

CDI-11

24/02/2021

Rui Miguel Sacramento@tecnico.ulisboa.pt
gabinete 2.14-16
Práticas: Luis Mala

Avaliação

2 MAP45 (cada 30%)
+ 1 Exame de 1h (40%)

Exame de Recurso de 2h

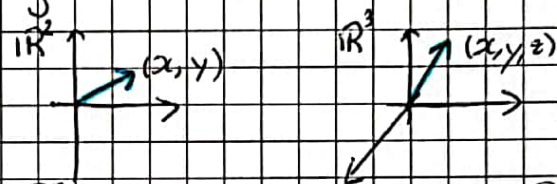
1º MAP- 21 de Março $\rightarrow$ cap. 1, 2, 3
2º MAP- 16 de Maio $\rightarrow$ cap. 4-7
Ex - 26 de junho $\rightarrow$ cap. 8-11
Ex. Recurso- 10 de julho

CÁLCULO I

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x)$
• limites
• continuidade
• diferenciabilidade
• integrabilidade

Diferença cálculo 1 $\rightarrow$ cálculo 2

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$
Para $n=2$ ou $n=3$, podemos representar geometricamente como vetores



Podemos definir operações algébricas em $\mathbb{R}^n$ usando as operações de $\mathbb{R}$ em cada componente.

Se $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos definir $x^1 + x^2$ e $\alpha x^1 \Rightarrow \mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

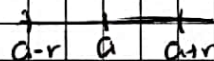
Para $x \in \mathbb{R}^n$, definimos a norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Se $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, a distância entre x^1 e x^2 é $d(x^1, x^2) = \|x^1 - x^2\|$.

Para $a \in \mathbb{R}^n$ e $a > 0$, a bola de centro em a e raio r aberta é

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\} \quad d(a, x) < r$$

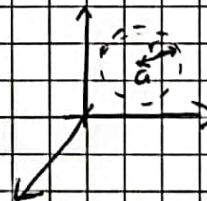
Em $\mathbb{R}$: $B_r(a) =]a-r, a+r[$



Em $\mathbb{R}^2$: $B_r(a)$ é um círculo aberto



Em $\mathbb{R}^3$: $B_r(a)$ é uma esfera aberta



T. função implícita e
da 1ª derivada no ponto
se quisermos a 2ª derivada
temos de usar um ponto
genérico (x, y, z)

noções topológicas

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$ é um ponto interior a A se existir uma bola aberta $B_r(x)$ tal que $B_r(x) \subset A$.

O interior de A ($\text{int } A$) é o conjunto de todas as pontos interiores de A .

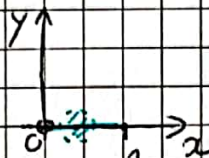
ex:

Em $\mathbb{R}$, $A =]0, 1[$

$\text{int } A =]0, 1[$



Em $\mathbb{R}^2$, $A =]0, 1[\times \{0\}$

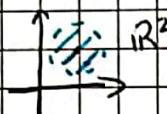


$\text{int } A = \emptyset$

como $y=0$ não existe nenhuma bola aberta que apenas contenha os pontos do conjunto

ex:

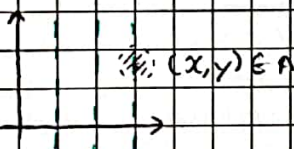
$A = \mathbb{R}^n$
 $\text{int } A = \mathbb{R}^n$



ex: Em $\mathbb{R}^2$,

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

$\text{int } A = \emptyset$



Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto exterior a A se existir numa bola aberta $B_r(x)$ tal que $B_r(x) \cap A = \emptyset$.

O exterior de A ($\text{ext } A$) é o conjunto de todos os pontos exteriores de A .

ex:

Em $\mathbb{R}$, $A =]0, 1[$

$\text{ext } A =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$



Em $\mathbb{R}^2$, $A =]0, 1[\times \{0\}$



$\text{ext } A = \mathbb{R}^2 \setminus [0, 1] \times \{0\}$

ex:

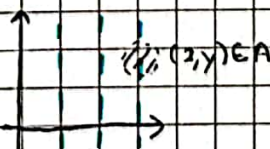
$A = \mathbb{R}^n$

$\text{ext } A = \emptyset$

ex: Em $\mathbb{R}^2$,

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

$\text{ext } A = \emptyset$

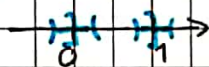


Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fronteira de A se qualquer bola aberta $B_r(x)$ contém pelo menos um ponto de A e um ponto fora de A .

A fronteira de A ($\text{fr} A = \text{front } A = \partial A$) é o conjunto de todos os pontos fronteiros de A .

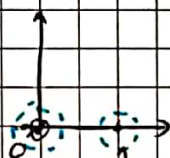
ex:

Em $\mathbb{R}$, $A =]0, 1[$



$\text{front } A = \{0, 1\}$

Em $\mathbb{R}^2$, $A =]0, 1[\times]0, 1[$



$\text{front } A = [0, 1] \times \{0, 1\} \cup \{0, 1\} \times [0, 1]$

ex:

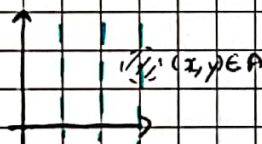
$A = \mathbb{R}^n$

$\text{front } A = \emptyset$

ex:

Em $\mathbb{R}^2$,
 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

$\text{front } A = \mathbb{R}^2$



Para qualquer $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = (\text{int } A) \cup (\text{ext } A) \cup (\text{front } A)$$

(união disjunta)



$$\text{int}(A^c) = \text{ext } A$$

e vice-versa

$$A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$$

(conjunto complementar)

$$\text{front}(A) = \text{front}(A^c)$$

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, o fecho de A ^{ou aderência de A} é $\bar{A} = (\text{int } A) \cup (\text{front } A)$.

$$\emptyset \subset \text{int } A \subset A \subset \bar{A} \subset \mathbb{R}^n$$

- Se $\text{int } A = A$, A é um conjunto aberto.
- Se $A = \bar{A}$, A é um conjunto fechado.
- Se $\bar{A} = \mathbb{R}^n$, A é um conjunto denso.

ex:

$A = \mathbb{R}^n$

$\text{int } A = \mathbb{R}^n$

$\text{ext } A = \emptyset$

$\text{front } A = \emptyset$

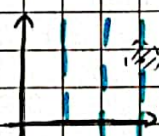
$\bar{A} = \mathbb{R}^n$

A é aberto, é fechado, é denso.

ex: Em $\mathbb{R}^2$

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

$\text{int } A = \emptyset$ $\text{ext } A = \emptyset$ $\text{front } A = \mathbb{R}^2$

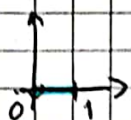


$\bar{A} = \mathbb{R}^2$

A não é aberto, não é fechado, é denso.

ex:

$$A =]0, 1[\times]0, 1[$$



$$\begin{aligned} \text{int } A &= \emptyset \\ \text{ext } A &= \mathbb{R}^2 \setminus [0, 1] \times]0, 1[\\ \text{front } A &= [0, 1] \times \{0\} \end{aligned}$$

$$\bar{A} = [0, 1] \times \{0\}$$

A não é aberto, não é fechado,
não é denso, não é limitado,
não é compacto

$A = \mathbb{R}^n$ é aberto e fechado

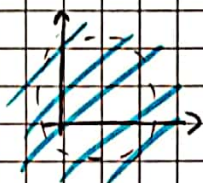
$A = \emptyset$ é aberto e fechado

$$\text{int}(A) = \text{ext}(A^c)$$

$$\text{int}(A^c) = \text{ext}(A)$$

A é aberto $\Leftrightarrow A^c$ é fechado

$A \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se existir $B_r(a)$ que contenha o conjunto.



$$A \subset B_r(a)$$

$A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se for limitado e fechado.

28/02/2023

Em $\mathbb{R}^n$, a bola aberta de centro em x^0 e raio r é

$$B_r(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| < r\}$$

$$\begin{aligned} x^0 &\in \mathbb{R}^n \\ x^i &= (x_i^1, \dots, x_i^n) \end{aligned}$$

~~sucessões em $\mathbb{R}^n$~~

Uma sucessão em $\mathbb{R}^n$ é uma função $x^k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Em $\mathbb{R}$:

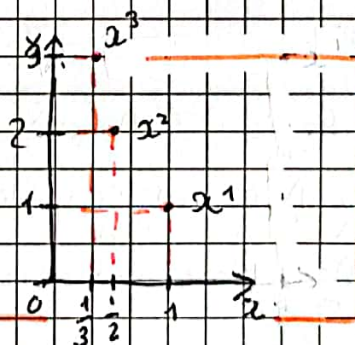
Uma sucessão era $x^k = (x^1, x^2, \dots)$

ex:

$$x^k = \left(\frac{1}{k}, k\right) \text{ termo geral}$$

é uma sucessão em $\mathbb{R}^2$

$$x^k = \left((1, 1), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \dots\right)$$



$x^k \rightarrow$ sucessão em $\mathbb{R}^n$

$$x^k = (x_i^1, \dots, x_i^n) \quad x^k = ((x_1^1, \dots, x_n^1), (x_1^2, \dots, x_n^2), \dots)$$

$x_i^k \rightarrow$ sucessões coordenadas para cada $i = 1, \dots, n$

$$x_1^k = \frac{1}{k}$$

$$x_2^k = k$$

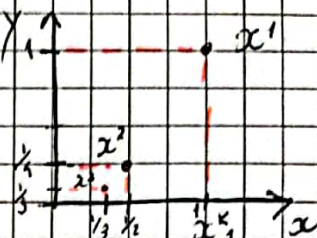
sucessões coordenadas



by Staples

ex:

$$x^k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} \right) = \left(1, 1 \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9} \right), \dots$$



Em $\mathbb{R}$: A sucessão x^k converge para $a \in \mathbb{R}$ se $|x^k - a| \rightarrow 0$

ou seja: $\forall \varepsilon > 0$ existe uma ordem N tal que

$$k \geq N \Rightarrow |x^k - a| < \varepsilon$$

$x^k \in B_\varepsilon(a)$



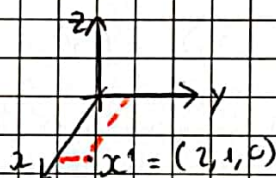
Em $\mathbb{R}^n$: A sucessão $x^k \rightarrow a \in \mathbb{R}^n$ se $\forall \varepsilon > 0$ existir N tal que $k \geq N \Rightarrow \|x^k - a\| < \varepsilon$
 $x^k \in B_\varepsilon(a)$

ex:

$x^k = (2, 1, 0)$ sucessão constante

$$x^k = (2, 1, 0), (2, 1, 0), \dots$$

$$x^1 \rightarrow (2, 1, 0)$$



$\forall \varepsilon > 0$ existe N tal que $k \geq N \Rightarrow \|x^k - (2, 1, 0)\| < \varepsilon$?

$$\|x^k - (2, 1, 0)\| < \varepsilon$$

$$\|(2, 1, 0) - (2, 1, 0)\| < \varepsilon \quad 0 < \varepsilon \text{ sempre verificado}$$

Dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $N=1$

$$k \geq 1 \Rightarrow \|x^k - (2, 1, 0)\| < \varepsilon$$

ex:

$$x^k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} \right)$$

Provamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = (0, 0)$.

