CDI 1 - TP **1o. Exame** **LEE - LEGI - LETI** **10/02/2022**
Justifique as suas respostas
ESBOÇO DE RESOLUÇÃO:

1. (**1.25 val.**) Indique, se existirem, os majorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo e/ou mínimo do conjunto $A = \{\, x \in \mathbf{R} \,:\, |3x^2+5x+1| \le |x^2-5x+3| \,\}$.

$$|3x^2+5x+1| \le |x^2-5x+3| \iff$$
$$3x^2+5x+1 \le |x^2-5x+3| \wedge -|x^2-5x+3| \le 3x^2+5x+1 \iff$$
$$(x^2-5x+3 \ge 3x^2+5x+1 \vee x^2-5x+3 \le -(3x^2+5x+1))\wedge$$
$$(-(3x^2+5x+1) \le |x^2-5x+3|) \iff$$
$$(0 \ge 2x^2+10x-2 \vee 4x^2+4 \le 0)\wedge$$
$$(-(3x^2+5x+1) \le x^2-5x+3 \vee x^2-5x+3 \le 3x^2+5x+1) \iff$$
$$(0 \ge x^2+5x-1 \vee x^2+1 \le 0) \wedge (0 \le 4x^2+4 \vee 0 \le 2x^2+10x-2) \iff$$
$$(0 \ge x^2+5x-1 \vee (\text{ condição impossível })) \wedge ((\text{ condição universal }) \vee 0 \le x^2+5x-1) \iff$$
$$(0 \ge x^2+5x-1) \wedge (\text{ condição universal }) \iff 0 \ge x^2+5x-1 \iff$$
$$\iff \cdots \text{ fórmula resolvente } \cdots \iff \frac{-5-\sqrt{29}}{2} \le x \le \frac{-5+\sqrt{29}}{2}$$

Portanto
$$A = \left[\frac{-5-\sqrt{29}}{2}, \frac{-5+\sqrt{29}}{2}\right],$$

donde,

$$\{\text{ majorantes de } A\,\} = \left[\frac{-5+\sqrt{29}}{2}, +\infty\right[\qquad \sup A = \max A = \frac{-5+\sqrt{29}}{2}$$
$$\{\text{ minorantes de } A\,\} = \left]-\infty, \frac{-5-\sqrt{29}}{2}\right] \qquad \inf A = \min A = \frac{-5-\sqrt{29}}{2}$$

2. (**2.5 val.**) Mostre, **por indução**, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, para cada natural $n \ge 1$.

Para $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ e $\displaystyle\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ donde a proposição é verdadeira para $n=1$.

Suponhamos agora que há um natural l tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{l}{l+1}$ (Hipótese de

Indução (HI)). Então,

$$\sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(l+1)(l+1+1)} = \text{(HI)}\ \frac{l}{l+1} + \frac{1}{(l+1)(l+2)}$$
$$= \frac{l(l+2)+1}{(l+1)(l+2)} = \frac{l^2+2l+1}{(l+1)(l+2)} = \frac{(l+1)^2}{(l+1)(l+2)} = \frac{l+1}{l+2}$$

Portanto a hereditariedade é satisfeita. Como a proposição também é verdadeira para $n = 1$, fica provado por indução que é verdade que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, para cada natural $n \geq 1$.

3. **(1.25 val.)** Seja $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, contínua, tal que $f(0) > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Prove que f tem máximo em $[0, +\infty[$.

$$\lim \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \overset{def.}{\iff} \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,:\, x > \frac{1}{\delta} \Longrightarrow |f(x)| < \epsilon$$

Então, com $\epsilon = f(0)$, existe $\delta > 0$ tal que, para $x > 1/\delta$, $f(x) < f(0)$. Com este δ, aplicamos o Teorema de Weierstrass a f e ao intervalo $[0, 1/\delta]$, que nos permite afirmar que existe $c \in [0, 1/\delta]$ tal que $f(c)$ é máximo, isto é, para cada $x \in [0, 1/\delta]$, $f(x) \leq f(c)$; em particular, $f(0) \leq f(c)$. Por outro lado (foi assim que "criámos" este δ), para cada $x \in]1/\delta, +\infty[$, $f(x) < f(0)(\leq f(c))$. Portanto, qualquer que seja $x \in [0, +\infty[$, $f(x) \leq f(c)$, ou seja f tem máximo em $[0 + \infty[$ (que é $f(c)$).

