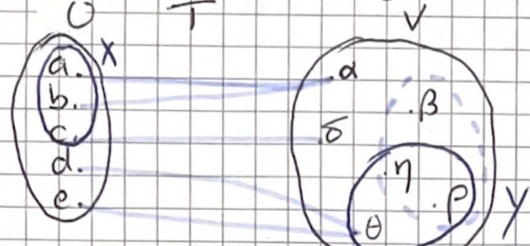
(2) Se $Y \subset V$ é um conjunto não vazio de vetores então $T^{-1}[Y]=\{x \in U : T(x) \in Y\}$ (este conjunto diz-se a imagem inversa de Y através de T).



$T^{-1}[\{\rho,\eta,\beta\}]=\emptyset$

$T^{-1}[Y]=\{e,d\}$

$T[X]=\{T(a),T(b),T(c)\}=\{\alpha,\delta\}$

Teorema

Sejam, $T: U \to V$ uma transformação linear, $X_0, X_1 \leq U$ e $Y_0, Y_1 \leq V$. Tem-se:

(1) $T[X] \leq V$
(2) $T^{-1}[Y] \leq U$

Problema 4.2:

$T: U \to \mathbb{R}^3$ $\quad T(v_1)=(1,-1,2) \quad T(v_2)=(3,3,2) \quad T(v_3)=(-3,1,2)$

$T(3v_1-v_2+10v_3)=3T(v_1)-T(v_2)+10T(v_3)=3(1,-1,2)-(3,3,2)+10(-3,1,2)=$

$=(-30,4,24)$

Núcleo de uma transformação linear e injetividade

Definição

Seja $T: U \to V$ linear. Dizemos que T é injetiva se, para quaisquer $x,y \in U$ se tem que $x \neq y$ implica $T(x) \neq T(y)$.
Uma transformação linear injetiva também se diz um monomorfismo.

Definição

Seja $T: U \to V$ é linear. O núcleo de T, que se denota $Nuc(T)$ consiste nos vetores $x \in U$ tais que $T(x)=0$ i.e.

$$Nuc(T)=\{x \in U : T(x)=0\}.$$

Teorema

Seja $T: U \to V$ uma transformação linear. Tem-se que $Nuc(T)$ é um subespaço de U.

Basta ter em conta que $Nuc(T)=T^{-1}(\{0\}) \leq U$ porque $\{0\} \leq V$.

Se $T: U \to V$ é linear então, dados $x,y \in U$, tem-se que

$$T(x)=T(y) \text{ se e só se } x-y \in Nuc(T).$$

Como consequência deste facto tem-se o seguinte:

Teorema

Seja $T: U \to V$ é linear. T é injetiva se e só se $Nuc(T) = \{0\}$, ou seja, se e só se o núcleo de T se reduz ao vetor nulo de U i.e. $\dim(Nuc(T)) = 0$ ou, como também se diz, se e só se o núcleo de T é trivial.

ex:

$$\to x - y \neq 0$$

$$x \neq y \text{ e } T(x) = T(y)$$

$$T(x) = T(y) \Leftrightarrow T(x) - T(y) = 0$$

$$\qquad \qquad \qquad \quad \overset{\shortparallel}{T(x-y)}$$

$$x - y \in Nuc(T)$$

ex:

$$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$T(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & z+w \end{bmatrix}$$

$$Nuc(T) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : T(x,y,z,w) = 0\} = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & z+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0, z+w=0\} = \{(x,-x,z,-z) : x, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= L_{\mathbb{R}}(\{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1)\})$$

Definição

Seja $T: U \to V$ uma transformação linear. T é sobrejetiva se, para todo o $y \in V$ existe $x \in U$ tal que $T(x) = y$.
Uma transformação linear sobrejetiva também se designa de epimorfismo.

Se $T: U \to V$ é linear então, a imagem direta de U através de T i.e., o subespaço $T[U] \leq V$, também se designa de imagem de T e denota-se $Im(T)$.

Teorema

Seja $T: U \to V$, linear.

(1) Se $U = L_U(\{u_1, \ldots, u_n\})$ então $Im(U) = L_V(\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\})$
(2) $\dim(Im(T)) \leq \dim(U)$
(3) A transformação T é sobrejetiva se e só se $\dim(Im(T)) = \dim(V)$.
(4) Tem-se que $\dim(Im(T)) = \dim(U)$ se e só se T é injetiva.
(5) A transformação T é injetiva sse transforma conjuntos linearmente independentes em conjuntos linearmente independentes.

→ Uma transformação linear fica completamente determinada pelas imagens dos vetores de uma base do espaço de partida. ◄

Teorema

Consideremos dois espaços lineares, U e V, sobre K.
Seja $\beta = (u_1, \ldots, u_k)$ uma base de U. Se $f: \{u_1, \ldots, u_k\} \to V$ é uma função, então, existe uma única transformação linear $T_f: U \to V$ tal que,

$$T_f(u_i) = f(u_i), \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Além disso, T_f é definida por:

$$T_f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k)$$

Se $T: U \to V$ é linear então $T = T_{f_T}$ onde a função $f_T: \{v_1, \dots v_k\} \to V$ é definida por:

$$f_T(v_i) = T(v_i), \text{ para } 1 \leq i \leq K$$

Problema 4.8.

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad T(1,1,0) = (2,1) \quad T(0,1,1) = (3,-1) \quad T(0,0,1) = (2,-1)$

$\mathcal{B}((1,1,0),(0,1,1),(0,0,1))$

A) $T(1,1,0) = (2,1)$
$T(0,1,1) = (1,1)$ X

B - $T(1,1,0) = (0, \dots)$ X

C - $T(1,1,0) = (2,1)$
$T(0,1,1) = (3,-1)$ ✓
$T(0,0,1) = (2,-1)$

28/11/2022

Matéria MAP -> espaços lineares e transformações lineares

[Relações entre as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação linear]

Teorema - Teorema da dimensão

Sejam $T: U \to V$, linear. Nestas condições tem-se que:

$$\dim(U) = \dim(Nuc(T)) + \dim(Im(T))$$

$T: U \to V$
$Nuc(T) = \{x \in V : T(x) = 0\} \leq U$
$Im(T) = \{T(x) : x \in U\} \leq V$
e $U = L_U(\{v_1, \dots, v_n\})$
$Im(T) = L_V(T(v_1), \dots, T(v_n))$