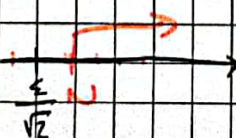
$\forall \varepsilon > 0$ existe N tal que $k \geq N \Rightarrow \|x^k - (0, 0)\| < \varepsilon$?

$$\left\| \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} \right) - (0, 0) \right\| < \varepsilon$$

x^k é convergente para a
se $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a$

$$\sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}} < \varepsilon$$

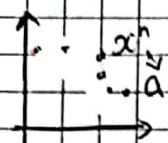
$$\sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}} \leq \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{k} < \varepsilon \Rightarrow k > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$



podemos escolher N como o menor natural maior que $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

x^k - sucessão em $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = a_i \quad (i=1, \dots, n)$$



$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k^2} \right) = (0, 1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} \right) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \right) = (0, 0)$$

ex:

$x^k = \left(\frac{1}{k}, k \right)$ Não existe $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ em $\mathbb{R}^2$ porque não existe $\lim_{k \rightarrow \infty} x_2^k = k$ em $\mathbb{R}$

Funções

$F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $D \subset \mathbb{R}^n$

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Cada $f_i(x_1, \dots, x_n)$ é uma função coordenada

$f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$

$m > 1 \rightarrow$ função vetorial $F, \vec{F}$
 $m = 1 \rightarrow$ função escalar F, φ

ex:

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n=2 \\ m=1$$

função escalar com domínio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

ex:

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \right) \quad n=2 \\ m=2$$

$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ função vetorial

funções coordenadas

$$f_1(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad f_1: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_2(x, y) = x^2 + y^2 \quad f_2: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

O gráfico de $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (com $D \subset \mathbb{R}^n$) é um conjunto

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in D \text{ e } y = F(x)\}$$

$$\mathbb{C} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+n}$$

ex:

$$f(x) = \sin x$$

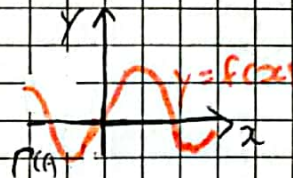
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n=1$$

$$m=1$$

$$D=\mathbb{R}$$

$$\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$$



ex:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n=2$$

$$m=1$$

$$D=\mathbb{R}^2$$

$$\Gamma(f) \in \mathbb{R}^3$$

1) Desenhemos $z = f(x,y)$

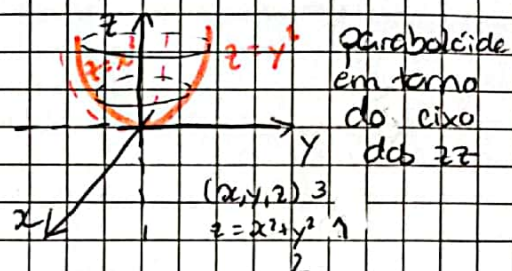
$$x=0 \rightarrow z = f(0,y) = y^2$$

$$y=0 \rightarrow z = x^2$$

$$z=0 \rightarrow x^2 + y^2 = 0$$

$z = y^2 \rightarrow z^2$ parabolóide em torno do eixo dos xx

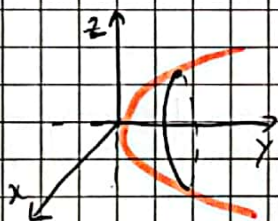
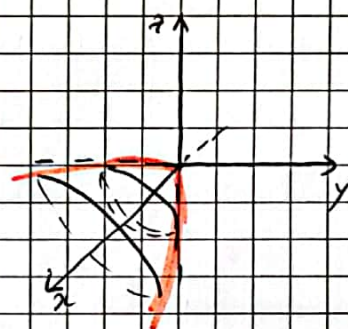
$y = x^2 \rightarrow z^2$ parabolóide em torno do eixo dos yy



parabolóide em torno do eixo dos zz

$$(x,y,z) \begin{matrix} 3 \\ z = x^2 + y^2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Para cada z constante $z \geq 0$ obtemos uma circunferência $x^2 + y^2 = z$



$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases} \begin{matrix} 3 \\ -1 \\ \text{plano } -1 \end{matrix}$$

$$\text{curva } \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2z = 2(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Se $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^n$

Para cada $c \in \mathbb{R}$ o conjunto de nível c de F é

$$F^{-1}(c) = \{x \in D : F(x) = c\}$$

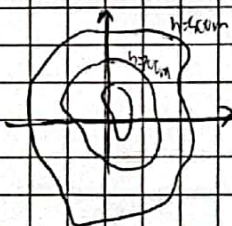
Para $f(x,y) = x^2 + y^2$ $c > 0$ $F^{-1}(c) = \{x^2 + y^2 = c\}$ circunferência de raio $\sqrt{c}$ e centro $(0,0)$

$$c = 0 \quad F^{-1}(0) = \{(0,0)\}$$

$$c < 0 \quad F^{-1}(c) = \emptyset$$



carta geotética



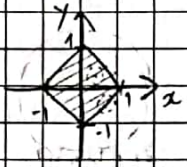
Problemas

28/02/2013

FICHA 1

- 1) Def. o interior, exterior e fronteira.
Dizer se aberto, fechado, limitado, compacto.

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$



$1^\circ Q: x+y=1$
 $2^\circ Q: x+y=-1$
 $|x|+|y|=1$

interior: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$

fronteira: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$

exterior: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| > 1\}$

aberto: $D = \text{int } D$ não aberto

fechado: $D = \bar{D}$ fechado

fecho $\bar{D} = \text{int } D \cup \text{front } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

limitado: $D \subset B$ para alguma bola aberta B

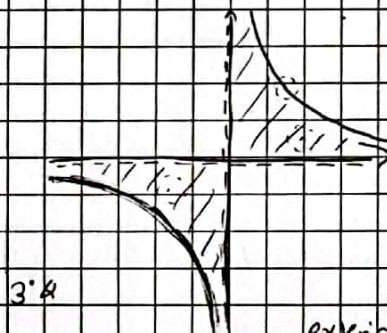
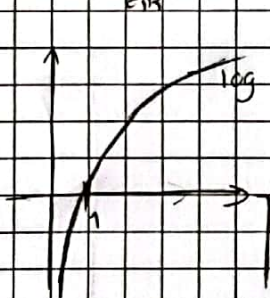
Sim, porque podemos escolher por exemplo $B = B_1(0, 0)$

compacto: limitado e fechado Sim.

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(xy) \leq 0\}$

$\log(xy) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < xy \leq 1$

$\log$ base e



$1^\circ Q$ hipérbole
 $|xy=1| \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

interior: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(xy) < 0\}$

fronteira: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(xy) = 0 \vee xy = 0\}$

exterior: $\text{ext } D = \mathbb{R}^2 \setminus (\text{int } D \cup \text{front } D)$
 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(xy) > 0\}$

fecho:

$\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(xy) \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

não aberto
 não fechado
 não limitado
 não compacto

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \wedge y = \sin(\frac{1}{x})\}$
 $x \in]0, 1] \quad \sin x \in]0, 1]$

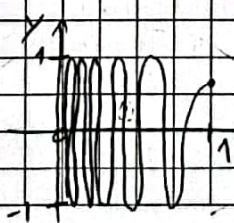


grafico de $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

$f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{int } D = \emptyset$$

$$\text{front } D = \emptyset \cup (204 \times [-1, 1])$$

$$\text{ext } D =$$

$$\bar{D} = \emptyset \cup (204 \times [-1, 1])$$

não é aberto
não é fechado
não compacto

limitado $DC B_2(0,0)$

$\emptyset \subset \text{int } D \subset D \subset \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$
= fechado
= aberto
= denso

$$h) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$$



$$\begin{aligned} \text{int } D &= \emptyset \\ \text{front } D &= \mathbb{R}^2 \\ \text{ext } D &= \emptyset \end{aligned}$$

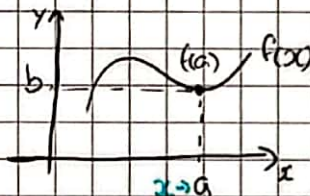
$$\begin{aligned} \bar{D} &= \mathbb{R}^2 \\ \text{não aberto} \\ \text{não fechado} \\ \text{denso} \end{aligned}$$

não limitado
não compacto

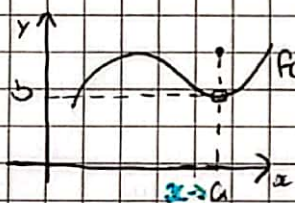
Limites de Funções

03/03/2023

Em $\mathbb{R}$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ se } x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow b$$



$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ com } D \subset \mathbb{R}^n \text{ e } a \in \bar{D}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ se para qualquer sucessão } x_k \rightarrow a \text{ temos } f(x_k) \rightarrow b$$

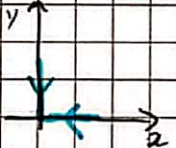
ex:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) ?$$

não existe porque



$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_k = \left(\frac{1}{k}, 0 \right) \rightarrow (0, 0)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + 0^2} = 1$$

$$x_k = \left(0, \frac{1}{k} \right) \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(0, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0^2}{0^2 + \frac{1}{k^2}} = 0$$

Como os valores são diferentes, não existe $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

ex:

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) ?$$

$$x_k = \left(\frac{1}{k}, 0\right) \rightarrow (0,0) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{k^2} + 0^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \text{ não existe em } \mathbb{R}$$

Para provar que não existe limite num ponto:

- podemos arranjar duas sucessões que convergem para a mas cujas imagens convergem para valores diferentes.
- podemos arranjar uma sucessão que converge para a mas cujas imagens não têm limite

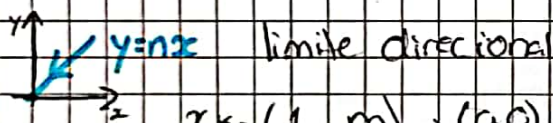
ex:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) ?$$



$$x_k = \left(\frac{1}{k}, 0\right) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^2} + 0^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

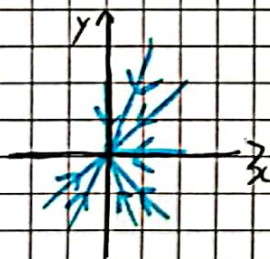
$$x_k = \left(0, \frac{1}{k}\right) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(0, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0^3}{0^2 + \frac{1}{k^2}} = 0 \quad \text{inconclusivo}$$



$$x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{m}{k}\right) \rightarrow (0,0) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{m}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^2} + \frac{m^2}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1+m^2} = 0$$

se existir limite tem de ser zero

para qualquer m



segundo uma parábola

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = \dots = 0$$

Definição equivalente

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{se } \forall \epsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-b\| < \epsilon$$

Provamos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x^3|}{x^2+y^2} = \frac{|x^3|}{\|(x,y)\|^2} = \frac{|x| \cdot |x|^2}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{|x| \cdot (x^2+y^2)}{\|(x,y)\|^2} =$$

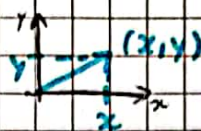
$$\frac{|f(x,y) - 0|}{\|(x,y)\|^2} = \frac{|x| \cdot \|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^2} = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$$



by Staples

$$\frac{|x| \cdot |x|^2}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{|x| \cdot |x|^2}{\|(x,y)\|^2} + \frac{|x| \cdot |y|^2}{\|(x,y)\|^2} = \frac{|x|}{\|(x,y)\|^2} (x^2 + y^2)$$

$$|x|^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$0 \leq \frac{|f(x,y) - 0|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{\|(x,y)\|}{\|(x,y)\|} \quad (*)$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta = \varepsilon$

$$\|(x,y) - (0,0)\| \leq \delta$$

$$(*) \Rightarrow 0 \leq |f(x,y) - 0| < \delta = \varepsilon$$

ex:

$$f(x,y) = \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}, 1 \right)$$

$$\text{Se existir, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 \right) = (0, 1)$$

$$0 \leq \frac{\|f(x,y) - (0,1)\|}{\|(x,y)\|} = \left\| \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}, 1 \right) - (0,1) \right\| = \sqrt{\left(\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right)^2 + (1-1)^2} = \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{\|(x,y)\|}{\|(x,y)\|} \Rightarrow \rightarrow 0$$

ex:

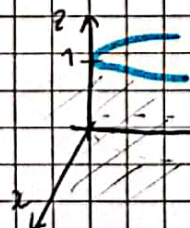
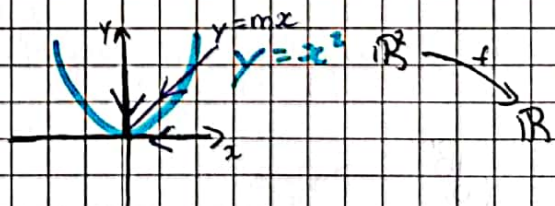
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}, \frac{x^2}{x^2+y^2} \right) \quad \text{n\~ao existe}$$

$$\text{se existir, } \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right) = (0, \text{n\~ao existe})$$

ex:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & y \neq x^2 \\ 1, & y = x^2 \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)? \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

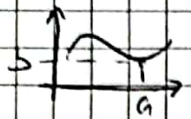
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f\left(0, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

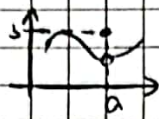
Segundo a parábola $\lim_{k \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 = 1$ Como há valores diferentes para curvas diferentes, não existe o limite.