4. **(1.25 val.)** Mostre que $0 < x - \log(1 + x) < x^2$, qualquer que seja $x > 0$.

Seja $x > 0$ e considere $f(t) = t - \log(1 + t)$, para cada $t > 0$. f é diferenciável (justificar). Aplicando o Teorema de Lagrange a f e ao intervalo $[0, x]$, tem de existir $c_x \in\ ]0, x[$ tal que

$$f'(c_x) = \frac{x - \log(1+x) - (0 - \log(0+1))}{x - 0} = \frac{x - \log(1+x)}{x}.$$

Por outro lado,

$$f'(c_x) = \Big(t - \log(1+t)\Big)'\Big|_{t=c_x} = \Big(1 - \frac{1}{1+t}\Big)\Big|_{t=c_x} = 1 - \frac{1}{1+c_x} = \frac{1+c_x-1}{1+c_x} = \frac{c_x}{1+c_x}.$$

Como $c_x \in\ ]0, x[$,

$$c_x > 0 \Longrightarrow 1 + c_x > 1 > 0 \Longrightarrow \frac{c_x}{1+c_x} > 0.$$

E também porque $c_x \in\ ]0, x[$,

$$\frac{c_x}{1+c_x} < \frac{c_x}{1} < x,$$

portanto

$$0 < \frac{c_x}{1+c_x} < x \quad \iff \quad 0 < \frac{x - \log(1+x)}{x} < x \quad \iff \quad 0 < x - \log(1+x) < x^2,$$

para cada $x > 0$.

5. **(1.25 val.)** Calcule: $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^{\sin x}$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} e^{\log(x^{\sin x})} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} e^{\sin x \, \log(x)} = e^{\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \sin x \, \log(x)}$$
$$\left(= e^{0 \cdot (-\infty)} - \text{ indeterminação } \right)$$

Tem-se

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \sin x \, \log(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{(\sin x)^{-1}} \left(= \frac{-\infty}{\infty} \right)$$

Aplicando a regra de Cauchy (justificar porque se pode aplicar):

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{(\log(x))'}{((\sin x)^{-1})'} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1/x}{(-1)(\sin x)^{-2} \cdot \cos x} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} -\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x =$$
$$= -\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \longrightarrow 0^+} \sin x = -1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$$

donde

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \sin x \, \log(x)} = e^0 = 1$$

6. **(1.25 val.)** Considere a função $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q} \\ -x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$, num intervalo $[a, b]$ com $0 < a < b \in \mathbf{R}$. Escreva as somas de Darboux, inferior e superior, desta função, para uma decomposição d, qualquer, de $[a, b]$. Simplifique-as o mais possível. Calcule os integrais inferior e superior de f sobre $[a, b]$. Decida se f é ou não integrável sobre $[a, b]$.

Seja $d = \{a = x_0 < x_1 < \cdot < x_{k-1} < x_k < \cdot < x_n = b\}$ uma decomposição de $[a, b]$. Tem-se,

$$s_d(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(-Id)(x_k - x_{k-1}) =$$
$$= s_d(-Id)$$

onde Id é a função identidade isto é, $Id(x) = x$, para qualquer x. Portanto,

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s_d(f) \,|\, d \text{ é decomposição de [a, b]}\} = \sup\{s_d(-Id) \,|\, d \text{ é decomposição de [a, b]}\} =$$
$$= \underline{\int_a^b} (-Id) = (\text{ porque } -Id \text{ é integrável (justificar)}) \int_a^b (-Id) = -\int_a^b Id =$$
$$= -\frac{b^2 - a^2}{2} \qquad (\text{ usar regra de Barrow })$$

Por outro lado,

$$S_d(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(Id)(x_k - x_{k-1}) =$$
$$= S_d(Id)$$

