d_1), (b_2, d_2)) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

### Problema 5.7

Diga, justificando, se é ou não verdadeira a igualdade:

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

$$\begin{matrix} A+B \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \det = 0 \end{matrix} = \begin{matrix} A \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \det = 1 \end{matrix} + \begin{matrix} B \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \det = 1 \end{matrix}$$

$$\det(A+B) = 0 \neq \det(A) + \det(B) = 2$$



# Propriedades do Determinante. ✨

## Teorema

Sejam  $A, B \in K^{n \times n}$  e  $\alpha \in K$ . Tem-se:

1)  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ ;

2)  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ;

3)  $\det(A) = \det(A^T)$ ;

4) Se  $A$  é invertível então  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .  $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I| = 1$

Não existe nenhuma lei geral para  $\det(A+B)$

## Teorema

Seja  $A \in K^{n \times n}$ . São equivalentes:

1)  $\det(A) \neq 0$ ;

2) As linhas de  $A$  são linearmente independentes;

3) As colunas de  $A$  são linearmente independentes;

4)  $\text{car}(A) = n$ ;

5)  $A$  é invertível;

6) Os sistemas da forma  $Ax=b$  são todos possíveis e determinados, independentemente de  $b$ .

$|A| \rightarrow |A^*|$   $A^*$  em escada de linhas

12/12/2022

$$L_j = \frac{1}{\alpha} \alpha L_j$$

## Desenvolvimentos de Laplace para o cálculo de determinantes

Consideremos uma matriz  $A \in K^{n \times n}$ . O menor  $(i,j)$  de  $A$ , que se denota  $A^{(i,j)}$  é a matriz que se obtém de  $A$  suprimindo a linha  $i$  e a coluna  $j$  de  $A$ .

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$



Consideremos uma matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . O cofator  $(i,j)$  de  $A$  é:

$$c_{f_{ij}}(A) = (-1)^{i+j} \det(A^{(ij)})$$

A matriz dos cofatores de  $A$ , denota-se  $\text{Cof}(A)$  e é:

$$\text{Cof}(A) = [c_{f_{ij}}(A)]$$

Ao longo de uma linha

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n A_{ij} c_{f_{ij}}(A) = A_{i1} c_{f_{i1}}(A) + \dots + A_{in} c_{f_{in}}(A)$$

Ao longo de uma coluna

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n A_{ij} c_{f_{ij}}(A) = A_{1j} c_{f_{1j}}(A) + \dots + A_{nj} c_{f_{nj}}(A)$$

ex 1:

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule os respectivos determinantes recorrendo aos desenvolvimentos de Laplace.

$$A_{ij} c_{f_{ij}}(A) = A_{ij} (-1)^{i+j} |A^{(ij)}|$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4-1) - (2-1) + (1-1) = 1$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \left( 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = 2 \left( 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - (2-2) \right) = 2(4-6) = -4$$

### Problema 5.13

Verifique que as matrizes  $A$  e  $B$  são inversas, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule:

- $\det(A^2(2B)^{-1})$
- $\det(A^T B A)$
- $\det(A+2B)$
- $\det(\text{tr}(B)A)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5 \neq 0$$

A é invertível





$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2 \neq 0 \quad B \text{ é invertível}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \det(A^3 (2B)^{-1}) &= \det(A^3) \cdot \det((2B)^{-1}) = (\det(A))^3 \cdot \det(\frac{1}{2}A^{-1}) = (\det(A))^3 \cdot (\frac{1}{2})^3 \det(B)^{-1} \\ &= (\det(A))^3 \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot \frac{1}{\det(B)} = 5^3 \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{A \in K^{n \times n} \\ \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)}$$

$$\text{b) } \det(A^T B A) = \det(A^T) \det(B) \det(A) = \det(A)^2 \det(B) = 5^2 \times 2$$

$$\text{d) } \det(\text{tr}(B)A) = \det(2A) = 2^3 \det(A) = 2^3 \times 5$$

## matriz adjunta

### Definição

A matriz adjunta de  $A$  é a matriz que se denota por  $(\text{Adj } A)$  ou  $\text{Adj}(A)$  e que é a matriz

$$(\text{Adj } A) = (Cof A)^T$$

i.e., a transposta da matriz dos cofatores.