Continuidade

Em $\mathbb{R}$, $f(x)$ é contínua em a se existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e se o limite for $f(a)$.



contínua



não
contínua

Em $\mathbb{R}^n$, f é contínua em a se existir $\lim_{x \rightarrow a} f$ e se o limite for $f(a)$.

ex:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{é contínua em } (0, 0)?$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) &= 0 \\ f(0, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} = \text{é contínua em } (0, 0)$$

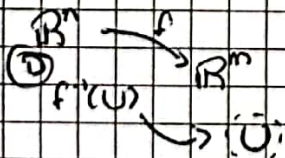
~~Funções contínuas~~

09/03/2023

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $D \subset \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in D$ se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e se o limite for $f(a)$.

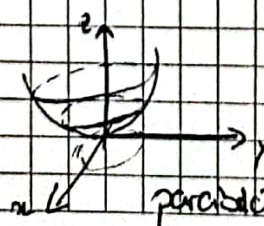
Propriedades

- Se $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in D$ então $f + g$ e αf são contínuas em $a \in D$.
- Se $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in D$ então $f \cdot g$ é contínua em $a \in D$ e f/g é contínua em $a \in D$ (se $g(a) \neq 0$).
- Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $D \subset \mathbb{R}^n$ é contínua em U e $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto então $f^{-1}(U) = \{x \in D: f(x) \in U\}$ é aberto.



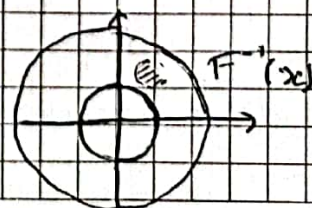
- Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}^n$ os conjuntos de nível $f^{-1}(c) = \{x \in D: f(x) = c\}$ são conjuntos fechados para cada $c \in \mathbb{R}$.

ex:



$$F(x, y) = x^2 + y^2 \\ F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F^{-1}(1) = \{x \in D: x^2 + y^2 = 1\} \\ \text{é fechado}$$



- Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $D \subset \mathbb{R}^n$ e f contínua então o gráfico de f
 $\Gamma(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in D \text{ e } y = f(x) \}$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Diferenciabilidade

Em $\mathbb{R}$:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in \mathbb{R}$

se existir

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DERIVADAS PARCIAIS

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $D \subset \mathbb{R}^n$

A derivada parcial para cada $i=1, \dots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h e_i) - f(a)}{h} \text{ onde } e_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots, 0)$$

(se o limite existir)

ex:

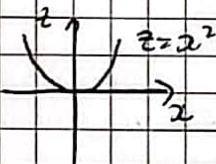
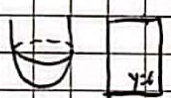
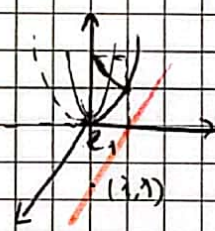
$$f(x, y) = x + y \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0) + h(1, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0) + h(0, 1) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

ex:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 0) + h(1, 0) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

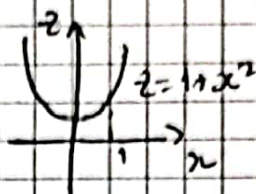
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) =$$

Consideremos $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = f(x, 0) = x^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = g'(1) = 2x|_{x=1} = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$$

$$g(x) = f(x,1) = x^2 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = g'(1) = 2x|_{x=1} = 2$$



$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) =$$

Mantemos $x=1$ fixo $g(y) = f(1,y) = 1 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = g'(1) = 2y|_{y=1} = 2$$



ex:

$$f(x,y,z) = xy + z + 1$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(1,0,0) + h(1,0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h,0,0) - f(1,0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1,h,0) - f(1,0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+1-1}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1,0,h) - f(1,0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+1-1}{h} = 1$$

$$f(x,y,z) = xy + z + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ mantemos } y \text{ e } z \text{ fixos variamos } x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ mantemos } x \text{ e } z \text{ constantes variamos } y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \text{ mantemos } x \text{ e } y \text{ constantes variamos } z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1$$

ex:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

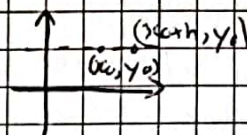
Queremos calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ em cada } (x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0 & \text{se } x_0 \in \mathbb{Q} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0 & \text{se } x_0 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) + 1}{h} & \text{não existe } x_0 \in \mathbb{Q} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - 0}{h} & x_0 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, 1) - f(a)}{h}$$



DERIVADA DIRECIONAL

Para cada vetor $v \in \mathbb{R}^n$ $f'_v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hw) - f(a)}{h}$

ex:

$$f(x, y) = x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$$

calculado através

Para $v = (1, 1)$:

$$f'_v(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0) + h(1, 1) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 0}{h} = 2$$

Para $v = (1, -1)$:

$$f'_v(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, -h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

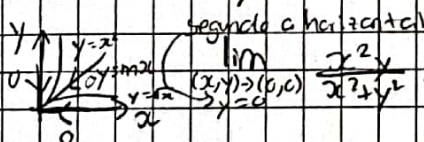
Problemas

07/03/2023

FICHA 1

2) Calcule ou mostre que não existem limites.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot 0}{x^2 + 0} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} = 0$$

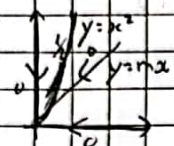
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{mx}{1+m^2} = 0 \quad \text{inconclusivo se existe limite é 0}$$

Vamos ver que o limite é zero

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2) y}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \text{ quando } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

se o ponto converge para 0 a norma também converge para 0

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} = 0$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 m x}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{m x}{x^2 + m^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Não existe o limite em $(0,0)$.

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin(x^2 + y^2) = 0$

peça a peça

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad u = x^2 + y^2 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

③ Estude a função quanto à continuidade.

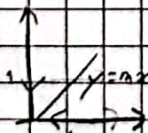
b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$ a, fcn. é contínua em (x, y) por ser composta por contínuas

$(x, y) \rightarrow x+y$ polinômio $(x, y) \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}$ raiz quadrada de polinômio

$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ quociente de polinômios

Se $(x, y) = (0, 0)$, vamos se existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ e se $f(0, 0) = 0$.



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{y^2}} = 1 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+mx}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \frac{1+m}{\sqrt{1+m^2}} \text{ depende de } m$$

$\Rightarrow$ não há limite
 $\Rightarrow$ f não é contínua em $(0, 0)$

$$d) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se $(x,y) \neq (0,0)$, f é composta de contínuas

$$\begin{aligned} (x,y) &\rightarrow x^2 \text{ contínua} \\ (x,y) &\rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \text{ contínua} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ contínua}$$

Se $(x,y) = (0,0)$, vemos se existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ e se $f'(0,0) = 0$

$$\text{Vemos que } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0 \text{ quando } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0) \Rightarrow f \text{ também é contínua em } (0,0)$$

Derivada Direcional

10/03/2023

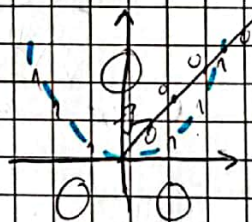
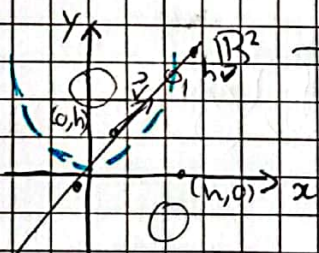
$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $D \subset \mathbb{R}^n$

Para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $a \in D$

$$f'_v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h} \quad (\text{quando o limite existe})$$

ex:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = \begin{cases} 0, & y \neq x^2 \text{ ou } (x,y) = (0,0) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

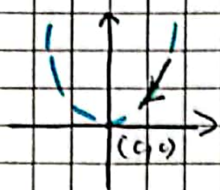


$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f'_v(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+hv) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

- f tem derivadas direcionais em $(c,0)$ para qualquer $\exists$
- f não é contínua em (c,c)



$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,0) \\ y \neq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,0) \\ y \neq 0}} 1 = 1 \neq f(c,c)$$

$\Rightarrow f$ não é contínua em $(c,0)$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

f é diferenciável em $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$

Queremos definir diferenciabilidade de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que não tenha só a ver com derivadas direcionais.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in \mathbb{R}$ se existir

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

$$f'(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto é diferenciável em $a \in D$ se existir uma função linear $Df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} = 0 \quad (Df(a) \text{ é a derivada de } f \text{ em } a)$$

ex:

$f(x,y) = x^2 + y$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $n=2, m=1$
é diferenciável em $(0,0)$

Vamos que o limite é zero se escolhermos $Df(0,0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(Df(0,0)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2$$

Temos de ver que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(c,h) - f(c,0) - Df(c,0)h\|}{\|h\|} = 0$

$$h = (h_1, h_2) \quad \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(h_1, h_2) - 0 - h_2\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h_1^2 + h_2 - h_2\|}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h_1\|^2}{\|h\|} = 0 \quad \Rightarrow f \text{ é diferenciável em } (0,0)$$

$$0 \leq \frac{\|h_1\|^2}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\|h\| = \sqrt{\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2}$$

• Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto é diferenciável em $a \in D$, então existem todas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ e existe o vetor gradiente $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ e o vetor representa a transformação linear $Df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na base canônica.

$$(\mathcal{D}f(a))(h) = \underbrace{\nabla f(a)}_{\text{produto de matrizes}} \cdot h$$

ex:

$$f(x, y) = x^{2,3}y$$

$$\text{Calculamos } \nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (2x \quad 1)_{|_{(0,0)}} = (0, 1)$$

O candidato a derivada $\mathcal{D}f(0,0)$ é $(\mathcal{D}f(0,0))(x, y) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y$
(e depois substituímos no limite)

ex:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 \text{ diferenciável em } (1, 0, 0)?$$

Se houver derivada $\mathcal{D}f(1, 0, 0)$, tem de ser representada pelo gradiente

$$\nabla f(1, 0, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0) \right) = (2x \quad 2y)_{|_{(1,0,0)}} = (2 \quad 0 \quad 0)$$

$$(\mathcal{D}f(1, 0, 0))(x, y, z) = (2 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x$$

Temos de ver se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(1, 0, 0) + h\| - \|f(1, 0, 0) - \mathcal{D}f(1, 0, 0)h\|}{\|h\|} = 0$$

$h = (h_1, h_2, h_3)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(1, h_1, h_2, h_3) - 1 - 2h_1\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h_1^2 + 2h_1 + 1 - 1 - 2h_1\|}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h_1^2 + h_2h_3\|}{\|h\|} = 0 \quad \Rightarrow f \text{ é diferenciável em } (1, 0, 0)$$

$$0 \leq \frac{\|h_1^2 + h_2h_3\|}{\|h\|} \leq \frac{\|h_1\|^2 + \|h_2h_3\|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2 + \|h\|^2}{\|h\|} = \frac{2\|h\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

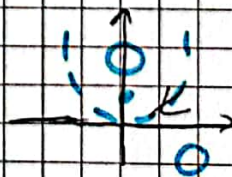
ex:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x^2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (x, y) \neq (0, 0) \text{ é diferenciável na origem?}$$

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (0 \quad 0)$$

O candidato a $\mathcal{D}f(0,0)$ é

$$(\mathcal{D}f(0,0))(x, y) = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$



Diferenciabilidade 14/03/2023

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a \in D$.