Portanto,

$$\overline{\int_a^b} f = \sup\{S_d(f) \,|\, d \text{ é decomposição de [a, b]}\} = \sup\{S_d(Id) \,|\, d \text{ é decomposição de [a, b]}\} =$$
$$= \overline{\int_a^b} Id = (\text{ porque } Id \text{ é integrável (justificar)}) \int_a^b Id = \frac{b^2 - a^2}{2} \quad (\text{ usar regra de Barrow })$$

Então, porque $0 < a < b$,

$$\underline{\int_a^b} f = \frac{b^2 - a^2}{2} \neq -\frac{b^2 - a^2}{2} = \overline{\int_a^b} f$$

donde f não é integrável sobre $[a, b]$.

7. **(2.5 val.)** Primitivar: $\qquad x\sqrt{1+x}$

$$\mathbf{P}x\sqrt{1+x} = \mathbf{P}(1+x-1)\sqrt{1+x} = \mathbf{P}\left[(1+x)\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x}\right] =$$
$$= \mathbf{P}(1+x)^{3/2} - \mathbf{P}(1+x)^{1/2} = \frac{1}{1+3/2}(1+x)^{3/2+1} - \frac{1}{1+1/2}(1+x)^{1/2+1} + c =$$
$$= \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + c$$

8. **(2.5 val.)** Primitivar: $\qquad \dfrac{x^4 - x + 1}{x^3 - x^2}$

Fazer divisão polinomial para obter $x^4 - x + 1 = (x+1)(x^3 - x^2) + (x^2 - x + 1)$ donde:

$$\mathbf{P}\frac{x^4 - x + 1}{x^3 - x^2} = \mathbf{P}\frac{(x+1)(x^3 - x^2) + (x^2 - x + 1)}{x^3 - x^2} = \mathbf{P}(x+1) + \mathbf{P}\frac{(x^2 - x + 1)}{x^2(x-1)} =$$
$$= \frac{(x+1)^2}{2} + \mathbf{P}\left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x-1}\right) = \cdots$$

Entretanto,

$$\frac{(x^2 - x + 1)}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x-1} \Longrightarrow A_2 = \left.\frac{(x^2 - x + 1)}{x - 1}\right|_{x=0} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$B = \left.\frac{(x^2 - x + 1)}{x^2}\right|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$$

donde

$$\begin{aligned}
&\frac{(x^2-x+1)}{x^2(x-1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\Longrightarrow x\frac{(x^2-x+1)}{x^2(x-1)}=\frac{A_1x}{x}+\frac{-x}{x^2}+\frac{x}{x-1}\\
&\Longrightarrow \lim_{x\mapsto+\infty} x\frac{(x^2-x+1)}{x^2(x-1)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{A_1x}{x}+\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-x}{x^2}+\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{x-1}\\
&\Longrightarrow 1=A_1+0+1\Longrightarrow A_1=0
\end{aligned}$$

e retomando os cálculos da primitiva acima:

$$\begin{aligned}
\cdots&=\frac{(x+1)^2}{2}+\mathbf{P}\left(\frac{0}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\right)=\frac{(x+1)^2}{2}+\mathbf{P}\frac{-1}{x^2}+\mathbf{P}\frac{1}{x-1}=\\
&=\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{1}{x}+\log|1-x|+c
\end{aligned}$$

9. **(1.25 val.)** Seja $a\in\mathbf{R}$. Calcule a área delimitada por $y^2=4ax$ e $x^2=4ay$.

Se $a=0$ a região é constituída por um só ponto donde a área é nula.

Se $a>0$, temos as funções $y=\dfrac{x^2}{4a}$ e $y=2\sqrt{a}\sqrt{x}$ cujos gráficos se intersectam nos pontos de abcissas:

$$\frac{x^2}{4a}=2\sqrt{a}\sqrt{x}\implies\frac{x^4}{16a^2}=4ax\implies x=0\ \text{ ou }\ x^3=64a^3\implies x=0\ \text{ ou }\ x=4a$$