### Teorema

Para qualquer matriz  $A \in K^{n \times n}$  tem-se o seguinte:

$$A(\text{Adj } A) = \det(A) \mathbb{1}$$

Se a matriz  $A \in K^{n \times n}$  não é singular i.e., se  $|A| \neq 0$  então, da relação:

$$A(\text{Adj } A) = \det(A) \mathbb{1}$$

pode extrair-se uma outra forma de calcular a inversa de  $A$ . Como,  $\det(A) \neq 0$  tem-se:

$$\frac{1}{|A|} A(\text{Adj } A) = A \left( \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A) \right) = \mathbb{1}$$

ou seja,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)$$

$$A(\text{Adj } A) = |A| \mathbb{1} \Leftrightarrow \frac{1}{|A|} A(\text{Adj } A) = \mathbb{1} \Leftrightarrow A \left( \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A) \right) = \mathbb{1} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)$$



## Problema 5.12

Seja  $(\text{Cof } A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Use a fórmula  $A(\text{Adj } A) = \det(A) \mathbb{1}$  para calcular  $\det(A)$

b) Calcule a entrada (3,2) da inversa.

a)  $|A \cdot (\text{Cof } A)^T| = |A| \cdot |\mathbb{1}| = |A| \cdot |\text{Cof } A^T| = |A|^3 \in |A|^3 = |(\text{Cof } A)^T| = 18^3$

$\in |A| = \sqrt[3]{18}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, |\alpha A| = \alpha^n |A| \quad |A| \cdot |\mathbb{1}| = |A|^n \cdot 1$

b)  $A^{-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{18}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (A^{-1})_{3,2} = \frac{1}{\sqrt[3]{18}}$

# Regra de Cramer

## Teorema

Dado um sistema  $Ax = b$  onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é invertível  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$  então as componentes da solução do sistema (que é um sistema possível e determinado) são dadas por:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

onde,

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,i-1} & b_i & A_{1,i+1} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & \dots & A_{2,i-1} & b_i & A_{2,i+1} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,i-1} & b_i & A_{n,i+1} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ex:

Determine a componente  $x_3$  da solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$









4ª coluna de  $M^{-1}$  onde queremos a 3ª linha

(12)  $M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (M^{-1})_{3,4}$

$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  → 1ª coluna de  $A^{-1}$

$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  → 2ª coluna de  $A^{-1}$

(14)  $\lambda \in \mathbb{R}$

$A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 5 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \lambda-1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (\lambda+1) \begin{bmatrix} \lambda-1 & 5 \\ 1 & \lambda+1 \end{bmatrix}$

$= -2(2(\lambda+1) - 5) + (\lambda+1)((\lambda-1)(\lambda+1) - 5) = -2(2\lambda - 3) + (\lambda+1)(\lambda^2 - 6) =$

$= -4\lambda + 6 + \lambda^3 - 6\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^3 + \lambda^2 - 10\lambda + 8 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$

substituir as raízes na polinomial = 0 e raiz 1ª raiz

$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -10 & 8 & \\ 1 & 1 & 2 & -8 & \\ \hline 1 & 2 & -8 & 10 & \\ 2 & 2 & 8 & & \\ \hline 1 & 4 & 10 & & \\ 4 & 4 & & & \\ \hline 1 & 0 & & & \end{array}$

$R_1(A)$

(13)  $a \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 2 & 2 \\ a & a+1 & a+2 & 3 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 \end{bmatrix} = G^2$

$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & = & 1 & 1 & 1 & 1 & = & 1 & 1 & 1 & 1 & = & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 2 & 2 & & 0 & 1 & 2-a & 2-a & & 0 & 1 & 2-a & 2-a & & 0 & 1 & 2-a & 2-a \\ a & a+1 & a+2 & 3 & & 0 & 1 & 2 & 3-a & & 0 & 0 & a & 1 & & 0 & 0 & a & 1 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 & & 0 & 1 & 2 & 3 & & 0 & 0 & a & a+1 & & 0 & 0 & 0 & a \end{array}$

$= a^2$

14/12/2022

# Operadores diagonalizáveis

## Definição

Uma transformação linear  $T: V \rightarrow V$  diz-se um operador em  $V$ .

## Definição

Consideremos  $T: V \rightarrow V$  um operador em  $V$ . Dizemos que  $T$  é diagonalizável se existe uma base ordenada,  $\beta$ , de  $V$ , relativamente à qual  $[T]_{\beta}$  é uma matriz diagonal.

Uma matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  é diagonalizável se o operador  $T_A$  for diagonalizável.





$AG \mathbb{K}^{n \times n}$  $T_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  $x \mapsto Ax$ 

De forma equivalente uma matriz  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  é diagonalizável se e só se existem matrizes  $P, D \in \mathbb{K}^{n \times n}$  onde  $P$  é invertível e  $D$  é diagonal tais que  $A = PDP^{-1}$ .