Problema 4.9

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad T(x,y,z) = (x-2y+z, 4x+2y-z, -6y+3z)$

a) $Nuc(T) = \{(x,y,z) : (x-2y+z, 4x+2y-z, -6y+3z) = (0,0,0)\}$

$$Nuc\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}\right) = \{(x,y,z) : x = 0 \wedge 2y - z = 0\} = \{(0,y,2y) : y \in \mathbb{R}\} =$$
$$= L_{\mathbb{R}^3}(\{(0,1,2)\}) \to \dim(Nuc(T)) = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

pq se trata de um sistema homogéneo n é preciso estar pois vai-se manter igual mas tem de estar no final

$$\underset{3}{\dim(\mathbb{R}^3)} = \underset{1}{\dim(Nuc(T))} + \underset{2}{\dim(Im(T))}$$

$\mathbb{R}^3 = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}) \Rightarrow Im(T) = L_{\mathbb{R}^3}(\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\}) =$

$= L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,4,0), \cancel{(-2,2,-6)}, (1,-1,3)\})$

não precisa já lá estar

Isomorfismos

Definição

Uma transformação linear $T: U \to V$ diz-se um isomorfismo se for bijetiva.

Teorema

Se $T: U \to V$ é um isomorfismo então:

(1) $\dim(U) = \dim(V)$
(2) os vetores $u_1, \dots, u_n \in U$ satisfazem uma propriedade $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ (envolvendo noções de álgebra linear) em U se e só se os vetores $T(u_1), \dots, T(u_n)$ satisfazem a propriedade $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ em V.

Sejam U um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e $\beta = (u_1, \dots, u_n)$ uma base ordenada de U.
A transformação $()_\beta : U \to \mathbb{K}^n$ que transforma cada $x \in U$ no seu vetor de coordenadas, x_β, na base β, é um isomorfismo.
Do mesmo modo, a transformação $()^\beta : \mathbb{K}^n \to U$ que transforma cada $(\xi_1, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ no vetor $(\xi_1, \dots, \xi_n)^\beta \in U$ que tem aquele n-úplo como vetor de coordenadas é um isomorfismo.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Em que condições $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo?

É injetiva sse $\dim(Nuc(T_A)) = \dim(Nuc(A)) = 0$ sse $car(A) = n$.
Recorrendo à fórmula concluímos que

$$n = \dim(Im(T_A)) + \dim(Nuc(T_A)) = \dim(Im(T_A))$$

logo,

$$Im(T_A) = \mathbb{R}^n$$

e assim T_A é também sobrejetiva.

► Resumindo: T_A é um isomorfismo sse A é invertível. ◄

Observe-se que $Im(T_A) = EC(A)$

Se $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Tem-se que

$$T_A(x_1, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 A_{*,1} + \dots + x_n A_{*,n} \in EC(A)$$

Operações envolvendo transformações lineares

Definição

Sejam $S, T \in Hom(U, V)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$

(1) A transformação $S+T : U \to V$ é definida por $(S+T)(x) := S(x) + T(x)$
(2) A transformação $\alpha T : U \to V$ é definida por $(\alpha T)(x) := \alpha T(x)$.

► É simples verificar que se S e T são lineares então, $S+T$ e αT são transformações lineares. ◄

Definição

Sejam $S \in Hom(U,V)$ e $T \in Hom(V,W)$. A composição $T \circ S : U \to W$ define-se:

$$(T \circ S)(x) = T(S(x))$$

No contexto dos espaços lineares, em lugar de escrevermos $T \circ S$ escrevemos simplesmente TS.

A composição $TS: U \to W$ é uma transformação linear.

$$TS(\alpha x + \beta y) = T(S(\alpha x + \beta y)) = T(\alpha S(x) + \beta S(y)) =$$
$$= \alpha T(S(x)) + \beta T(S(y)) = \alpha (TS)(x) + \beta (TS)(y)$$

Definição

Sejam U e V espaços com a mesma dimensão e $T: U \to V$ uma transformação linear bijetiva. Enquanto função, T tem uma inversa (única) que é a função $T^{-1}: V \to U$, definida pelas identidades:

$$T^{-1}T(x) = x \quad (x \in U) \qquad TT^{-1}(y) = y \quad (y \in V)$$

Teorema

Sejam U e V espaços com a mesma dimensão e $T: U \to V$ bijetiva. A inversa de T é uma transformação linear $T^{-1}: V \to U$.

$$T^{-1}(\alpha u + \beta w) = T^{-1}(\alpha T(x) + \beta T(y)) =$$
$$u = T(x),\ w = T(y)$$
$$= T^{-1}(T(\alpha x + \beta y)) = \alpha x + \beta y = \alpha T^{-1}(u) + \beta T^{-1}(w)$$

Representação matricial de uma transformação linear

Definição

Seja $T: U \to V$ é uma transformação linear. Sejam ainda $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ e $\bar{\beta} = (f_1, \dots, f_m)$ bases ordenadas de U e V, respetivamente. Uma representação matricial de T relativamente às bases β e $\bar{\beta}$ é uma matriz que se denota por $[T]_{\bar{\beta},\beta}$ e que satisfaz:

(1) $[T]_{\bar{\beta},\beta} \in K^{m \times n}$
(2) $T(x)_{\bar{\beta}} = [T]_{\bar{\beta},\beta}\, x_\beta$

Teorema

Sejam $T: U \to V$ uma transformação linear, $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ e $\bar{\beta} = (f_1, \dots, f_m)$ bases ordenadas de U e V, respetivamente. A matriz que representa T, relativamente às bases β e $\bar{\beta}$ é a matriz que se denota por $[T]_{\bar{\beta},\beta}$, cujas colunas são os vetores de coordenadas, $T(e_i)_{\bar{\beta}}$, das imagens dos vetores da base β, na base $\bar{\beta}$.

