**CDI 1 - TP** **2o. Exame** **LEE - LEGI - LETI** **24/02/2022**
**Justifique as suas respostas**
**ESBOÇO DE RESOLUÇÃO:**

1. **(3.5 val.)** Indique, se existirem, os majorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo e/ou mínimo do conjunto $A = \{ x \in \mathbf{R} : |3x^2+5x+1| \geq |x^2-5x+3| \}$.

$$|3x^2+5x+1| \geq |x^2-5x+3| \iff$$
$$3x^2+5x+1 \geq |x^2-5x+3| \vee -|x^2-5x+3| \geq 3x^2+5x+1 \iff$$
$$(x^2-5x+3 \leq 3x^2+5x+1 \wedge x^2-5x+3 \geq -(3x^2+5x+1)) \vee$$
$$(-(3x^2+5x+1) \geq |x^2-5x+3|) \iff$$
$$(0 \leq 2x^2+10x-2 \wedge 4x^2+4 \geq 0) \vee$$
$$(-(3x^2+5x+1) \geq x^2-5x+3 \wedge x^2-5x+3 \geq 3x^2+5x+1) \iff$$
$$(0 \leq x^2+5x-1 \wedge x^2+1 \geq 0) \vee (0 \geq 4x^2+4 \wedge 0 \geq 2x^2+10x-2) \iff$$
$$(0 \leq x^2+5x-1 \wedge (\text{ condição universal })) \vee ((\text{ condição impossível }) \wedge 0 \geq x^2+5x-1) \iff$$
$$(0 \leq x^2+5x-1) \vee (\text{ condição impossível }) \iff 0 \leq x^2+5x-1 \iff$$
$$\iff \cdots \text{ fórmula resolvente } \cdots \iff x \leq \frac{-5-\sqrt{29}}{2} \vee x \geq \frac{-5+\sqrt{29}}{2}$$

Portanto
$$A = \left] -\infty, \frac{-5-\sqrt{29}}{2} \right] \cup \left[ \frac{-5+\sqrt{29}}{2}, +\infty \right[,$$
donde, $A$ não tem majorantes nem minorantes, nem supremo nem ínfimo, nem máximo nem mínimo.

2. **(3.5 val.)** Mostre, por indução, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)2^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$, para cada natural $n \geq 1$.

Para $n = 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=1}^{1} \frac{k+2}{k(k+1)2^k} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$
e
$$1 - \frac{1}{(n+1)2^n} = 1 - \frac{1}{(1+1)2^1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
donde a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Suponhamos agora que há um natural $l$ tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{l} \frac{k+2}{k(k+1)2^k} = 1 - \frac{1}{(l+1)2^l}$ (Hipótese de Indução (HI)). Então,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{l+1} \frac{k+2}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=1}^{l} \frac{k+2}{k(k+1)2^k} + \frac{l+1+2}{(l+1)(l+1+1)2^{l+1}} = \\
&= \text{(HI)}\ 1 - \frac{1}{(l+1)2^l} + \frac{l+3}{(l+1)(l+2)2^{l+1}} = 1 - \frac{2(l+2)-(l+3)}{(l+1)(l+2)2^l} = \\
&= 1 - \frac{(l+1)}{(l+1)(l+2)2^{l+1}} = 1 - \frac{1}{(l+2)2^{l+1}}
\end{aligned}$$

Portanto a hereditariedade é satisfeita. Como a proposição também é verdadeira para $n = 1$, fica provado por indução que é verdade que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)2^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$, para cada natural $n \geq 1$.

3. **(1 val.)** Calcule (ou mostre que não existe): $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sin(\sqrt{x})$.

Considere as sucessões $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2 \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $x'_n = (2n\pi)^2 \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Tem-se,

$$\begin{aligned}
\sin(\sqrt{x_n}) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 1 \\
\sin(\sqrt{x'_n}) &= \sin(2n\pi) = \sin(0) = 0 \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 0 \neq 1
\end{aligned}$$

Portanto, não existe o limite indicado.

4. **(1 val.)** Seja $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, contínua, tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Prove que $f$ tem máximo ou mínimo em $\mathbf{R}$.

   1. Suponha que $f$ é idênticamente nula. Então

   $$\max_{x\in\mathbf{R}} f(x) = 0 = \min_{x\in\mathbf{R}} f(x),$$

   o que termina a demonstração, neste caso.

   2. Suponha que $f$ não é idênticamente nula. Então existe $a \in \mathbf{R}$ tal que $f(a) \neq 0$. Por outro lado, como $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, então, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x > \frac{1}{\delta}$ implica que $-\epsilon < f(x) < \epsilon$; $x < -\frac{1}{\delta}$ implica que $-\epsilon < f(x) < \epsilon$.