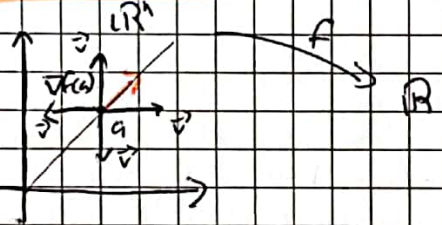
Se existir $Df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear, se $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} = 0$

Se f é diferenciável em a , existem todas as $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ e $Df(a)$ é representada pelo gradiente $Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$

$$Df(a)(h) = \nabla f(a) \cdot h$$

Se f é diferenciável em $a \in D$, existem todas as derivadas direcionais $f'_v(a)$ e $f'_v(a) = [Df(a)] \cdot v$, para qualquer direção $v \in \mathbb{R}^n$.

$$= \|Df(a)\| \|v\| \cos \theta$$



- Se $v \perp \nabla f(a)$, $f'_v(a) = 0$
- Se $v = \nabla f(a)$, $f'_v(a)$ é máximo
- Se $v = -\nabla f(a)$, $f'_v(a)$ é mínimo

f diferenciável em $a \in D \Rightarrow$ existem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

- existem $f'_v(a)$ e $f'_v(a) = \nabla f(a) \cdot v$
- f é contínua em $a \in D$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $D \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a \in D$, se existir $Df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} = 0$

$Df(a)$ é representada pela matriz jacobiana de $f = (f_1, \dots, f_m)$ em a

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

mxn

O quadrado $\nabla f(a)$ é um caso particular para $m=1$ (matriz $1 \times n$)

exemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (\sin x, y, ye^x)$$

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \nabla f_1(a) \\ \nabla f_2(a) \\ \nabla f_3(a) \end{matrix}$$

3x2

funções coordenadas

$$f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f_1(x, y) = \sin x$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f_2(x, y) = y$$

$$f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f_3(x, y) = ye^x$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & 1 \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}$$

f é diferenciável na origem?

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \frac{\|f(a_0) + h) - f(a_0) - Df(a_0)h\|}{\|h\|} = \frac{\|f(h_1, h_2) - (0,0,0) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\|}{\|h\|}$$

$$= \frac{\|(\sin h_1, h_2, h_2 e^{h_1}) - (h_1, h_2, h_2)\|}{\|h\|} = \frac{\|(\sin h_1 - h_1, 0, h_2 e^{h_1} - h_2)\|}{\|h\|}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sin h_1 - h_1)^2 + (h_2 e^{h_1} - h_2)^2}}{\|h\|} \leq \frac{\sqrt{(\sin h_1 - h_1)^2}}{\|h\|} + \frac{\sqrt{(h_2 e^{h_1} - h_2)^2}}{\|h\|} = \frac{\sqrt{(\sin h_1 - h_1)^2}}{h_1^2} + \frac{\sqrt{e^{h_1} - 1}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{(\sin h_1 - h_1)^2}}{h_1^2} + \sqrt{e^{h_1} - 1} \quad h \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\sin h_1}{h_1} \rightarrow 1$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (D \subset \mathbb{R}^n)$$

f é diferenciável em $a \in D \Rightarrow$ existem $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$

- f é contínua em a

+ derivadas parciais contínuas

Funções de classe C^1

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto}$$

f é de classe C^1 em U ($f \in C^1(U)$) se existirem e forem contínuas todas as $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ para qualquer $a \in U$



Teorema

Se $f \in C^1(U)$, então f é diferenciável em U .

ex:

$$f(x, y) = (\sin x, y, ye^x)$$

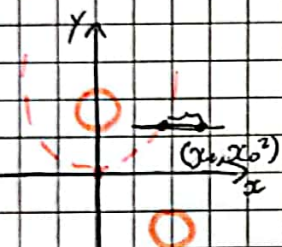
$$Df(x) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ye^x & e^x & 0 \end{pmatrix}$$

todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ são contínuas para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$

(por serem compostas por funções elementares reais, que são contínuas)
 $\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ é dif em $\mathbb{R}^2$

ex:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2 \text{ e } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

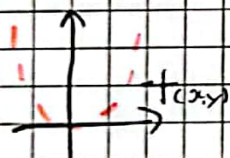


f não é contínua em $(0, 0) \Rightarrow f$ não é dif. em $(0, 0)$
 f não é de classe C^1
 (x, y) na parábola $\Rightarrow (x_0, x_0^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_0^2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-1}{h} \text{ não existe}$$

$\Rightarrow f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$

f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = x^2\}$ (aberto)



$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{y = x^2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

contínuas $\Rightarrow f \in C^1(U) \Rightarrow f$ é dif. em U

Derivadas de funções compostas

Em $\mathbb{R}$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $f(a) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \mathbb{R}$ e $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Teorema da derivada da função composta

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $D \subset \mathbb{R}^n$ diferenciável em $a \in D$

$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciável em $f(a) \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável em a e

$$D(g \circ f)(a) = [Dg](f(a)) Df(a)$$

$\mathbb{R}^{k \times m}$ $\mathbb{R}^{m \times n}$ $\mathbb{R}^{k \times n}$

ex:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = (x, xy, \sin y)$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(u, v, w) = (u+v, v-w)$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{(x,y,z)} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{(u,v,w)} \mathbb{R}^2$$

f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ porque:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & \cos y & 0 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow \nabla f_1$
 $\leftarrow \nabla f_2$
 $\leftarrow \nabla f_3$

todas contínuas $\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^3)$
 $\Rightarrow g$ é dif. em $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow g \circ f$ é dif. em qualquer $a \in \mathbb{R}^3$

e

$$D(f \circ g)(a) = Dg(f(a)) Df(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & \cos y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y & x & 0 \\ y & x-\cos y & 0 \end{pmatrix}$$

2×3 3×3 2×3

Problema

4/03/2023

Ficha 2

6) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = y \sqrt{x^2 + y^2}$ é diferenciável na origem e calcular a derivada matriz jacobiana 1×2

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\nabla f(x, y)$
gradiente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

derivadas
su parciais

$$(x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2} + y \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

exatidão

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\sqrt{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|}{h} = 0$$

exatidão

$Df(0, 0) = (0 \ 0)$ candidato a derivada

Vamos pela definição se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f((0,0)+h) - f(0,0) - Df(0,0) \cdot h\|}{\|h\|} = 0? \quad h = (h_1, h_2)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(h_1, h_2) - f(0,0) - Df(0,0) \cdot h\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h_2 \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h_2\| \|h\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|h_2\| = 0$$

$$0 \leq \|h_2\| \leq \|h\|$$

$\Rightarrow f$ é dif em $(0,0)$

por exemplo,

no ponto $(1,1)$ a fnc. é diferenciável porque $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ são contínuas.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcule as derivadas parciais em $(0,1)$

b) Calcule a derivada direcional em $(0,1)$ segundo o vetor $(2,1)$

c) Calcule a derivada direcional em $(0,0)$ segundo $(2,3)$.

resolução:

a) Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - xy^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{1-0}{1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$$

b) $f'_v(0,1)$
para $v = (2,1)$

Se f é dif. em a , $f'_v(a) = [Df(a)] \cdot v$

f é dif em $(0,1)$ porque as derivadas parciais são contínuas (em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$), e portanto também em $(0,1)$.

$$\Rightarrow f'_{(2,1)}(0,1) = [Df(0,1)](2,1) = (1,0)(2,1) = 2$$

c) $f'_v(0,0)$ Como não podemos verificar que as derivadas parciais são contínuas na origem, temos de ir pela definição.

$$f'_{(2,3)}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h(2,3)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h,3h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h \cdot 9h^2}{4h^2+9h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{18h^3}{13h^2} = 0$$

pele definição

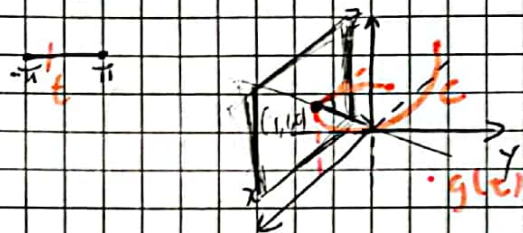
$$f'_v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

para $v=(2,1)$

Ficha 3

① Determinar a reta tangente e o plano normal no ponto $(1,1,0)$ à curva com parametrização:

$$g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por } g(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$$



Em cada ponto $g(t)$,
 $g'(t) \rightarrow$ vetor tangente à curva

$$(1,1,0) = g(0) \quad g'(t) = (e^t, -\sin t, \cos t)$$

$$g'(0) = (1,0,1) \rightarrow \text{vetor tangente à curva no ponto } (1,1,0)$$

Espaço tangente

$$T_{(1,1,0)} C = \{ \alpha(1,0,1) : \alpha \in \mathbb{R} \}$$

Reta tangente

$$(1,1,0) + T_{(1,1,0)} C = \{ (1,1,0) + \alpha(1,0,1) : \alpha \in \mathbb{R} \}$$

expressa paramétrica da reta tangente

Espaço Normal

$T_{(1,1,0)}^\perp C$ - espaço ortogonal ao espaço tangente (tem dimensão 2)

$$n \in T_{(1,1,0)}^\perp C \Leftrightarrow n \cdot (1,0,1) = 0$$

$$n = (x, y, z) = (-z, y, z)$$

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, 1) = 0$$

$$\vec{n}_1 = (-1, 0, 1) \quad \vec{n}_2 = (0, 1, 0)$$

$$x + z = 0$$

$$T_{(1,1,0)}^\perp C = \{ \alpha_1(-1,0,1) + \alpha_2(0,1,0) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$$

Plano Normal

$$(1,1,0) + T_{(1,1,0)}^\perp C = \{ (1,1,0) + \alpha_1(-1,0,1) + \alpha_2(0,1,0) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$$

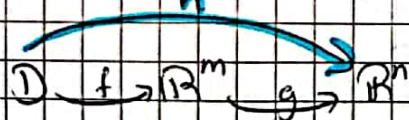
Expressa paramétrica do plano

$$\text{Expressão algébrica: } [(x, y, z) - (1, 1, 0)] \cdot (1, 0, 1) = 0$$

$$(x - 1, y - 1, z) \cdot (1, 0, 1) = 0$$

$$x - 1 + z = 0 \quad |x + z = 1| \text{ expressão algébrica do plano}$$

Teorema da derivada da função composta



Se f é diferenciável em $a \in D$ e g é diferenciável em $f(a) \in \mathbb{R}^m$ então $h = f \circ g$ é diferenciável em $a \in D$ e

$$D_h f(a) = [D_g]_{f(a)} (Df(a))$$

$\begin{matrix} K \times n & n \times m & m \times n \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(f(a)) \end{pmatrix}$$

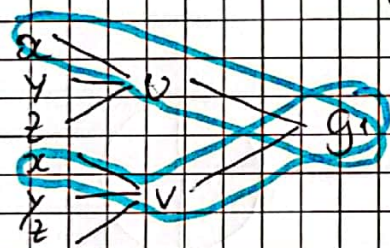
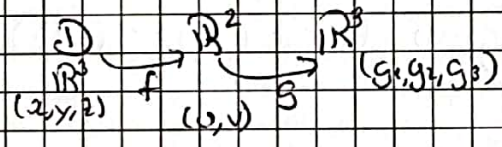
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(f(a)) \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)$$

Regra da Cadeia

ex:

$n=3 \quad m=2 \quad k=3$

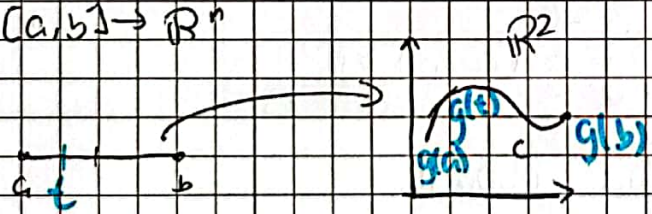


$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Regra da Cadeia

Curvas e Superfícies

Uma parametrização para uma curva c em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$



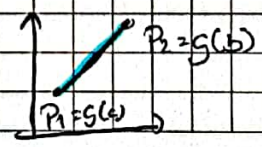
$g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ também se chama caminho.