Nas condições do teorema acima, se A é uma matriz que satisfaz $T(x)_{\bar{\beta}} = A x_\beta$ para qualquer $x \in U$ então $[T]_{\bar{\beta},\beta} = A$. Ou seja, a matriz que representa relativamente às bases $\beta, \bar{\beta}$ é única.

ex 1:

$$[T]_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(1,1,0)_{\bar{\beta}} & T(1,-1,0)_{\bar{\beta}} & T(0,0,1)_{\bar{\beta}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ (3,1)_{\bar{\beta}} & (0,1)_{\bar{\beta}} & (0,-1)_{\bar{\beta}} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & y \end{array}\right] \qquad (x,y)_{\bar{\beta}} = (x-y, y)$$

ex 2:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\qquad T(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$

base canónica de $\mathbb{R}^2$

$\beta = ((1,0),(0,1))$ $\qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{\bar{\beta}} = (a,b,c,d)$

$$[T]_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} | & | \\ T(1,0)_{\bar{\beta}} & T(0,1)_{\bar{\beta}} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$T(1,0)_{\bar{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\bar{\beta}} = (1,0,0,1)$ $\qquad T(0,1)_{\bar{\beta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\bar{\beta}} = (0,1,1,0)$

$T \Leftrightarrow T[T]_{\bar{\beta},\beta}$

Problemas

28/11/2022

112) $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T_1(x,y) = (x-y, x+y)$ $\qquad T_2(x,y) = (2x, y-x)$

falta para T2
já está feito

a) $\beta = ((1,0),(0,1))$ $\qquad T_1$ é invertível sse $(T)[T]_\beta$ é invertível sse $[T]_\beta$ é invertível

$$[T_1]_{\beta,\beta} = [T_1]_\beta = \begin{bmatrix} | & | \\ T_1(1,0)_\beta & T_1(0,1)_\beta \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ (1,1)_\beta & (-1,1)_\beta \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2]_\beta = \begin{bmatrix} | & | \\ T_2(1,0)_\beta & T_2(0,1)_\beta \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ (2,-1)_\beta & (0,1)_\beta \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$car[T_1]_\beta = car[T_2]_\beta = 2$ (é máxima $\Rightarrow$ são invertíveis)

Se T é invertível então $[T^{-1}]_{\beta,\bar{\beta}} = [T]^{-1}_{\bar{\beta},\beta}$

$T_1^{-1}(x,y)$

$$U_\beta \underset{T^{-1}\,\bar{\beta}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} V^{[T]_{\bar{\beta},\beta}}$$

$[T^{-1}]_{\beta,\bar{\beta}}$

$$[T_1^{-1}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$T_1^{-1}(x,y)$

$$[T_1^{-1}]_\beta (x,y)_\beta = T_1^{-1}(x,y)_\beta \Leftrightarrow \underset{\text{p/ a base canónica}}{T_1^{-1}(x,y)} = [T_1^{-1}]_\beta (x,y) \Leftrightarrow T_1^{-1}(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(x+y, -x+y)$$

falta T_1T_2 já está

b) T_2T_1

$$U \xrightarrow[{[T_1]_{\bar\beta,\beta}}]{T_1} V \xrightarrow[{[T_2]_{\beta^*,\bar\beta}}]{T_2} W$$

$\beta \qquad \bar\beta \qquad \beta^*$

$T_2T_1 \quad [T_2T_1]_{\beta^*,\beta}$

$(T_2T_1)(x) = T_2(T_1(x))$

$x \longmapsto T(x)$ A representa T

$\Updownarrow$

$T_A(x_\beta) = T(x)_{\bar\beta}$

$[T_2T_1]_{\beta^*,\beta} = [T_2]_{\beta^*,\bar\beta}[T_1]_{\bar\beta,\beta}$

$[T_1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [T_2]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$[T_2T_1]_\beta = [T_2]_\beta [T_1]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$(T_2T_1)(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-2y \\ 2y \end{bmatrix} = (2x-2y, 2y)$

116) $T: \mathbb{R}^3_\beta \to \mathbb{R}^3_\beta \quad T(x,y,z) = (x-2y+z, 4x+2y-z, -6y+3z)$

a) $Nuc(T), Im(T)$

$A = [T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

$T = T_A \Rightarrow Nuc(T) = Nuc(A)$

$Im(T) = EC(A) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\{(1,4,0), \cancel{(-2,2,-6)}, (1,-1,3)\})$

ex:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\beta = ((1,1),(1,0))$

$A = [T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$Nuc(T) = ?$

$Im(T) = ?$

$T(x,y) = ?$

T_A

$Nuc(T_A) = Nuc(A) = Nuc(T)_\beta$

$Im(T_A) = EC(A) = Im(T)_\beta$

$T(x,y)_\beta = A(x,y)_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-x+y \\ -2y+2x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2y \\ 2x-4y \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x-y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x-y \end{array}\right]$

$T(x,y) = (-x+2y)(1,1) + (2x-4y)(1,0)$

ex3:

30/11/2022

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = [T]_{\bar\beta,\beta} \qquad \bar\beta = (1+t, 2t, 1+t^2)$

$\downarrow$

$T_A(x) = Ax$

$$U \xrightarrow{T} V$$

$\beta = (u_1, \dots, u_n) \qquad \bar\beta = (w_1, \dots, w_m)$

$$x \xrightarrow[T]{} T(x)$$

$T(x) = (A x_\beta)^{\bar\beta}$

$x_\beta \xrightarrow{T_A} (T(x))_\beta$

$\mathbb{K}^n \xrightarrow[T_A]{} \mathbb{K}^m$

$x \to T(x)$

$\downarrow$

$x_\beta \xrightarrow[T_A]{} A x_\beta = (T(x))_{\bar\beta}$

$\mathbb{R}^2$

$\beta = ((1,1),(1,-1))$

$(2,3)^\beta = 2(1,1) + 3(1,-1)$

$(2,3)_\beta \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t] \quad \bar\beta = (1+t, 2t, 1+t^2)$

$\beta = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

$T(x,y,z) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{(x,y,z)_\beta}\right)^{\bar\beta} = (x+y, y-z, y+2z)^{\bar\beta} = (x+y)(1+t) + (y-z)2t + (y+2z)(1+t^2) =$

$= x + xt + y + yt + 2yt - 2zt + y + yt^2 + 2z + 2zt^2 =$

$= (y+2z)t^2 + (x+3y-2z)t + (x+2y+2z)$

Representação matricial e mudanças de base

Problema

Supondo que $T: U \to V$ é linear β_1, β_2 são bases ordenadas de U e que $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2$ são bases ordenadas de V.

Qual a relação entre $[T]_{\overline{\beta}_1, \beta_1}$ e $[T]_{\overline{\beta}_2, \beta_2}$?