      I. Se $f(a) > 0$ faça $\epsilon = f(a)$; existe $\delta > 0$ tal que $x > \frac{1}{\delta}$ ou $x < -\frac{1}{\delta}$ implica que $f(x) < f(a)$. Pelo Teorema de Weierstrass, $f$ tem máximo no intervalo $[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}]$, já que este é fechado e limitado e $f$ é contínua. Portanto existe $c \in [-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}]$ tal que $f(c) \geq f(x)$ qualquer que seja $x \in [-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}]$. Como $a \in [-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}]$, então se $x > \frac{1}{\delta}$ ou $x < -\frac{1}{\delta}$, $f(x) < f(a) \leq f(c)$ ou seja $f(c)$ é máximo de $f$ sobre $\mathbf{R}$.

II. Se $f(a) < 0$ faça $\epsilon = -f(a)$; existe $\delta > 0$ tal que $x > \frac{1}{\delta}$ ou $x < -\frac{1}{\delta}$ implica que $f(x) > f(a)$. Pelo Teorema de Weierstrass, $f$ tem mínimo no intervalo $[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}]$, já que este é fechado e limitado e $f$ é contínua. Portanto existe $c' \in [-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}]$ tal que $f(c') \leq f(x)$ qualquer que seja $x \in [-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}]$. Como $a \in [-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}]$, então se $x > \frac{1}{\delta}$ ou $x < -\frac{1}{\delta}$, $f(x) > f(a) \geq f(c)$ ou seja $f(c)$ é mínimo de $f$ sobre $\mathbf{R}$.

5. **(1 val.)** Dados números reais $a < b$, sejam $f$ e $g$ funções contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$, satisfazendo $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$. Mostre que a equação $f'(x) = g'(x)$ tem solução em $]a, b[$.

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$ para cada $x \in \mathbf{R}$. Então $h$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ (justificar). Para além disso, $h(a) = f(a) - g(a) = 0 = f(b) - g(b) = h(b)$. Portanto, $h$ está nas condições do Teorema de Rolle. Então, existe $c \in ]a, b[$ tal que $0 = h'(c) = f'(c) - g'(c)$. Isto é, existe $c \in ]a, b[$ tal que $f'(c) = g'(c)$ ou seja, existe solução da equação $f'(x) = g'(x)$ sobre $]a, b[$.

6. **(2.5 val.)** Primitivar: $\arctan(\sqrt{x})$.

$$\mathbf{P} \arctan(\sqrt{x}) = x \arctan(\sqrt{x}) - \mathbf{P}\, x \cdot \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$
$$= x \arctan(\sqrt{x}) - \mathbf{P}\, x \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \mathbf{P} \frac{\sqrt{x}}{1+x} =$$
$$= x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \int dx \, \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \ldots$$
Fazendo $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2udu$
$$\cdots = x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \int 2udu \, \frac{u}{1+u^2} = x \arctan(\sqrt{x}) - \int du \, \frac{u^2}{1+u^2} =$$
$$= x \arctan(\sqrt{x}) - \int du \, \frac{1+u^2-1}{1+u^2} = x \arctan(\sqrt{x}) - \int du \, 1 + \int du \, \frac{1}{1+u^2} =$$
$$= x \arctan(\sqrt{x}) - u + \arctan(u) + c = x \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + c$$

7. **(2.5 val.)** Primitivar: $\dfrac{x^4}{x^4 - 3x^2 - 4}$

$$\frac{x^4}{x^4 - 3x^2 - 4} = \frac{x^4 - 3x^2 - 4 + 3x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4} = 1 + \frac{3x^2 - 4}{x^4 - 3x^2 - 4} = 1 + \frac{3x^2 + 4}{(x^2)^2 - 3(x^2) - 4}$$
(fórmula resolvente para $x^2$) $= 1 + \dfrac{3x^2 + 4}{[(x^2) - 4][(x^2) + 1]} = 1 + \dfrac{3x^2 + 4}{(x-2)(x+2)(x^2+1)}$

Por outro lado,

$$\frac{3x^2+4}{(x-2)(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

com

$$A = \left.\frac{3x^2+4}{(x+2)(x^2+1)}\right|_{x=2} = \frac{3\cdot 4+4}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$$
$$B = \left.\frac{3x^2+4}{(x-2)(x^2+1)}\right|_{x=-2} = \frac{3\cdot 4+4}{-4\cdot 5} = -\frac{4}{5}$$