Se  $\beta$  é a base canônica de  $\mathbb{K}^n$  então  $[T_A]_{\beta} = A$ . Existe uma base  $\beta$  onde  $[T_A]_{\beta} = D$  e é diagonal se e só se

$$A = [T_A]_{\beta} = [\beta, \beta][T_A]_{\beta}[\beta, \beta]^{-1} = PDP^{-1}$$

$$A^{k_0} = (P \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^{-1})^{k_0} = P (\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n))^{k_0} P^{-1} = P \text{diag}(\alpha_1^{k_0}, \dots, \alpha_n^{k_0}) P^{-1}$$

$$(PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Se um operador  $T$  em  $V$  possui uma representação diagonal numa base  $\beta = (v_1, \dots, v_n)$  de  $V$ , digamos que:

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

então,  $T(v_1) = \lambda_1 v_1, T(v_2) = \lambda_2 v_2, \dots, T(v_n) = \lambda_n v_n$ .

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = \lambda_1 v_1 \quad T(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n = \lambda_2 v_2$$

## Valores próprios - espectro de $T$

### Definição

Seja  $T$  um operador em  $V$ . Um valor próprio de  $T$  é um escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  para o qual existe um vetor não-nulo  $x \in V$  tal que  $T(x) = \lambda x$ .

Se  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , um valor próprio de  $A$  é um escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  para o qual existe um vetor não-nulo  $x \in \mathbb{K}^{n \times 1}$  tal que  $Ax = \lambda x$ , ou seja, é um valor próprio de  $T_A$ .

### Definição

Seja  $T$  um operador em  $V$ . O conjunto dos valores próprios de  $T$  denota-se por  $\Lambda(T)$  e designa-se de espectro de  $T$ . O conjunto dos valores próprios de  $A$  denota-se por  $\Lambda(A)$  e designa-se de espectro de  $A$ .

### Teorema

Sejam,  $T$  um operador em  $V, \beta$  uma base de  $V$  e  $A = [T]_{\beta}$ . Tem-se que  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$  se e só se é um valor próprio de  $A$ . (Ou seja,  $\Lambda(T) = \Lambda(A)$ )



ex1:

Consideremos  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

tem-se que:

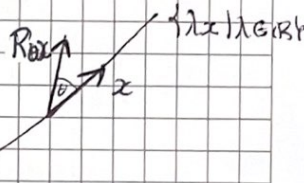
$$Av_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2v_1 \quad e \quad Av_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5v_2$$

Assim  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 5$  são valores próprios de  $A$ .

ex2:

Se considerarmos o plano  $\mathbb{R}^2$  uma rotação de ângulo  $\theta$  em torno da origem é a transformação que relativamente à base canónica é representada pela matriz:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Se  $\theta = 0$  então  $R = I$ .

Caso contrário, para nenhum vetor não-nulo,  $x$ , se tem  $R_\theta x = \lambda x$ . Assim,  $R_\theta$  não possui valores próprios (reais), para  $\theta \neq 0$ .

## Vetores próprios

Definição

Se  $T$  é um operador em  $V$  (resp. se  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ) e  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$  (resp. de  $A$ ), denotamos por  $E_T(\lambda)$  (resp.  $E_A(\lambda)$ ) o conjunto de todos os vetores  $x \in V$  tais que  $T(x) = \lambda x$  (resp.  $x \in \mathbb{K}^n$  tais que  $Ax = \lambda x$ ). Os elementos não-nulos de  $E_T(\lambda)$  designam-se de vetores próprios de  $T$  associados ao valor próprio  $\lambda$ .

Teorema

Sejam,  $T$  um operador em  $V$  (resp. uma matriz  $n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ) e  $\lambda$  um valor próprio de  $T$  (resp. de  $A$ ). Tem-se que  $E_T(\lambda)$  é um subespaço de  $V$  (resp.  $E_A(\lambda)$  é um subespaço de  $\mathbb{K}^n$ ). Além disso  $\dim(E_T(\lambda)) \geq 1$  (resp.  $\dim(E_A(\lambda)) \geq 1$ ).

$x, y \in E_A(\lambda)$

$$A(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$$

$$\alpha Ax + \beta Ay = \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \lambda(\alpha x + \beta y) \quad \text{cqd}$$

$$\lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$$

$$E_A(\lambda_1), \dots, E_A(\lambda_m)$$

$$\beta_1 = (\dots) \quad \beta_m = (\dots)$$