A relação, que envolve as matrizes de mudança de base é a seguinte:

$$[T]_{\overline{\beta}_1, \beta_1} = [\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2][T]_{\overline{\beta}_2, \beta_2}[\beta_2, \beta_1]$$

$U \xrightarrow{T} V$

$\beta_2 \leftarrow \beta_1 \qquad \overline{\beta}_1 \to \overline{\beta}_2 \qquad [T]_{\overline{\beta}_1, \beta_1}$

$(T(x))_{\overline{\beta}_2} = [T]_{\overline{\beta}_2, \beta_2} \, x_{\beta_2}$

$$\underbrace{[\overline{\beta}_2, \overline{\beta}_1]\overbrace{[T]_{\overline{\beta}_1, \beta_1} \underbrace{[\beta_1, \beta_2]\, x_{\beta_2}}_{x_{\beta_1}}}^{(T(x))_{\overline{\beta}_1}}}_{(T(x))_{\overline{\beta}_2}}$$

ex:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \beta = ((1,0),(1,1)) \qquad [T]_{\beta,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\overline{\beta}$ = base canónica $= ((1,0),(0,1))$

$$[T]_{\overline{\beta}, \overline{\beta}} = [\overline{\beta}, \beta][T]_{\beta,\beta}[\beta, \overline{\beta}] = [\overline{\beta}, \beta][T]_{\beta,\beta}[\overline{\beta}, \beta]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

A relação entre $Im(T)$ e $EC([T]_{\overline{\beta},\beta})$

Teorema

Suponhamos que $T: U \to V$ é linear, $\beta, \overline{\beta}$ são bases ordenadas de U e V, respetivamente e que $A = [T]_{\overline{\beta},\beta}$ é a matriz que representa T relativamente às bases β e $\overline{\beta}$. Nestas condições tem-se:

(1) $EC(A) = Im(T)_{\overline{\beta}}$, ou seja, $EC(A)^{\overline{\beta}} = Im(T)$.
(2) Em particular se $EC(A) = L_{K^m}(\{u_1, \dots, u_k\})$, onde $m = \dim(V)$, então $Im(T) = L_V(\{(u_1)^{\overline{\beta}}, \dots, (u_k)^{\overline{\beta}}\})$.
(3) Além disso, $\dim(Im(T)) = \dim(EC(A)) = car(A)$.

ex:

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \beta = ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ $\quad \bar{\beta} = ((1,1),(1,2))$

$$A = [T]_{\bar{\beta},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Im(T_A) = \mathcal{E}C(A) = (Im(T))_{\bar{\beta}}$$

$$\mathcal{E}C(A) = L_{\mathbb{R}^2}(\{(1,-1),(1,0)\})$$

$$Im(T) = L_{\mathbb{R}^2}(\{\underbrace{(1,-1)^{\bar{\beta}}},\underbrace{(1,0)^{\bar{\beta}}}\}) \to = 1(1,1)+0(1,2)$$

$$= 1(1,1) - 1(1,2)$$

A relação entre $Nuc(T)$ e $Nuc([T]_{\bar{\beta},\beta})$

Teorema

Suponhamos que $T: U \to V$ é linear, $\beta, \bar{\beta}$ são bases ordenadas de U e V, respetivamente e que $A = [T]_{\bar{\beta},\beta}$ é a matriz que representa T relativamente às bases β e $\bar{\beta}$. Nestas condições tem-se:

(1) $Nuc(A) = Nuc(T)_\beta$, ou seja, $Nuc(T) = Nuc(A)^\beta$.
(2) Em particular, se $\dim(U) = n$ e $Nuc(A) = L_{\mathbb{K}^n}(\{u_1, \dots, u_s\})$ então, $Nuc(T) = L_U(\{(u_1)^\beta, \dots, (u_s)^\beta\})$.
(3) Além disso, $\dim Nuc(T) = \dim Nuc(A) = nul(A)$

$Nuc(T_A) = Nuc(A) = (Nuc(T))_\beta$

Álgebra de representações matriciais

Teorema

Sejam $S, T: U \to V$, $R: V \to W$, transformações lineares e $\beta, \bar{\beta}, \bar{\bar{\beta}}$ bases ordenadas de U, V, W, respetivamente. Consideremos ainda escalares $\lambda, \xi \in \mathbb{K}$. Tem-se:

$$[\lambda S + \xi T]_{\bar{\beta},\beta} = \lambda [S]_{\bar{\beta},\beta} + \xi [T]_{\bar{\beta},\beta}$$

$$[RS]_{\bar{\bar{\beta}},\beta} = [R]_{\bar{\bar{\beta}},\bar{\beta}} [S]_{\bar{\beta},\beta}$$

Se R é invertível (caso em que $\dim V = \dim W$) então:

$$[R^{-1}]_{\bar{\beta},\bar{\bar{\beta}}} = [R]^{-1}_{\bar{\bar{\beta}},\bar{\beta}}$$

Exercícios do capítulo 2

05/12/2022

104) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbb{R} \right\}$

β a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}_\beta = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ $W_1, W_2 \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$ sse $(W_1)_\beta, (W_2)_\beta \leq \mathbb{R}^4$

$(W_1)_\beta = \{(a,b,c,a) : a,b,c \in \mathbb{R}\} = \{(a,0,0,a) + (0,b,0,0) + (0,0,c,0) : a,b,c \in \mathbb{R}\} =$
$= \{a(1,0,0,1) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) : a,b,c \in \mathbb{R}\} =$
$= \mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\})$

$\dim((W_1)_\beta) = 3 \Rightarrow \dim(W_1) = 3$

como $\dim(W_\beta) = \dim(W)$

$(W_2)_\beta = \{(0,a,-a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} =$
$= \mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{\underset{a=1\ b=0}{(0,1,-1,0)}, \underset{a=0\ b=1}{(0,0,0,1)}\})$

$\dim((W_2)_\beta) = 2 \Rightarrow \dim(W_2) = 2$

W_1 e W_2 são subespaços de V

$(W_1)_\beta + (W_2)_\beta = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1)\}) \overset{EC(A)}{=}$
$= \mathcal{L}_{\mathbb{R}^4}(\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\})$

$\dim((W_1)_\beta + (W_2)_\beta) = 4 \Rightarrow \dim(W_1 + W_2) = 4$

$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$
$4 = 3 + 2 - \dim(W_1 \cap W_2) \Leftrightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\dim(EC(A)) = car(A) = 4$

117) $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $B = (w_1, w_2)$ $w_1 = (-1,0)$ $w_2 = (-4,2)$ $\beta = ((-1,0), (-4,2))$

$(x,y) \xrightarrow{T} T(x,y) = (A(x,y)_\beta)^\beta$

$(x,y)_\beta \longrightarrow A(x,y)_\beta = T(x,y)_\beta$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & x \\ 0 & 2 & y \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -x \\ 0 & 1 & y/2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -x-2y \\ 0 & 1 & y/2 \end{array}\right]$$

$(x,y)_\beta = (-x-2y, y/2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x-2y \\ y/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y \\ -2x-11y/2 \end{bmatrix} = (T(x,y))_\beta$$