Portanto,

$$0 \underset{x\mapsto+\infty}{\longleftarrow} x\,\frac{3x^2+4}{(x-2)(x+2)(x^2+1)} = x\,\frac{4/5}{x-2} - x\,\frac{4/5}{x+2} + \frac{Cx^2+Dx}{x^2+1} \underset{x\mapsto+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{5} - \frac{4}{5} + C + 0$$

donde $C = 0$ e finalmente:

$$\left.\frac{3x^2+4}{(x-2)(x+2)(x^2+1)}\right|_{x=0} = \left.\frac{4/5}{x-2}\right|_{x=0} - \left.\frac{4/5}{x+2}\right|_{x=0} + \left.\frac{D}{x^2+1}\right|_{x=0} \iff$$
$$\frac{4}{-4} = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5} + D \quad \iff \quad D = -\frac{1}{5}$$

Então:

$$\mathbf{P}\frac{x^4}{x^4-3x^2-4} = \mathbf{P}\,1 + \mathbf{P}\,\frac{4/5}{x-2} + \mathbf{P}\,\frac{-4/5}{x+2} + \mathbf{P}\,\frac{-1/5}{1+x^2} =$$
$$= x + \frac{4}{5}\log|x-2| - \frac{4}{5}\log|x+2| - \frac{1}{5}\arctan x + c$$

8. (**1 val.**) Seja $r > 0$. Calcule a área delimitada por uma circunferência de raio $r$.

(Este é um dos exercícios das listas de problemas.)
Há que integrar a função $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ de $x=0$ a $x=r$ e multiplicar por 4:

$$\mathbf{P}\sqrt{r^2-x^2} = x\sqrt{r^2-x^2} - \mathbf{P}\, x\,\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{r^2-x^2}} = x\sqrt{r^2-x^2} - \mathbf{P}\,\frac{-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} =$$
$$= x\sqrt{r^2-x^2} - \mathbf{P}\,\frac{r^2-x^2-r^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = x\sqrt{r^2-x^2} - \mathbf{P}\,\sqrt{r^2-x^2} + \mathbf{P}\,\frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2}} =$$
$$= x\sqrt{r^2-x^2} - \mathbf{P}\,\sqrt{r^2-x^2} + r^2\mathbf{P}\,\frac{1}{\sqrt{r^2\Big(1-(x/r)^2\Big)}} =$$
$$= x\sqrt{r^2-x^2} - \mathbf{P}\,\sqrt{r^2-x^2} + r^2\mathbf{P}\,\frac{1/r}{\sqrt{1-(x/r)^2}} =$$
$$= x\sqrt{r^2-x^2} - \mathbf{P}\,\sqrt{r^2-x^2} + r^2\arcsin(x/r)$$

donde

$$2\,\mathbf{P}\sqrt{r^2-x^2} = x\sqrt{r^2-x^2} + r^2\arcsin(x/r)$$

e portanto,

$$\mathbf{P}\sqrt{r^2-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin(x/r) + c.$$

Então,

$$4\int_0^r dx\sqrt{r^2-x^2} = 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin(x/r)\right]_{x=0}^{x=r} = 4\left[0 + \frac{r^2}{2}\arcsin(1) - 0 - 0\right] =$$
$$= 4\cdot\frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi r^2$$

9. (**1 val.**) Suponha que $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ é contínua e que $\displaystyle\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$. Calcule $f(2)$.

Pelo Teorema Fundamental da Análise e pelo Teorema da Derivada da Função Composta,

$$x' = \left(\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt\right)' \implies 1 = f(x^2(1+x))\cdot(x^2(1+x)' = f(x^2(1+x)\cdot(2x+3x^2)$$

donde

$$f(x^2(1+x)) = \frac{1}{2x+3x^2}.$$

Com $x=1$, tem-se:

$$f(2) = f(1^2(1+1)) = \frac{1}{2\cdot 1 + 3\cdot 1^2} = \frac{1}{5}$$

10. (**1 val.**) Diga qual a natureza das séries: $(i)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n^3}+n^3)}{(n+2)\sqrt{n}}$ $\quad (ii)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

(i) Passamos à série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin(\frac{1}{n^3}+n^3)}{(n+2)\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin(\frac{1}{n^3}+n^3)|}{(n+2)\sqrt{n}},$$

cujo termo geral satisfaz:

$$\frac{|\sin(\frac{1}{n^3}+n^3)|}{(n+2)\sqrt{n}} \le \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}+2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Então,

$$\frac{\frac{1}{(n+2)\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{n^{3/2}}{(n+2)\sqrt{n}} = \frac{n\sqrt{n}}{(n+2)\sqrt{n}} = \frac{n}{n+2}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n+2} = \frac{1}{1+2/n} \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 1 \in \mathbf{R}^+$$

Então, pelo critério do limite, as séries de termos gerais $\frac{1}{(n+2)\sqrt{n}}$ e $\frac{1}{n^{3/2}}$, têm a mesma natureza. Como $3/2 > 1$ então a série de termo geral $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (cf. teóricas). Então a série de termo geral $\frac{1}{(n+2)\sqrt{n}}$ converge. Finalmente, pela critério da majoração, já que $\dfrac{|\sin(\frac{1}{n^3}+n^3)|}{(n+2)\sqrt{n}} \le \dfrac{1}{(n+2)\sqrt{n}}$, então a série de termo geral $\dfrac{|\sin(\frac{1}{n^3}+n^3)|}{(n+2)\sqrt{n}}$ converge. Portanto, a série de termo geral $\dfrac{\sin(\frac{1}{n^3}+n^3)}{(n+2)\sqrt{n}}$ converge absolutamente.

(ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} =$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$$
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\left(\lim_{N\mapsto+\infty}\frac{1}{\sqrt{N+1}} - \frac{1}{1}\right) = -(0-1) = 1$$

Portanto, esta série converge.

11. **(1 val.)** Considere a função $f(x) = x^2\arctan(x^3)$ definida em $\mathbf{R}$. Calcule as 30 primeiras derivadas de $f$ na origem isto é, calcule $f^{(n)}(0)$ para $n = 1, 2, \ldots, 29, 30$.

(Exercício analogo a exercício das listas de problemas.) Recordando,

$$\arctan t \overset{|t|\le 1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1} \qquad \text{(cf. Teóricas).}$$

Por outro lado, se $f(x) = x^2 \arctan(x^3)$, então a sua série de McLaurin é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Então,

$$x^2 \arctan(x^3) \overset{|x^3|<1}{=} x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x^3)^{2n+1} = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{6n+3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{6n+5} =$$

$$= \frac{(-1)^0}{2\cdot 0+1} x^{6\cdot 0+5} + \frac{(-1)^1}{2\cdot 1+1} x^{6\cdot 1+5} + \frac{(-1)^2}{2\cdot 2+1} x^{6\cdot 2+5} + \frac{(-1)^3}{2\cdot 3+1} x^{6\cdot 3+5} + \frac{(-1)^4}{2\cdot 4+1} x^{6\cdot 4+5} +$$

$$+ \frac{(-1)^5}{2\cdot 5+1} x^{6\cdot 5+5} + \cdots = x^5 - \frac{1}{3} x^{11} + \frac{1}{5} x^{17} - \frac{1}{7} x^{23} + \frac{1}{9} x^{29} - \frac{1}{11} x^{35} + \cdots$$

Portanto, para $1 \leq j \leq 30$, $f^{(j)}(0) = 0$ excepto:

$$f^{(5)}(0) = 5! \quad f^{(11)}(0) = -\frac{11!}{3} \quad f^{(17)}(0) = \frac{17!}{5} \quad f^{(23)}(0) = -\frac{23!}{7} \quad f^{(29)}(0) = \frac{29!}{9}$$

12. **(1 val.)** Mostre que $0 < x - \log(1+x) < \frac{1}{2}x^2$, para qualquer $x > 0$.

Considere a função $f(t) = t - \log(1+t)$, para cada $t > 0$. $f$ é função contínua e diferenciável sobre o seu domínio (justificar) portanto para cada $x > 0$, $f$ está nas condições do Teorema de Lagrange sobre o intervalo $[0, x]$, donde, para algum $c \in ]0, x[$:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - \log(1+x) - 0}{x - 0} = \frac{x - \log(1+x)}{x}.$$

Por outro lado,

$$f'(t) = (t - \log(1+t))' = 1 - \frac{1}{1+t} \qquad \text{portanto} \qquad f'(c) = 1 - \frac{1}{1+c}$$

e como

$$0 < c \implies 1 < 1 + c \implies \frac{1}{1+c} < 1 \implies -1 < -\frac{1}{1+c} \implies (0 =) 1 - 1 < 1 - \frac{1}{1+c}$$

donde

$$0 < 1 - \frac{1}{1+c} = \frac{x - \log(1+x)}{x} \qquad \implies \qquad 0 < x - \log(1+x) \qquad \text{porque } x > 0\ .$$

Agora, quanto a $x - \log(1+x) < \frac{1}{2}x^2$.

Estabeleçamos a fórmula de McLaurin de 2a. ordem de $f$:

$$f(x) = x - \log(1+x) \qquad \implies \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \qquad \implies \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad \implies \qquad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = \left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)' = (-2)\frac{1}{(1+x)^3}$$

donde:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3 \qquad \text{para algum } c \in ]0, x[ \\
&= 0 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(-2)\frac{1}{(1+c)^3}x^3 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{(1+c)^3} < \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

já que tanto $c$ como $x$ são positivos.

Portanto,

$$0 < x - \log(1+x) < \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{para cada } x > 0.$$