A curva c é $g([a,b])$

Uma curva c tem sempre mais do que uma parametrização possível.

ex:

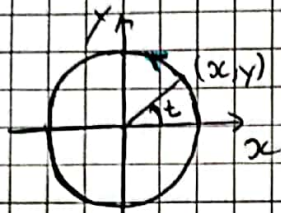
segmento de reta em $\mathbb{R}^n$ de P_1 até P_2



$$g(t) = P_1 + t(P_2 - P_1)$$

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

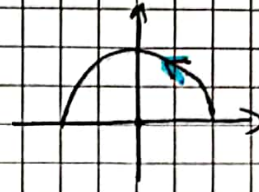
→ Circunferência de raio 1 e centro na origem em $\mathbb{R}^2$



$$g(t) = (\cos t, \sin t)$$

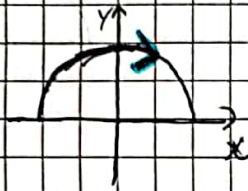
$$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(t) = (\cos t, \sin t)$$



meia circunf

$$g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$



$$g(t) = (-\cos t, \sin t)$$

$$g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \pi - t$$

outra parametrização possível:

$$g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

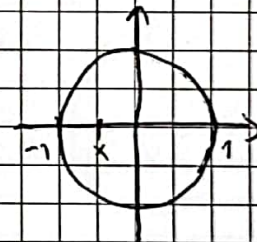
$$g(t) = (1 - \cos(\frac{t}{2}), \sin(\frac{t}{2}))$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

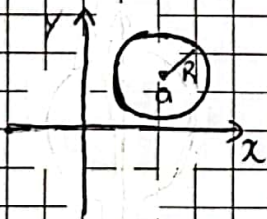
$$g(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$$

$$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

no sentido contrário: ~~$g: [1, -1] \rightarrow \mathbb{R}^2$~~



→ Circunferência de raio R e centro em a

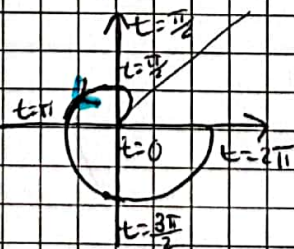


$$g(t) = a + (R \cos t, R \sin t) = (a_1 + R \cos t, a_2 + R \sin t)$$

$$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

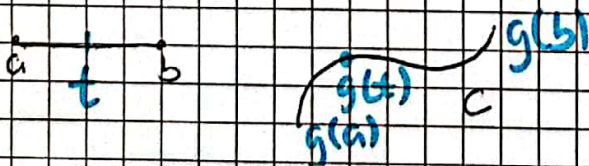
$$g(t) = (t \cos t, t \sin t)$$

$$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$



espiral

Dada uma curva c com parametrização $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

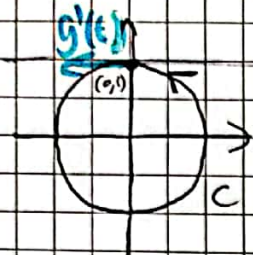


• Se $g \in C([a, b])$ (ou seja, $g'(t)$ existe e é contínua para $t \in [a, b]$) e $g'(t) \neq 0$ para qualquer $t \in [a, b]$, a curva é **regular** e em cada ponto, $g'(t)$ define um vetor tangente à curva em $g(t)$.

O **espaço tangente** a C em $a = g(t_0)$ é o espaço vetorial gerado por $g'(t_0)$. $TaC = \{ \alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha = \lambda g'(t_0) \text{ para } \lambda \in \mathbb{R} \}$.

A **reta tangente** a C em $a = g(t_0)$ é $a + TaC = \{ a + \alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha = \lambda g'(t_0) \text{ para } \lambda \in \mathbb{R} \}$.

ex:



$$g(t) = (\cos t, \sin t) \quad g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

para $t \in [0, 2\pi]$, $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$ é contínua por ser constituída por funções trigonométricas elementares e $g'(t) \neq (0, 0)$.

$\Rightarrow C$ é regular

no ponto $(0, 1)$

$$(0, 1) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-\sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}) = (-1, 0) \text{ (no sentido de } t \text{ crescente)}$$

$$T_{(0,1)}C = \{ \alpha(-1, 0), \alpha \in \mathbb{R} \} \quad (\text{eixo dos } x)$$

$\Rightarrow$ Reta tangente a C no ponto $(0, 1)$

$$(0, 1) + T_{(0,1)}C = \{ (0, 1) + \alpha(-1, 0), \alpha \in \mathbb{R} \} = \{ (\alpha, 1) : \alpha \in \mathbb{R} \}$$

reta $y=1$

O **espaço normal** a C em $a = g(t_0)$ é o espaço ortogonal a TaC .

$$TaC^\perp = \{ \alpha \in \mathbb{R}^n : \alpha \cdot g'(t_0) = 0 \} \quad (\text{tem dimensão } n-1)$$

Em $\mathbb{R}^2$: a **reta normal** a C em $a = g(t_0)$ é

$$a + TaC^\perp = \{ \alpha \in \mathbb{R}^2 : (\alpha - a) \cdot g'(t_0) = 0 \}$$

Em $\mathbb{R}^3$: o **plano normal** a C em $a = g(t_0)$ é $a + TaC^\perp = \{ \alpha \in \mathbb{R}^3 : (\alpha - a) \cdot g'(t_0) = 0 \}$.

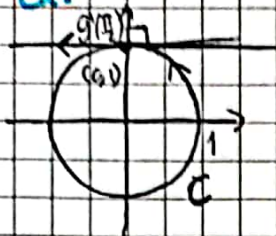
Para a Circunferência:

$$\text{Em } (0, 1) \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0)$$

Os vetores normais satisfazem $n \cdot (-1, 0) = 0$

$\Rightarrow n = (0, 1)$ por exemplo

ex:



$$g(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T_{(0,1)} C = \{ \alpha(0,1) : \alpha \in \mathbb{R} \} \text{ eixo das } y$$

A reta normal a C em (0,1) é:

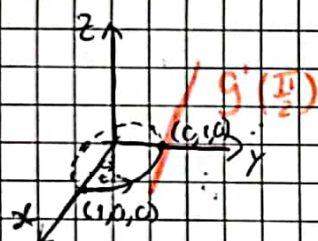
$$(0,1) + T_{(0,1)} C = \{ (0,1) + \alpha(0,1) : \alpha \in \mathbb{R} \} = \{ \alpha(0,1) : \alpha \in \mathbb{R} \} \text{ eixo das } y$$



CURVAS

21/03/2023

ex:



parametrização:

$$g(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Um vetor tangente em cada ponto é

$$g'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \quad t \in]0, 2\pi[$$

$$(0,1,0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0)$$

Espaço tangente em (0,1,0)

$$T_{(0,1,0)} C = \{ \alpha(-1, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R} \} \text{ eixo das } x$$

Reta tangente em (0,1,0)

$$(0,1,0) + T_{(0,1,0)} C = \{ (-\alpha, 1, 0) : \alpha \in \mathbb{R} \} \quad y=1 \quad z=0$$

○ espaço normal à curva em $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 2.

Os vetores normais satisfazem

$$(x, y, z) \cdot \underbrace{(-1, 0, 0)}_{\text{vetor tangente}} = 0$$

$$-x = 0 \quad (x, y, z) = (0, y, z)$$

Espaço normal em (0,1,0)

$$T_{(0,1,0)} C = \{ (0, y, z) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{base: } \begin{pmatrix} 0, 1, 0 \end{pmatrix} \quad x=0 \quad z=0$$

$$(0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

Plano normal em $(a, 1, c)$

$$(a, 1, c) + \frac{1}{\sqrt{a^2+1+c^2}} \cdot \{ (a, 1+y, z) : y, z \in \mathbb{R} \}$$

$$(x, y, z) = (a, 1, c) + \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$(x, y, z) - (a, 1, c) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

superfícies

Definimos como conjunto de nível.

ex:

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

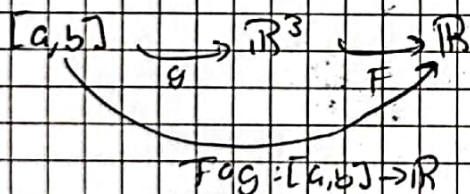
Conjunto de nível

$$F(x, y, z) = c \quad c \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 + z^2 = c$$

$c > 0 \rightarrow$ sup. esférica raio $\sqrt{c}$

$c = 0 \rightarrow$ ponto $(0, 0, 0)$

$c < 0 \rightarrow \emptyset$



Se F e g são diferenciáveis, pelo T. função composta

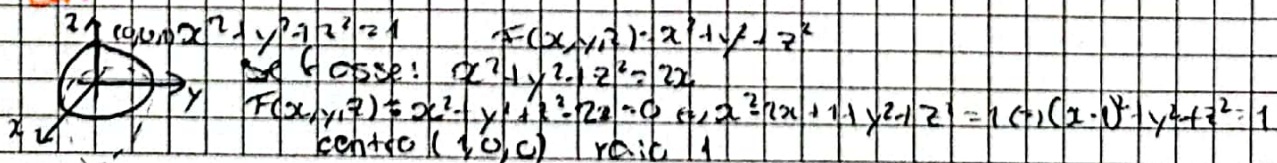
$$D(F \circ g)(t_0) = D F(g(t_0)) \cdot D g(t_0)$$

$$(F \circ g)'(t_0) = D F(p) \cdot g'(t_0) \quad \text{vetor tangente à curva}$$

$$(F \circ g)'(t) = c$$

∇F é normal à superfície em cada ponto

ex:



$$\nabla F = (2x, 2y, 2z)$$

S é regular se F é de classe C^1 e $\nabla F \neq (0,0,0)$ em todas as pontos de S .

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Este S é regular.