$T(x,y) = (-2y)(-1,0) + (2x + 11y/2)(-4,2) = (2y,0) + (8x+22y, -4x-11y) = (8x+24y, -4x-11y)$

$T(4,-2) = (8\times 4 + 24(-2), -4\times 4 - 11(-2)) = (-16, 6)$

$T(-1,0) = (8\times(-1) + 24\times 0, -4(-1) - 11\times 0) = (-8, 4)$

R: (B)

121) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $T(x,y,z) = (x+1, y, 2z+x)$ $S(x,y,z) = (2x, y-z)$

A - falsa ($T(0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$)
B - verdadeira ($ST(0,0,0) = S(T(0,0,0)) = S(1,0,0) = (2,0)$)
C - falsa $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^2$
D - falsa T não é transformação linear

R: (B)

123)
a) para ser injetiva o núcleo tem de ser trivial $\dim T: \mathbb{R}^5 \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}^3$ inj
Não
Falsa

$$U \to V$$
$$\dim(U) = \underbrace{\dim(\mathrm{Nuc}(T))}_{\geq 2} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(T))}_{\leq 3}$$
$$5 =$$
$$\Downarrow$$
$\mathrm{Nuc}(T)$ não é trivial $\Rightarrow$ T não é injetiva

b) Existem $T: \mathbb{R}^5 \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}^3$ sobrejetivas

$T(x,y,z,w,t) = (z,y,z)$
$\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$

$$[T]_{\beta^5_{can}, \beta^3_{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$W \leq V$, existe $T: U \to V$ (sse Nuc) t.q. $\mathrm{Nuc}(T) = W$

Verdadeira

base de W: $w_1, \ldots, w_k \to 0$

base de V: $v_1, \ldots, v_n \to W + 0$

$U \to V$
$u_1 \ldots u_n$ $T(u_1), \ldots, T(u_n)$

$T(x) = T(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_n T(u_n)$

h) $4 = \dim(\mathrm{Nuc}) + \dim(\mathrm{Im})$ Verdadeira

Problemas

05/12/2022

Exercícios do capítulo 7

113) $v_1 = (1,3)$ $v_2 = (-1,4)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $B = (v_1, v_2)$
$\beta = ((1,3), (-1,4))$

a) $(T(v_1))_\beta = (1, -2)$ $(T(v_2))_\beta = (3, 5)$

b) $T(1,3)$ $T(-1,4)$

$$[T]_{\beta,\beta} = \begin{bmatrix} | & | \\ (T(1,3))_\beta & (T(-1,4))_\beta \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$T(1,3) = (1,-2)^\beta = 1(1,3) - 2(-1,4) =$
$= (1,3) + (2,-8) =$
$= (3,-5) = (3,-5)_{\beta can}$

$T(-1,4) = (3,5)^\beta = 3(1,3) + 5(-1,4) =$
$= (3,9) + (-5,20) = (-2,29) =$
$= (-2,29)_{\beta can}$

$(x,y)^\beta$ vetor que tem coordenadas (x,y) na base β

$(x,y)_\beta$ coordenadas do vetor na base canónica

c) $[T]_{\beta can,\beta can} = \begin{bmatrix} | & | \\ (T(1,3))_{\beta can} & (T(-1,4))_{\beta can} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 25 \end{bmatrix}$

$T(x,y) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-2y \\ -5x+25y \end{bmatrix} = (3x-2y, -5x+25y)$

d) $T(1,1) = (3\times1-2\times1, -5\times1+25\times1) = (1, 24)$

114) $T: \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ $\quad T(p) = p' - 3p$ $\quad B_c = (1, t, t^2)$ $\quad B = (1-t, 2t+1, 1-t^2)$

a) $A = [T]_{B_c} = [T]_{B_c,B_c} =$

$T(1) = 1' - 3\times1 = -3$ $\qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$T(t) = t' - 3t = 1-3t$

$T(t^2) = (t^2)' - 3t^2 = 2t - 3t^2$

c) $C = [T]_B = [B, B_c][T]_{B_c}[B_c, B] = [B_c, B]^{-1}[T]_{B_c}[B_c, B] =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/3 & 8/3 & 2/3 \\ -1/3 & -7/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2+L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}L_2 \\ -L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-\frac{1}{3}L_3 \\ L_1-L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1-L_2]{}$

$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$

b) $B = [T]_{B_c,B} = [B_c, B_c][T]_{B_c}[B_c, B] = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

<u>OU</u>

$T(p)$ $\quad T(1-t) = -1-3+3t = -4+3t$

$T(2t+1) = 2-3-6t = -1-6t$ $\qquad [T]_{B_c,B} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$T(1-t^2) = -2t-3+3t^2 =$

120) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad T(x,y,z) = (7z, x+3y)$

$(0,0) \notin Nuc(T)$ $\qquad (3,0) \notin Nuc(T)$ $\qquad \pi$ são subespaços de partida $\mathbb{R}^3$

$T(1,0,0) = (0,1)$ $\qquad A = [T]_{Bc_{\mathbb{R}^3}, Bc_{\mathbb{R}^2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad Nuc(T) = Nuc(A)$

$T(0,1,0) = (0,3)$ $\qquad Im(T) = EC(A) = \mathbb{R}^2$

$T(0,0,1) = (7,0)$ $\qquad car(A) = 2$

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Nuc(T)) + \dim(Im(T)) \Leftrightarrow$ $\qquad \dim(Nuc(T)) = 1$

$\Leftrightarrow 3 = \dim(Nuc(T)) + 2 \Leftrightarrow \dim(Nuc(T)) = 1$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

R: (C)

4128) $T: \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ $\quad p(t) \mapsto 4p'(t) - p(t)$

a) $A = [T]_{\beta can}$. A é invertível? $\quad \beta can = (1, t, t^2)$

$T(1) = 4 \times 0 - 1 = -1$

$T(t) = 4 \times 1 - t = 4 - t$

$T(t^2) = 4 \times 2t - t^2 = 8t - t^2$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como A é invertível tem-se que T é invertível

b) $p \in \mathbb{R}_2[t]$ $\quad T(p(t)) = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$, $t \in \mathbb{R}$

$p = T^{-1}(1 - 2t + t^2)$

$$[T^{-1}]_{\beta can} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -32 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$p_{\beta can} = [T^{-1}](1, -2, -t^2) = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -32 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$p(t) = 36 + 10t + t^2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_3]{-L_1,\, -L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 + 8L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 + 4L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -32 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

n-Paralelogramos

07/12/2022

1) Definição

Seja U um espaço de dimensão n. Dados n vetores $u_1, \dots, u_n \in U$ o n-paralelogramo determinado por aqueles vetores é um conjunto:

$$P(u_1, \dots, u_n) = \{\eta_1 u_1 + \dots + \eta_n u_n \mid \eta_1, \dots, \eta_n \in [0,1]\}$$

[Não excluímos a possibilidade de os vetores $u_1, \dots, u_n$ serem linearmente dependentes, caso em que obtemos sólidos degenerados cujo volume se considera nulo (correspondendo à situação nas dimensões dois e três).]