donde, a área pedida é:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{4a}\left(2\sqrt{a}\sqrt{x}-\frac{x^2}{4a}\right)dx=2\sqrt{a}\int_0^{4a}x^{1/2}dx-\frac{1}{4a}\int_0^{4a}x^2dx=\\
&=2\sqrt{a}\frac{1}{1+1/2}\left[x^{1+1/2}\right]_0^{4a}-\frac{1}{4a}\frac{1}{1+2}\left[x^{1+2}\right]_0^{4a}=2\sqrt{a}\frac{2}{3}(4a)^{3/2}-\frac{1}{12a}(4a)^3=\\
&=\frac{2}{3}(4a)^2-\frac{1}{3}(4a)^2=\frac{1}{3}(4a)^2=\frac{16}{3}a^2
\end{aligned}$$

(Analogamente para $a<0$.)

10. **(2.5 val.)** Diga qual é a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$

$$\frac{\dfrac{[(2(n+1))!]^2}{(n+1)!(3(n+1))!}}{\dfrac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}} = \frac{[(2n+2)!]^2}{[(2n)!]^2}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{(3n)!}{(3n+3)!} =$$

$$= \frac{(2n+2)^2(2n+1)^2[(2n)!]^2}{[(2n)!]^2}\frac{n!}{(n+1)n!}\frac{(3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!} =$$

$$= \frac{(2n+2)^2(2n+1)^2}{(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{2(n+1)}{n+1}\frac{2(n+1)}{3(n+1)}\frac{2n+1}{3n+2}\frac{2n+1}{3n+1} =$$

$$= \frac{4(2+1/n)(2+1/n)}{3(3+2/n)(3+1/n)} \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} \frac{16}{27} < 1$$

Portanto, pelo critério de d'Alembert, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$ converge.

11. (**1.25 val.**) Determine o desenvolvimento de McLaurin de $\dfrac{2x^3}{3-x^2}$

$$\frac{2x^3}{3-x^2} = \frac{2x^3}{3(1-x^2/3)} = \frac{2x^3}{3}\frac{1}{1-x^2/3} \overset{|x|<\sqrt{3}}{=} \frac{2x^3}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{3}\right)^n = \frac{2x^3}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{3^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3^{n+1}}x^{2n+3} \quad (k=n+1) \quad = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{3^k}x^{2k+1}$$

12. (**1.25 val.**) Calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{1010}$ usando um polinómio de Taylor de ordem 1 de uma função apropriada. Estime o erro cometido.

$$\sqrt[3]{1010} = \sqrt[3]{1000+10} = \sqrt[3]{1000\left(1+\frac{10}{1000}\right)} = \sqrt[3]{1000}\sqrt[3]{1+\frac{10}{1000}} = 10\sqrt[3]{1+\frac{1}{100}}.$$

Consideremos a função $f(x) = 10\sqrt[3]{1+x}$.

$$\sqrt[3]{1010} = f\left(\frac{1}{100}\right).$$

Consideremos a fórmula de McLaurin de 1a. ordem de f com resto de Lagrange:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(c)}{2!}x^2 \qquad \text{com } c \text{ estritamente entre } x \text{ e } 0.$$

Tem-se:

$$f(x) = 10\sqrt[3]{1+x} \Longrightarrow f(0) = 10$$

$$f'(x) = \frac{10}{3}(1+x)^{-2/3} \Longrightarrow f'(0) = \frac{10}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{20}{9}(1+x)^{-5/3}$$

Então, a aproximação pedida é:

$$\sqrt[3]{1010} = f\left(\frac{1}{10}\right) = f(0) + f'(0)\frac{1}{10} = 10 + \frac{10}{3}\frac{1}{100} = 10 + \frac{1}{30} = 10,03(3).$$

Quanto ao erro cometido (com $0 < c < 10^{-2}$):

$$|\sqrt[3]{1010} - 10,0(3)| = \left| f(\left(\frac{1}{100}\right) - \left(f(0) + f'(0)\frac{1}{100}\right)\right| = \left|\frac{f''(c)}{2!}\left(\frac{1}{100}\right)^2\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{20}{9}|1+c|^{-5/3}\,10^{-4} \leq \frac{10}{9}\cdot 1\cdot 10^{-4} \leq 2\cdot 10^{-4} = 0,0002$$