Por exemplo, no ponto $(0,0,1)$

Espaço normal a S no ponto $(0,0,1)$

$$T_{(0,0,1)}^\perp S = \{ \alpha (0,0,2) : \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$\nabla F(0,0,1) = (0,0,2) \text{ vetor normal}$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla F(0,0,1)}{\|\nabla F(0,0,1)\|} = (0,0,1) \text{ vetor normal unitário}$$

Reta normal a S em $(0,0,1)$

$$(0,0,1) + T_{(0,0,1)}^\perp S = \{ (0,0,z) : z \in \mathbb{R} \} \quad (\text{eixo das } z)$$

Vetores tangentes

$$(x,y,z) \cdot (0,0,2) = 0 \Leftrightarrow 2z = 0$$

vetor normal

Espaço tangente a S em $(0,0,1)$

$$T_{(0,0,1)} S = \{ (x,y,0) : x,y \in \mathbb{R} \} \quad (\text{dimensão } 2)$$

Plano tangente a S em $(0,0,1)$

$$(0,0,1) + T_{(0,0,1)} S = \{ (x,y,1) : x,y \in \mathbb{R} \} \quad z=1$$

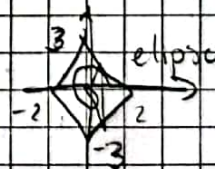
Problemas

21/03/2023

6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$ no ponto $(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{parametrização: } g(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$$

$$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$



$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \text{vetores-tangentes: } g'(t) = (-2 \sin t, 3 \cos t)$$

$$\text{para } (1, \frac{3\sqrt{3}}{2}), t = ? \quad \begin{cases} 2 \cos t = 1 \\ 3 \sin t = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{1}{2} \\ \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{no ponto } g'(\frac{\pi}{3}) = (-2 \sin \frac{\pi}{3}, 3 \cos \frac{\pi}{3}) = (-2 \frac{\sqrt{3}}{2}, 3 \frac{1}{2}) = (-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$$

espaço tangente $T_{(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})} C = \left\{ \alpha \left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2} \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

reta tangente $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) + T_{(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})} C = \left\{ \left(1 - \sqrt{3}\alpha, \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\alpha}{2} \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

vetores normais $(x, y) \cdot \underbrace{\left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2} \right)}_{\text{vetor tangente}} = 0$ por exemplo $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \sqrt{3} \right)$

espaço normal: $T_{(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})}^\perp C = \left\{ \alpha \left(\frac{3}{2}, \sqrt{3} \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

reta normal: $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) + T_{(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})}^\perp C = \left\{ \left(1 + \frac{3\alpha}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\alpha \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

curva em $\mathbb{R}^2$

espaço tangente - dim. 1

espaço normal - dim 1

curva em $\mathbb{R}^3$

espaço tangente - dim 1

espaço normal - dim 2

superfície em $\mathbb{R}^3$

espaço tangente - dim 2

espaço normal - dim 1

8) $P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2 \}$ no ponto $(0, 1, 0)$

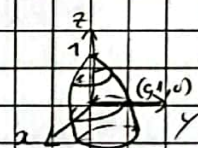
parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$

$z = 0 \rightarrow 1 - x^2 - y^2$ circunf.

$x = 0 \rightarrow z = 1 - y^2$ parábola

$y = 0 \rightarrow z = 1 - x^2$ parábola

$F(x, y, z) = z + x^2 + y^2 = 1$



O parabolóide é o conjunto de nível $F = 1$

$\nabla F = (2x, 2y, 1)$

$\nabla F(0, 1, 0) = (0, 2, 1)$

Espaço normal em $(0, 1, 0)$:

Reta normal em $(0, 1, 0)$

$T_{(0, 1, 0)}^\perp S = \{ \alpha (0, 2, 1) : \alpha \in \mathbb{R} \}$

$(0, 1, 0) + T_{(0, 1, 0)}^\perp S = \{ (0, 1 + 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \}$

vetor tangente

$(x, y, z) \cdot \underbrace{(0, 2, 1)}_{\text{vetor normal}} = 0$

$2y + z = 0 \Leftrightarrow 2y = -z$

por ex. $(x, y, z) = (x, y, -2y)$

Espaço tangente em $(0, 1, 0)$

$T_{(0, 1, 0)} S = \{ (x, y, -2y) : x, y \in \mathbb{R} \}$

base do espaço

$x = 1 \rightarrow (1, 0, 0)$

$y = 0 \rightarrow (0, 1, -2)$

$x = 0 \rightarrow (0, 1, -2)$

$y = 1 \rightarrow (0, 1, -2)$

dim 2

Plano tangente:

$(a, b, c) + T_{(0, 1, 0)} S = \{ (a, 1 + y, -2y) : x, y \in \mathbb{R} \}$

$= (a, b, c)$

expressão paramétrica para o plano

$(x, y, -2y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -2)$

$(a, b, c) \in$ plano tangente

$(a, b, c) - (0, 1, 0) \in T_{(0, 1, 0)} S$

$[(a, b, c) - (0, 1, 0)] \cdot \nabla F(0, 1, 0) = 0 \Leftrightarrow (a, b - 1, c) \cdot (0, 2, 1) = 0 \Leftrightarrow 2(b - 1) + c = 0 \rightarrow$ eq. algébrica do plano

$2(b - 1) + c = 0$

arc

Derivadas de ordem superior

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ aberto)

Se existirem termos $\frac{\partial f}{\partial x_1}: D \rightarrow \mathbb{R} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}: D \rightarrow \mathbb{R}$

As primeiras derivadas podem ter também derivadas.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

...

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \quad (\text{e o mesmo para } \frac{\partial f}{\partial x_2}, \text{ etc})$$

Pode haver derivadas de ordem ainda superior.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial f}{\partial x_3} \right] \right] \right]$$

ex:

$$f(x, y, z) = xy^2 + 3zx^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 9zx^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} [y^2 + 9zx^2] = 18zx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial y} [y^2 + 9zx^2] = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = 9x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 9x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right] \right] \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} [3x^3] \right] \right] = 0$$

Para este polinômio qualquer derivada de ordem ≥ 5 vai ser nula.

Neste caso, por exemplo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (derivadas cruzadas)

Nem sempre as derivadas cruzadas são iguais.

Se existem as derivadas de 2ª ordem, podemos construir a matriz.

$$[f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad (D \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto})]$$

$$H(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(c) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(c) \end{bmatrix}$$

Matriz Hessiana

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x)$$

para as extremos:

$$f'(x) = 0$$

$$\nabla f(x) = 0$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{máximo}$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{mínimo}$$

$$H(f(x))$$

$H(c)$ é uma matriz $n \times n$ porque há n^2 derivadas de 2ª ordem.

há n^3 derivadas de 3ª ordem

há n^k derivadas de ordem k .

ex:

$$f(x, y) = x \cos y + y \sin x + y^2 \quad \text{no ponto } (0, \pi)$$

$$\nabla f(0, \pi) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right] (0, \pi) = [\cos y + y \cos x \quad -x \sin y + \sin x + 2y]_{(0, \pi)} =$$

$$[-1 + \pi \quad 2\pi]$$

$$J(f(\pi)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} (\pi) = \begin{bmatrix} -\sin \pi & -\sin \pi + \cos \pi \\ -\sin \pi + \cos \pi & -2 \cos \pi + 2 \end{bmatrix} (\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matriz simétrica

ex:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{Para } (x, y) \neq (0, 0), \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{(x^2 - y^2) \cdot 2x - y^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y \frac{(x^2 - y^2) \cdot 2y - x^2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] (0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$J(f(0, 0)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{não simétrica}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^5}{h^2} - 0}{h} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^5}{h^2} - 0}{h} = -1$$

Funções de classe $C^k(U)$

($k \geq 1$) (U - aberto de $\mathbb{R}^n$)

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe $C^k(U)$ se existirem e forem contínuas todas as derivadas parciais até ordem k .

$C^0(U)$ - funções contínuas em U

$C^\infty(U)$ - funções para as quais existem e são contínuas as derivadas parciais de todas as ordens em todos os pontos de U .

ex: $f(x,y) = \sin x + \cos y \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

ex: $f(x,y,z) = x^2y + 2z + y^2z \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ como qualquer polinômio

$$C^0(U) \subsetneq C^1(U) \subsetneq C^2(U) \subsetneq \dots \subsetneq C^k(U) \subsetneq C^{k+1}(U) \subsetneq \dots \subsetneq C^\infty(U)$$

$$\boxed{A \subsetneq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ A \neq B \end{cases}}$$

ex: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^{2+\frac{1}{3}} = x^{7/3} \quad f \in C^1(\mathbb{R})$

$$f'(x) = \frac{7}{3} x^{4/3} \quad f \in C^1(\mathbb{R})$$

$$f''(x) = \frac{28}{9} x^{1/3} \quad f \in C^2(\mathbb{R})$$

$$f'''(x) = \frac{28}{27} x^{-2/3} = \frac{28}{27} \frac{1}{x^{2/3}} \quad \text{continua em } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f \notin C^3(\mathbb{R})$$

ex: $f \in C^k(\mathbb{R}) \quad f \notin C^{k+1}(\mathbb{R}) \quad f(x) = x^{k+\frac{1}{3}}$

~~Teorema de Schwarz~~

$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \quad (U \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto})$$

$$\text{Se } f \in C^2(U)$$

Então $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ para qualquer $i, j = 1, \dots, n$ e qualquer $a \in U$.

ex: $f(x,y) = \sin x + \cos y \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad 0=0$$

ex:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Veremos:

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$(a,y) \neq (y,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \frac{-y^6 + 8y^4x^2 + 9y^2x^4 + x^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0,0) = -1$$

Veremos que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ não é contínua em $(0,0)$



Segundo o eixo dos x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6} = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ não é contínua em $(0,0)$ e portanto não podemos aplicar o teorema.

$$f \in C^2(U) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Derivadas de segunda ordem

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ aberto)
 $a_1, \dots, a_n \in D$

Se as derivadas existem

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}$$

- $Hf(a)$ pode ou não ser simétrica.
Componente ij $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

A matriz é simétrica se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \forall i, j$$

derivadas cruzadas

~~Teorema de Schwarz~~

Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D aberto de $\mathbb{R}^n$) é de classe C^2

$$\text{então } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \forall i, j \quad \forall a \in D$$

(a, y)

- $\rightarrow f$ é de classe C^2 em $U \subset \mathbb{R}^n$ se existirem e forem contínuas as 1ª e 2ª derivadas em todas as pontos de U .
- $\rightarrow f$ é de classe C^k em $U \subset \mathbb{R}^n$ se existirem e forem contínuas todas as derivadas parciais até ordem k em todas as pontos de U .