Uma transformação linear $T: V \to V$ transforma n-paralelogramos em n-paralelogramos, mais precisamente:

$$\begin{aligned} T(P(u_1, \dots, u_n)) &= T(\{\eta_1 u_1 + \dots + \eta_n u_n \mid \eta_1, \dots, \eta_n \in [0,1]\}) = \\ &= \{T(\eta_1 u_1 + \dots + \eta_n u_n) \mid \eta_1, \dots, \eta_n \in [0,1]\} = \\ &= \{\eta_1 T(u_1) + \dots + \eta_n T(u_n) \mid \eta_1, \dots, \eta_n \in [0,1]\} = \\ &= P(T(u_1), \dots, T(u_n)) \end{aligned}$$

Volume de um n-paralelogramo

Para cada dimensão n procuramos uma função que possa medir o volume dos n-paralelogramos. Representamos essa função por $\det(u_1, \dots, u_n)$.

Uma tal função existe e pode ser definida de modo que:

$$|\det(u_1, \dots, u_n)| = \text{volume}(P(u_1, \dots, u_n))$$

Definição do Determinante

Definição:

Uma forma n-linear alternada (ou simplesmente: multilinear alternada) em $\mathbb{K}^n$ é uma função:

$$f: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ vezes}} \to \mathbb{K}$$

que é linear i.e,

$$f(v_1, \dots, \alpha x_i + \beta y_i, \dots, v_n) = \alpha f(v_1, \dots, x_i, \dots v_n) + \beta f(v_1, \dots, y_i, \dots, v_n)$$

para qualquer $1 \leq i \leq n$, e é alternada i.e. para qualquer $1 \leq i < j \leq n$ tem-se:

$$f(v_1, \dots x_i, \dots x_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, v_n)$$

$f(x,y)$
2-linear ou bilinear

$f(\alpha u + \beta v, y) = \alpha f(u,y) + \beta f(v,y)$
$f(x, \alpha u + \beta v) = \alpha f(x,u) + \beta f(x,v)$
$f(x,y) = -f(y,x)$
$f(x,x) = -f(x,x) \Rightarrow f(x,x) = 0$

Teorema:

Para qualquer n existe uma (única) forma n-linear alternada em $\mathbb{K}^n$.

Definição:

Para cada n, dada uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, o determinante de A define-se da seguinte forma:

$$\det(A) = |A| := f_n(A_{*,1}, \dots, A_{*,n}),$$

onde f_n é a única forma n-linear em $\mathbb{K}^n$ (ou seja, o determinante é uma função das colunas da matriz).

$$\cancel{\left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Teorema

Usando a definição de f_n e a definição de $\det(A)$ resulta que:

$$\det(A) = |A| := f_n(A_{*,1}, \dots, A_{*,n}) = f_n(A_{1,*}, \dots A_{n,*})$$

Assim, $\det(A) = \det(A^T)$. (Ou seja, o determinante pode também ser visto como uma função das linhas da matriz).

Propriedades

A função $\det: \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ possui as seguintes propriedades

1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

2) $\det\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = ab - bc$

3) Se B se obtém de A trocando duas linhas (ou duas colunas), então $\det(B) = -\det(A)$

4) Se B se obtém de A substituindo $A_{i,*}$ por $A_{i,*} + \alpha A_{j,*}$ (ou $A_{*,j}$ por $A_{*,i} + \alpha A_{*,j}$) então, $\det(B) = \det(A)$

5) Se B se obtém de A substituindo $A_{i,*}$ por $\alpha A_{i,*}$ (ou $A_{*,j}$ por $\alpha A_{*,j}$), com $\alpha \neq 0$, então $\det(B) = \alpha \det(A)$

6) Seja $A_{i,*} = \sum_{j \neq i} \eta_j A_{j,*}$ (ou $A_{*,j} = \sum_{j\neq i} \eta_j A_{*,j}$) então, $\det(A) = 0$.

$f(u,v)$

$f(u+\alpha v, v) = f(u,v) + \alpha \overbrace{f(v,v)}^{=0} = f(u,v)$

Determinantes e o método de eliminação de Gauss

➢ Usando o método de eliminação de Gauss, podemos transformar uma matriz A numa matriz $\bar{A}$ em escada de linhas (e portanto triangular superior). Tem-se então que $|A| = k|\bar{A}|$ onde o valor de k é determinado pela forma como as operações elementares afetam o determinante. ◄

Teorema

Se uma matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ é triangular superior (ou inferior) então, o determinante de B é o produto dos elementos da diagonal principal.

➢ Como uma matriz em escada de linhas é uma matriz triangular superior, o método de eliminação de Gauss permite calcular o determinante de uma qualquer matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. ◄

ex:

Calcular os determinantes das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

Problema 5.4

Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x=0$ e $x=2$ tem que:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$x=0$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ combinação linear

$x=2$: $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ combinação linear

Problema 5.5

Sem calcular explicitamente o determinante mostre que:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$L_1 + L_2 = (a+b+c, a+b+c, a+b+c) = (a+b+c)(1,1,1)$

$L_1 + L_2 - (a+b+c)L_3 = (0,0,0)$

Problema 5.6

Sem calcular explicitamente o determinante escreva:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes em cujas entradas não figurem adições.

