

Justifique as suas respostas

**ESBOÇO DE RESOLUÇÃO:**

1. (7 vals.) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\arcsin x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\arcsin x} \left( = \frac{0}{0} \right)$$

Após justificar que pode usar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)'}{(\arcsin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

donde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\arcsin x} = 1.$$

2. (7 vals.) Mostre que  $\frac{1}{1+x} < \log(1+x) - \log(x) < \frac{1}{x}$ , para qualquer  $x > 0$ .

Sugestão: Aplicar Teorema de Lagrange.

Seja  $x > 0$  e considere  $f(t) = \log(t)$  em  $[x, x+1]$ ; justifique que  $f$  está nas condições do Teorema de Lagrange sobre  $[x, x+1]$ . Esse Teorema aplicado a esta  $f$  e a este intervalo implica a existência de  $c_x \in ]x, x+1[$  tal que

$$\frac{\log(1+x) - \log(x)}{x+1-x} = \frac{1}{c_x} \iff \log(1+x) - \log(x) = \frac{1}{c_x}$$

Por outro lado,  $c_x \in ]x, x+1[$  implica que

$$x < c_x < x+1 \implies \frac{1}{1+x} < \frac{1}{c_x} < \frac{1}{x} \implies \frac{1}{1+x} < \log(1+x) - \log(x) < \frac{1}{x}$$

3. (6 vals.) Considere a função  $f(x) = x$  para  $x \in \mathbf{Q}$  e  $f(x) = 0$  para  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , num intervalo  $[a, b]$  com  $0 < a < b \in \mathbf{R}$ . Escreva as somas de Darboux, inferior e superior, desta função, para uma decomposição  $d$ , qualquer, de  $[a, b]$ . Simplifique-as o mais possível. Calcule os integrais inferior e superior de  $f$  sobre  $[a, b]$  (note que já sabe integrar a função identidade!). Decida se  $f$  é ou não integrável sobre  $[a, b]$ .

Seja  $d$  uma decomposição de  $[a, b]$ :

$$d = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

Tem-se:

$$s_d(f) = \sum_{k=1}^n m_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 0 = 0$$

$$S_d(f) = \sum_{k=1}^n M_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s_d(f) : d \text{ é decomposição de } [a, b]\} = \sup\{0\} = 0.$$

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f &= \inf\{S_d(f) : d \text{ é decomp. de } [a, b]\} = \inf\left\{\sum_{k=1}^n x_k(x_k - x_{k-1}) : d \text{ é dec. de } [a, b]\right\} = \\ &= \inf\left\{\sum_{k=1}^n M_k(Id)(x_k - x_{k-1}) : d \text{ é decomp. de } [a, b]\right\} = \inf\{S_d(Id) : d \text{ é dec. de } [a, b]\} = \\ &= \overline{\int_a^b} Id = \int_a^b Id = \frac{b^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

onde  $Id$  designa a função identidade:

$$Id(x) = x$$

e usamos o facto, estabelecido nas teóricas, que  $Id$  é integrável num intervalo  $[a, b]$  com

$$\int_a^b Id = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Finalmente,

$$\underline{\int_a^b} f = 0 \neq \frac{b^2 - a^2}{2} = \overline{\int_a^b} f$$

e portanto  $f$  não é integrável em  $[a, b]$ .