~~Teorema de Schwarz (geral)~~

Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D aberto de $\mathbb{R}^n$) é de classe C^k

então as derivadas parciais de ordem k em ordem as mesmas variáveis vão ser iguais (seja qual for a ordem par que se deriva)

ex:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

(x, y, z)

Se f é de classe C^4 .
por exemplo

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z^2}(a) = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial z^2 \partial x}(a) = \frac{\partial^4 f}{\partial z^2 \partial x^2 \partial y}(a)$$

Se f é de classe C^5 .
por exemplo

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2 \partial x}(a) = \frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial x^2 \partial y^2}(a) = \dots$$

~~Fórmula de Taylor~~ ~~de 1ª ordem~~

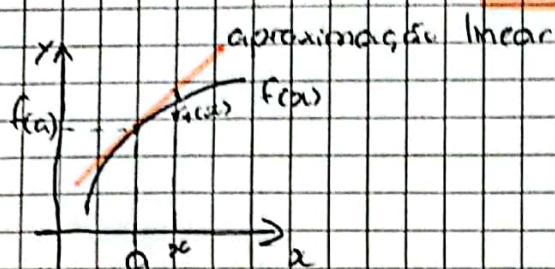
com
1 variável

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

Se $f'(a)$ existe $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r_1(x)$

$r_1(x)$ - resto de ordem 1

O resto é tal que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_1(x)}{x-a} = 0$ ($\Leftrightarrow r_1(x)$ é o $(\|x-a\|)$)



com
n variáveis

Formula de Taylor de 1ª ordem

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ aberto)

produto interno

Se f é de classe C^1 , $f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a) + r_1(x)$

vetor dim. n vetor dim. n

(com $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|r_1(x)\|}{\|x-a\|} = 0$)

ex:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x,y)$

$a = (a_1, a_2)$

$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$

$f(x,y) = f(a_1, a_2) + \nabla f(a_1, a_2) \cdot (x-a_1, y-a_2) + r_1(x,y)$

$= f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y-a_2) + r_1(x,y)$

ex:

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = 1 + 2x + y^2 + z^2x$ (é de classe $C^1 \Rightarrow$ tem f. Taylor)

$a = (0,0,0)$

$f(0,0,0) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + z^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zx$ $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0$

$f(x,y,z) = f(0,0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)(y-0) + \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)(z-0) + r_1(x,y,z)$

$+ r_1(x,y,z) = 1 + 2x + r_1(x,y,z)$

Podemos verificar que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\|r_1(x,y,z)\|}{\|(x,y,z)\|} = 0$ $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{y^2 + z^2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$

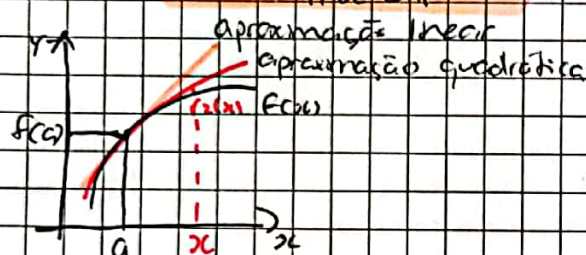
Fórmula de Taylor de 1ª ordem

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$

Se as derivadas existirem, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + r_2(x)$

r_2 - erro de 2ª ordem

verifica: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_2(x)}{\|x-a\|^2} = 0 \quad (r_2 \in o(\|x-a\|^2))$



Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Fórmula de Taylor de 2ª ordem

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ aberto) $a \in D$
Se f é de classe C^2 ,

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a)(x-a) + \frac{1}{2} \underbrace{(x-a)^T}_{n \times 1} \underbrace{Hf(a)}_{n \times n} \underbrace{(x-a)}_{1 \times n} + r_2(x)$$

com $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|r_2(x)\|}{\|x-a\|^2} = 0$

Se $n=2$: $\bar{x}(x,y) \quad a=(a_1, a_2)$

$$\frac{1}{2} (\bar{x}-a)^T Hf(a) (\bar{x}-a) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x-a_1 & y-a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left((x-a_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + (y-a_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) + (x-a_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + (y-a_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left((x-a_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + (y-a_2)(x-a_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) + (x-a_1)(y-a_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + (y-a_2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[(x-a_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) (x-a_1)(y-a_2) + (y-a_2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right]$$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(c)(x-c)^2 + r_2(x)$$

ex:

$$f(x, y, z) = 1 + 2z + y^2 + z^2 x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zx$$

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2z \\ 0 & 2 & 0 \\ 2x & 0 & 2x \end{bmatrix}$$

$$\text{Em } a = (0, 0, 0)$$

$$Hf(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x, y, z) = 1 + 2z + \frac{1}{2} (2(y-0)^2) + r_2(x, y, z) = 1 + 2z + y^2 + r_2(x, y, z)$$

$$\frac{1}{2} (x-0)(y-0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (0, 0, 0) + \dots$$

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{\|r_2(x, y, z)\|}{\|(x, y, z)\|^2} = \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{\|z^2 x\|}{\|(x, y, z)\|^2} = \dots = 0$$

No ponto $(0, 1, 1)$:

$$f(0, 1, 1) = 2$$

$$\nabla f(0, 1, 1) = (2 + z^2 \quad 2y \quad 2zx)_{(0, 1, 1)} = (3 \quad 2 \quad 0)$$

$$Hf(0, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f(x, y, z) = 2 + 3(x-0) + 2(y-1) + \frac{1}{2} [2(2-0)(z-1) + 2(2-1)(x-0) + 2(y-1)^2] +$$

$$+ r_2(x, y, z) = 2 + 3x + 2(y-1) + 2x(2-1) + (y-1)^2 + r_2(x, y, z)$$

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 1, 1)} \frac{\|r_2(x, y, z)\|}{\|(x, y, z) - (0, 1, 1)\|} = \dots = 0$$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ aberto)

$$\frac{1}{2} (x-a)^T Hf(a) (x-a) = g(x)$$

$g(x)$ - forma quadrática

• A n x n $g(x) = (x-a)^T A (x-a)$ forma quadrática:

- definida positiva se $g(x) > 0 \forall x$.
- definida negativa se $g(x) < 0 \forall x$.
- indefinida se houver x tal que $g(x) > 0$ e y tal que $g(y) < 0$.

Se A é simétrica, A é diagonalizável e tem n valores próprios (que podem ser repetidos)

- definida positiva se todos os valores próprios são positivos.
- definida negativa se todos são negativos.
- indefinida se houver pelo menos um valor próprio positivo e um valor próprio negativo.

Problemas

28/03/2023

FICHA 4

① Calcule o gradiente e a matriz Hessiana de

a) $f(x,y) = x \arctan y$

b) $g(x,y,z) = \log(xy) + e^z$

a) $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\arctan y \quad \frac{x}{1+y^2} \right)$

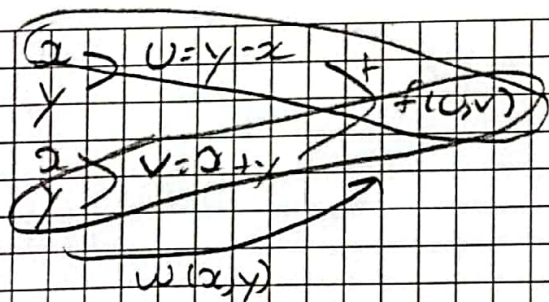
$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+y^2} \\ \frac{1}{1+y^2} & \frac{-2xy}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

b) $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial g}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{xy} \quad \frac{1}{y} \quad e^z \right) = \left(\frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad e^z \right)$

$$H_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^z \end{pmatrix}$$

② $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 $w(x,y) = (y-x, x+y)$

Mostre que: $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ onde $u = y-x$
 $v = x+y$



Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right] = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \quad \text{porque } f \text{ é de classe } C^2 \\ &\quad \text{e } \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

4) Determine os pontos de estacionaridade.

a) $a(x, y) = x^2 - y^2 + xy$

Pontos estacionaridade: $\nabla a(0, 0)$

$$\nabla a = \left(\frac{\partial a}{\partial x} \quad \frac{\partial a}{\partial y} \right) = (2x + y \quad -2y + x)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -2y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -2y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

pto estacionaridade: $(0, 0)$ $H_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

valores próprios: $|H_a - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 1 = -4 + 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 5$

$\lambda = \pm \sqrt{5}$

se todos os $\lambda > 0 \rightarrow$ matriz def. positiva $\rightarrow$ pto de mínimo

se todos os $\lambda < 0 \rightarrow$ matriz def. negativa $\rightarrow$ pto de máximo

se houver $\lambda > 0$ e $\lambda < 0 \rightarrow$ matriz indefinida

$\rightarrow$ ponto de sela (não é pto de extremo)

nesta exercício: $(0, 0)$ é ponto de sela

b) $b(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{x^3}{3}$

ptos estacionarios de:

$\nabla b = (2x - x^2, 2y) = (0, 0)$

$\begin{cases} 2x - x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0), (2, 0)$

$H_b = \begin{pmatrix} 2-2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $H_b(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ valores próprios $\lambda = 2$ (duplo)

$|H_b(0,0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$ todos positivos $\Rightarrow (0,0)$ é ponto de mínimo

$H_b(2,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 2 \Rightarrow (2,0)$ é ponto de sela

c) $d(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial x} = x - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial d}{\partial y} = y - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 1 \\ y^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 1$

$H_d(1,1) = \begin{pmatrix} 1+2x^{-3} & 0 \\ 0 & 1+2y^{-3} \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

valores próprios: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 > 0$

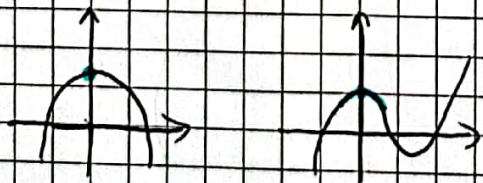
$\Rightarrow (1,1)$ é ponto de mínimo

Extremos

31/03/2023

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ aberto)

- $a \in D$ é um ponto máximo global (ou absoluto) se $f(a) \geq f(x)$ para qualquer $x \in D$.
- $a \in D$ é um ponto de máximo local (ou relativo) se $f(a) \geq f(x)$ $\forall x \in B_r(a)$ para qualquer r .



- $a \in D$ é um **ponto de mínimo global** (ou absoluto) se $f(a) \leq f(x)$ para qualquer $x \in D$.
- $a \in D$ é um **ponto de mínimo local** (ou relativo) se $f(a) \leq f(x)$, $x \in B_r(a)$ para qualquer r .

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

Se a fosse um ponto de extremo $f'(a) = 0$ (ponto de estacionariedade)

Para classificar:

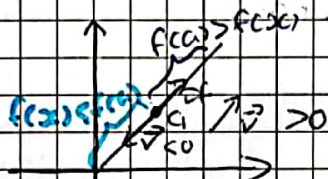
Se $f''(a) > 0$, a é ponto de mínimo

Se $f''(a) < 0$, a é ponto de máximo

Para $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ aberto) diferenciável um ponto de estacionariedade é tal que $\nabla f(a) = 0$

Se a é ponto de máximo ou mínimo, $\nabla f(a) = 0$.

porque se $\nabla f(a) \neq 0$.



$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v$$

$\Rightarrow f(a)$ não pode ser extremo

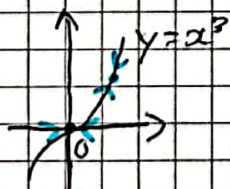
Para descobrir os extremos, primeiro vemos os pontos de estacionariedade (se o domínio D de f for aberto)

Classificação de pontos de estacionariedade

Se $Df(a) = 0$, a pode ser

- ponto de máximo
- ponto de mínimo
- ponto de sela

a é **ponto de sela** de f se para qualquer $B_r(a)$ houver pontos x e y com $f(x) < f(a)$ e $f(y) > f(a)$



Fórmula de Taylor de 2ª ordem

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ aberto) C^2

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} (x-a)^T Hf(a) (x-a) + r_2(x)$$

Num ponto de estacionaridade:

$$\frac{1}{2} f''(a)(x-a)$$

quando é só uma variável

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} (x-a)^T Hf(a) (x-a) + r_2(x)$$

analisar o sinal

Se estivermos suficientemente perto de a , o sinal de $f(x) - f(a)$ depende só do termo quadrático

- Para A $n \times n$ ($x \in \mathbb{R}^n$) a forma quadrática $q(x) = x^T A x$ é:

- positiva definida se $q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- negativa definida se $q(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- indefinida se houver x e $y \in \mathbb{R}^n$ tais que $q(x) > 0$ e $q(y) < 0$

- Se A é simétrica, é diagonalizável e a forma quadrática $q(x) = x^T A x$ é:

- positiva definida se todos os valores próprios forem positivos
- negativa definida se todos os valores próprios forem negativos
- indefinida se houver pelo menos um valor próprio positivo e um negativo

$$\text{diag} \Rightarrow q(x) = x^T S^{-1} \underset{\text{diagonal}}{\Lambda} S x = x_1^2 \lambda_1 + \dots + x_n^2 \lambda_n$$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ aberto) C^2