$(a_1, c_1) + (b_1, d_1)$

$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{vmatrix} = f_2((a_1+b_1, c_1+d_1), (a_2+b_2, c_2+d_2)) = f_2((a_1,c_1)+(b_1,d_1), (a_2,c_2)+(b_2,d_2)) =$

$= f_2((a_1,c_1),(a_2,c_2)+(b_2,d_2)) + f_2((b_1,d_1),(a_1,c_2)+(b_2,d_2)) =$

$= f_2((a_1,c_1),(a_2,c_2)) + f_2((a_1,c_1),(b_2,d_2)) + f_2((b_1,d_1),(a_2,c_2)) + f_2((b_1,d_1),(b_2,d_2)) =$

$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$

Problema 5.7

Diga, justificando, se é ou não verdadeira a igualdade:

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

$$\underset{\det = 0}{\overset{A+B}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}} = \underset{\det = 1}{\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}} + \underset{\det = 1}{\overset{B}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}$$

$\det(A+B) = 0 \neq \det(A) + \det(B) = 2$

Propriedades do Determinante

Teorema

Sejam $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Tem-se:

1) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$;

2) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;

3) $\det(A) = \det(A^T)$;

4) Se A é invertível então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$. $|A|.|A^{-1}| = |A A^{-1}| = |I| = 1$

Não existe nenhuma lei geral para $\det(A+B)$

Teorema

Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. São equivalentes:

1) $\det(A) \neq 0$;

2) As linhas de A são linearmente independentes;

3) As colunas de A são linearmente independentes;

4) $car(A) = n$;

5) A é invertível;

6) Os sistemas da forma $Ax = b$ são todos possíveis e determinados, independentemente de b.

12/12/2022

$|A| \longrightarrow |A^*|$ A^* em escada de linhas

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \vdots \\ \alpha L_j \\ \vdots \end{vmatrix}$$

Desenvolvimentos de Laplace para o cálculo de determinantes

Consideremos uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. O menor (i,j) de A, que se denota $A^{(i,j)}$ é a matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j de A.

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A^{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Consideremos uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. O cofator (i,j) de A é:

$$cof_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det(A^{(i,j)})$$

A matriz dos cofatores de A, denota-se $Cof(A)$ e é:

$$Cof(A) = [cof_{i,j}(A)]$$

Ao longo de uma linha

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\, cof_{i,j}(A) = A_{i,1}\, cof_{i,1}(A) + \dots + A_{i,n}\, cof_{i,n}(A)$$

Ao longo de uma coluna

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\, cof_{i,j}(A) = A_{1,j}\, cof_{1,j}(A) + \dots + A_{n,j}\, cof_{n,j}(A)$$

ex 1:

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule os respetivos determinantes recorrendo aos desenvolvimentos de Laplace.

$$A_{i,j}\, Cof_{i,j}(A) = A_{i,j}(-1)^{i+j} |A^{(i,j)}|$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1.1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.(-1).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1.1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (4-1)-(2-1)+(1-2) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\left(1.1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \underbrace{1(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=0}\right) = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-6) = -4$$

Problema 5.13

Verifique que as matrizes A e B são invertíveis, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a) $\det(A^3(2B)^{-1})$;
b) $\det(A^T BA)$;
c) $\det(A+2B)$;
d) $\det(tr(B)A)$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5 \neq 0$$

A é invertível

$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2 \neq 0$ B é invertível

a) $\det(A^3 (2B)^{-1}) = \det(A^3) \det((2B)^{-1}) = (\det(A))^3 \cdot \det(\frac{1}{2}B^{-1}) = (\det(A))^3 (1/2)^3 \det(B^{-1}) =$

$= (\det(A))^3 (1/2)^3 \frac{1}{\det(B)} = 5^3 (1/2)^3 \frac{1}{2}$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$
$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

b) $\det(A^T B A) = \det(A^T) \det(B) \det(A) = \det(A)^2 \det(B) = 5^2 \times 2$

d) $\det(tr(B) A) = \det(2A) = 2^3 \det(A) = 2^3 \times 5$

matriz adjunta

Definição

A matriz adjunta de A é a matriz que se denota por (Adj A) ou Adj(A) e que é a matriz

$$(\text{Adj } A) = (\text{Cof } A)^T$$

i.e. a transposta da matriz dos cofatores.

Teorema

Para qualquer matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tem-se o seguinte:

$$A(\text{Adj} A) = \det(A) \mathbb{1}$$

Se a matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ não é singular i.e., se $|A| \neq 0$ então, da relação

$$A(\text{Adj } A) = \det(A) \mathbb{1}$$

pode extrair-se uma outra forma de calcular a inversa de A. Como $\det(A) \neq 0$ tem-se:

$$\frac{1}{|A|} A(\text{Adj } A) = A\left(\frac{1}{|A|}(\text{Adj} A)\right) = 1$$

ou seja,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)$$

$A(\text{Adj } A) = |A| \mathbb{1} \Leftrightarrow \frac{1}{|A|} A(\text{Adj} A) = \mathbb{1} \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)\right) = \mathbb{1} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj} A)$

arc

Problema 5.18

Seja $(\text{Cof } A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a) Use a fórmula $A(\text{Adj } A) = \det(A)\mathbb{1}$ para calcular $\det(A)$

b) Calcule a entrada $(3,2)$ da inversa.

a) $|A.(\text{Cof } A)^T| = ||A|\mathbb{1}| \Leftrightarrow |A|.|(\text{Cof } A)^T| = |A|^4 \Leftrightarrow |A|^3 = |(\text{Cof } A)^T| = 18$

$\Leftrightarrow |A| = \sqrt[3]{18}$

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $|\alpha A| = \alpha^n |A|$ $\qquad ||A|\mathbb{1}| = |A|^4 . 1$

b) $A^{-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{18}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad (A^{-1})_{3,2} = \frac{1}{\sqrt[3]{18}}$

Regra de Cramer

Teorema

Dado um sistema $Ax = b$ onde $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ é invertível $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ então, as componentes da solução do sistema (que é um sistema possível e determinado) são dadas por:

$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_b^i)}{\det(A)}}$$

onde,

$$A_b^i = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,i-1} & b_1 & A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & \cdots & A_{2,i-1} & b_2 & A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,i-1} & b_n & A_{n,i+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

Ex:

Determine a componente x_3 da solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Problemas

12/12/2022

Exercícios do capítulo 3

137)

a) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \underset{C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & b_3+c_3 \end{vmatrix} \underset{C_3+C_1}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ 2a_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ 2a_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} \underset{C_2-C_1}{=} 2\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 \\ a_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

135) $$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\det(M) = ?$

troca linhas ou colunas ⇒ troca o sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_3-L_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{=} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

b) $\det(2M) = ?$ $\quad \det(2M^{-1}) = ?$ $\quad \det((2M)^{-1}) = ?$

$$\det(2M) = 2^4 \det(M) = 16 \times (-2) = -32$$

$$\det(2M^{-1}) = 2^4 \det(M^{-1}) = \frac{16}{\det(M)} = \frac{16}{-2} = -8$$

$$\det((2M)^{-1}) = \det(\tfrac{1}{2} M^{-1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{\det(M)} = -\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32}$$

c) $$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \overbrace{(\text{Cof } M)^T}^{\text{Adj } M}$$

$$(M^{-1})_{3,4} = \frac{1}{|M|} ((\text{Cof } M)^T)_{3,4} = \frac{1}{|M|} (\text{Cof } M)_{4,3} =$$

$$= \frac{1}{|M|} \underbrace{(-1)^{4+3} |M^{(4,3)}|}_{\text{Cof}_{4,3}(M)} = \frac{1}{-2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

arc

4ª coluna de M^{-1} onde queremos a 3ª linha

(a) $M\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

$x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}}{|M|} = (M^{-1})_{3,4}$

$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \to$ 1ª coluna de A^{-1}

$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \to$ 2ª coluna de A^{-1}

14.1) $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 5 & 0\\ 1 & \lambda+1 & 2\\ 1 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}\lambda-1 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix} + (\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 5\\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix} =$

$= -2(2(\lambda-1)-5)+(\lambda+1)((\lambda-1)(\lambda+1)-5) = -2(2\lambda-7)+(\lambda+1)(\lambda^2-6) =$

$= -4\lambda+14+\lambda^3-6\lambda+\lambda^2-6 = \lambda^3+\lambda^2-10\lambda+8 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$

substituir os divisores no polinómio, $=0$ é raiz

1 é raiz

	1	1	-10	8
1		1	2	-8
	1	2	-8	0
2		2	8	
	1	4	0	
-4		-4		
	1	0		

R.: (A)

14.3) $a \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&a+1&2&2\\a&a+1&a+2&3\\a&a+1&a+2&a+3\end{vmatrix} = a^2$

$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&a+1&2&2\\a&a+1&a+2&3\\a&a+1&a+2&a+3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2-a&2-a\\0&1&2&3-a\\0&1&2&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2-a&2-a\\0&0&a&1\\0&0&a&a+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2-a&2-a\\0&0&a&1\\0&0&0&a\end{vmatrix} =$

$= a^2$

14/12/2022

Operadores diagonalizáveis

Definição

Uma transformação linear $T: V \to V$ diz-se um operador em V.

Definição

Consideremos $T: V \to V$ um operador em V. Dizemos que T é diagonalizável se existe uma base ordenada, β, de V, relativamente à qual $[T]_\beta$ é uma matriz diagonal.

Uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ é diagonalizável se o operador T_A for diagonalizável.

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $\quad T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \quad x \mapsto Ax$

De forma equivalente uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ é diagonalizável se e só se existem matrizes $P, D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ onde P é invertível e D é diagonal tais que $A = PDP^{-1}$.

Se β_c é a base canónica de $\mathbb{K}^n$ então $[T_A]_{\beta_c} = A$. Existe uma base β onde $[T_A]_\beta = D$ é diagonal se e só se

$$A = [T_A]_{\beta_c} = [\beta_c, \beta][T_A]_\beta[\beta_c, \beta]^{-1} = PDP^{-1}$$

$$A^{40} = (P\,\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)P^{-1})^{40} = P(\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n))^{40}P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(a_1^{40}, \dots, a_n^{40})P^{-1}$$

$e^{a_1}, \dots, e^{a_n}$

$(PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$

$(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! \qquad e^A = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!\; A^n$$

Se um operador T em V possui uma representação diagonal numa base $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ de V, digamos que:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

então, $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, $T(v_2) = \lambda_2 v_2$, ..., $T(v_n) = \lambda_n v_n$.

$T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = \lambda_1 v_1 \qquad T(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n = \lambda_2 v_2$

Valores próprios

– espetro de T

Definição

Seja T um operador em V. Um valor próprio de T é um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ para o qual existe um vetor não-nulo $x \in V$ tal que $T(x) = \lambda x$.
Se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, um valor próprio de A é um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ para o qual existe um vetor não-nulo $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $Ax = \lambda x$, ou seja, é um valor próprio de T_A.

Definição

Seja T um operador em V. O conjunto dos valores próprios de T denota-se por $\Lambda(T)$ e designa-se de espetro de T. O conjunto dos valores próprios de A denota-se por $\Lambda(A)$ e designa-se de espetro de A.

Teorema

Sejam, T um operador em V, β uma base de V e $A = [T]_\beta$. Tem-se que λ é um valor próprio de T se e só se é um valor próprio de A. (Ou seja $\Lambda(T) = \Lambda(A)$.)

ex1:

Consideremos $A=\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}$, $v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

tem-se que:

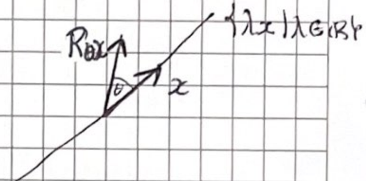
$$Av_1=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=-2v_1 \text{ e } Av_2=\begin{bmatrix}15\\20\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=5v_2$$

assim $\lambda_1=-2, \lambda_2=5$ são valores próprios de A.

ex2:

Se considerarmos o plano $\mathbb{R}^2$ uma rotação de ângulo θ em torno da origem é a transformação que relativamente à base canónica é representada pela matriz

$$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$



Se $\theta=0$ então $R=\mathbb{1}$.
Caso contrário, para nenhum vetor não-nulo, x, se tem $R_\theta x=\lambda x$.
Assim, R_θ não possui valores próprios (reais), para $\theta\neq 0$.

vetores próprios

Definição

Se T é um operador em V (resp. se $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$) e λ é um valor próprio de T (resp. de A), denotamos por $E_T(\lambda)$ (resp. $E_A(\lambda)$) o conjunto de todos os vetores $x\in V$ tais que $T(x)=\lambda x$ (resp. $x\in\mathbb{K}^n$ tais que $Ax=\lambda x$. Os elementos não nulos de $E_T(\lambda)$ designam-se de vetores próprios de T associados ao valor próprio λ).

Teorema

Sejam, T um operador em V (resp. uma matriz $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$) e λ um valor próprio de T (resp. de A). Tem-se que $E_T(\lambda)$ é um subespaço de V (resp. $E_A(\lambda)$ é um subespaço de $\mathbb{K}^n$) Além disso $\dim(E_T(\lambda))\geq 1$ (resp. $\dim(E_A(\lambda))\geq 1$).

$x, y\in E_A(\lambda)$

$A(\alpha x+\beta y)=\lambda(\alpha x+\beta y)$

$\alpha Ax+\beta Ay=\alpha(Ax)+\beta(Ay)=\lambda(\alpha x+\beta y)$ // cqd

$\Lambda(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$

$E_A(\lambda_1),\dots,E_A(\lambda_m)$

$\beta_1=(\dots)$ $\quad\quad\beta_m=(\dots)$