Se a for um ponto de estacionaridade

- Se $q(x) = (x-a)^T Hf(a) (x-a)$ for positiva definida, a é um ponto máximo local de f
- Se $q(x) = (x-a)^T Hf(a) (x-a)$ é negativa definida, a é um ponto de mínimo local de f
- Se $q(x)$ é indefinida, a é um ponto de sela de f

ex:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = x^2 + y^2 \quad C^2$ por ser polinômio
as funções têm de ser de classe C^2 para se poder calcular a matriz e ela ser simétrica (teorema de Schwarz para provar simetria)

$\nabla f = 0$ pontos de estacionaridade

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \quad (x,y) = (0,0)$$

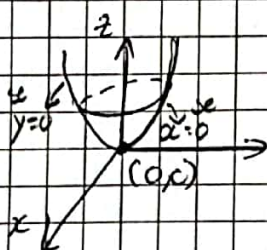
Para classificar:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

para classificar $q(x)$:

valores próprios: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$

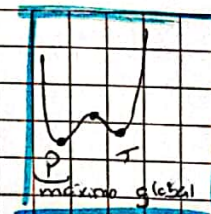
$\Rightarrow q(x)$ é positiva definida e ponto máximo local



$$z = f(x, y) \quad f(c, d) = 0 \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{ou: } x^2 + y^2 \geq 0 = f(c, d)$$

(c, d) é ponto de mínimo global



ex:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = x^2 - y^2 \quad C^2 \text{ (polinômico)}$$

pontos de estacionaridade $\nabla f = 0$

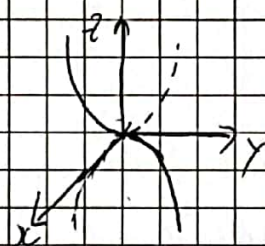
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \end{cases}$$

$$(x, y) = (0, 0)$$

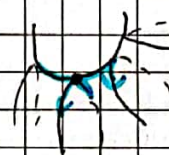
$$Hf(c, d) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(c, d)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2$$

$\Rightarrow q(x)$ é indefinida e (c, d) é ponto de sela (não é ponto de extremo)



$$z = x^2 - y^2$$



Ponto de sela
 $(1, 0)$
 $(0, 1)$

ex:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = x^2 y + z^2 - y \quad C^2$$

pontos de estacionaridade: $\nabla f = 0$

pontos de estacionaridade:
 $(1, 0, 0)$ ou $(-1, 0, 0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy = 0 \rightarrow x=0 \text{ ou } y=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z = 0 \rightarrow z=0 \end{cases}$$

Hessiana:

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

polinômio característico: $|Hf(1, 0, 0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4) =$

$$= -(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -2$$

$q(x)$ é indefinida $(1, 0, 0)$ é ponto de sela

$$Hf(-1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|Hf(-1,0,0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 4)(2 - \lambda)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -2 \quad (-1, 0, 0) \text{ é ponto de sela}$$

ex:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 + 2xy - z^2$$

os valores próprios não podem ser zero para analisar desta maneira

pontos de estacionaridade:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2y = 0 \rightarrow y = x \rightarrow y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 2x = 0 \rightarrow -4x + 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2z = 0 \rightarrow z = 0$$

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|Hf(0,0,0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)((-2-\lambda)(-4-\lambda) - 4) = \dots$$

Critério de Sylvester

A n x n Simétrica

- Se os menores de ordem i forem todos positivos, $q(x)$ é definida positiva

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

menor de ordem i: H_i - det considerando só as primeiras i linhas e i colunas

$$H_1 = |a_{11}|$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Se o menor de ordem i tiver sinal $(-1)^i$, $q(x)$ é definida negativa
- Caso contrário (e se não houver valores próprios nulos), a forma é indefinida

Na exemplo, $H_1 = |-2| = -2 < 0$ $H_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 > 0$ $H_3 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$

$\Rightarrow (0,0,0)$ é ponto de máximo

Extremos

11/04/2023

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ aberto) de classe C^2

1º $\nabla f = 0$

2º Hf pelos valores próprios podemos classificar ($\lambda_i \neq 0$)

Ex:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

C^2

$\nabla f = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} (0,0)$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$

$\Rightarrow (0,0)$ é um ponto de mínimo local

é global: $f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Ex:

$f(x,y) = x^2 + 2$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\nabla f = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$(0,y), \forall y \in \mathbb{R}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$
inconclusivo

diretamente:

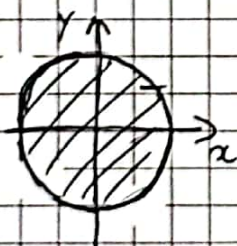
$f(0,y) = 2 \leq f(x,y) = x^2 + 2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (0,y)$ são pontos de mínimo global

Ex:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \rightarrow \mathbb{R}$



não podemos calcular ∇f em $x^2 + y^2 = 4$

$D = \text{int}^* D \cup \text{front} D$
aberto $\Rightarrow \nabla f = 0$ análise direta

$\text{int} D: \nabla f = 0 \Rightarrow (0,0)$ é único ponto de estacionaridade

$f(0,0) = 0$ (mínimo local)

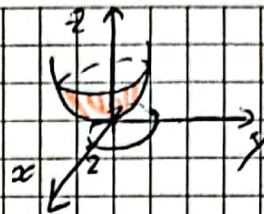
$\text{front} D: (x,y)$ tal que $x^2 + y^2 = 4$

$f(0,0) = 4$ (máximo global)

Em D

$$0 \leq f(x,y) \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

$\uparrow$ mínimo global $\uparrow$ máximo global



Teorema de Weierstrass

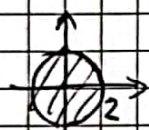
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua $D \subset \mathbb{R}^n$

Se D é um conjunto compacto então f tem máximo e mínimo globais em D

→ compacto: limitado e fechado

ex:

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

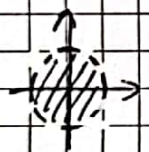


compacto

⇒ o teorema garante existência de máximo e mínimo globais

ex:

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$



não fechado ⇒ não compacto

⇒ não podemos usar o teorema

por análise direta:

$0 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq f(x,y) \leq 4$

$\downarrow$
mínimo global

Não há máximo global



ex:

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$



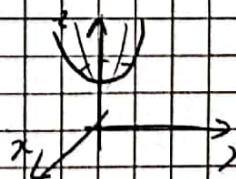
não limitado ⇒ não compacto

⇒ não podemos usar o teorema

$D = \text{int } D \cup \text{front } D$

int D : $\nexists f=0$ impossível para este D

front D : $f(x,y) = 4$



$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 4$
mínimo global

Porém os pontos da fronteira são pontos de f em D .
Não há máximos de f em D .

Função Inversa

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

É sobrejetiva se $f([a, b]) = \mathbb{R}$

Se f não é sobrejetiva, $f: [a, b] \rightarrow f([a, b])$, já é sobrejetiva

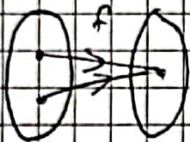
Uma inversa para f é $f^{-1}: B \rightarrow [a, b]$ tal que $f \circ f^{-1} = 1$ e

$$f^{-1} \circ f = 1$$

$$[a, b] \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} [a, b] \quad B \xrightarrow{f^{-1}} [a, b] \xrightarrow{f} B$$

Para haver inversa, f tem de ser injetiva

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



• Se $f: [a, b] \rightarrow B$ for injetiva e sobrejetiva tem inversa $f^{-1}: B \rightarrow [a, b]$ global.

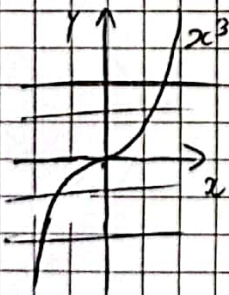
• Se não houver inversa global, pode haver inversa local



Uma inversa local é $f^{-1}: V \rightarrow U$ onde $a \in U$, $f(a) \in V$ (é inversa de $f|_V$)

ex:

$$f(x) = x^3$$



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

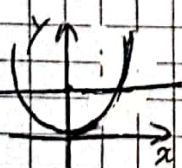
é injetiva $\Rightarrow$ tem inversa global

$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ex:

$$f(x) = x^2$$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (não tem inversa)
não sobrejetiva

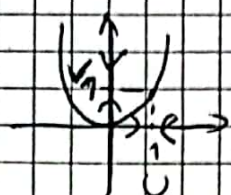
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ é sobrejetiva

não é injetiva ($f(+x) = x^2$)

$\Rightarrow$ Não há inversa global

Para as inversas locais:

por exemplo, para $x=1$



$$1 \in U \quad f(1) \in V$$

$$f|_{U} :]0, 1+\epsilon[\rightarrow]0, 1+\epsilon[$$

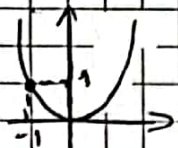
Com $U =]0, 1+\epsilon[$ e $V =]0, 1+\epsilon[$ já há inversa local

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$f^{-1} :]0, 1+\epsilon[\rightarrow]0, 1+\epsilon[$$

Normalmente consideramos f de classe C^1 e U e V são conjuntos abertos.

Se $x = -1$, $f(x) = 1$



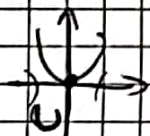
há inversa local.

$$\text{consideramos } f|_{U} :]-\infty, 0[\rightarrow]0, 1+\epsilon[$$

$$f^{-1} :]0, 1+\epsilon[\rightarrow]-\infty, 0[\quad f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

Podemos escolher as mesmas inversas locais para qualquer $x \neq 0$.

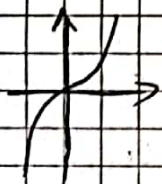
Em torno de $x=0$ não há inversa local



Não há U aberto tal que $f|_U$ seja injetiva

ex:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$



Em torno de $x=0$ há inversa local

Teorema da Função Inversa

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

Se $c \in]a, b[$ e tal que $f'(c) \neq 0$, então existe inversa local em torno de $x=c$, e a inversa é de classe C^1 .

$$[f^{-1}]'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$





$$f'(c) \neq 0$$



ex:

$f(x) = x^3$ de classe C^1 .

$$f'(x) = 3x^2 \neq 0 \text{ para } x \neq 0$$

$\Rightarrow$ o teorema garante existência de inversa local em torno de qualquer $x \neq 0$.

ex:

$f(x) = x^2$ de classe C^1

$$f'(x) = 2x \neq 0 \text{ para } x \neq 0$$

$\Rightarrow$ o teorema garante inversa local em torno de $x \neq 0$

Para $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$ e $x=1$ $f(1) = 1$

na inversa local

$$[f^{-1}]'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$[f^{-1}]'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{2} y^{-1/2}$$

$$[f^{-1}]'(1) = \frac{1}{2}$$

Problemas

11/04/2023

FICHA 4

g) $g(x,y) = \frac{y^2}{2} + xy + x^2$ classificar os pontos de estacionaridade

pontos de estacionaridade: $\nabla g = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y + 2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 = -y \Rightarrow x=0 \text{ ou } 2x^2 = -y$$

$$\Downarrow$$

$$y=0$$

$$2x^2 = -y$$

$$\Downarrow$$

$$y = \mp 1/2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = y + x = 0$$

$$(0,0), (1/2, -1/2), (-1/2, 1/2)$$

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

valores próprios: $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 > 0$$

$$\lambda_2 < 0$$

(0,0) é ponto de sela

$$H_g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{valores próprios: } |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 2$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 < 0$
ponto de mínimo local

$$H_g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ponto de mínimo local}$$

outra critério

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{menores principais}$$

$$|3| > 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0 \Rightarrow \text{ponto de mínimo local}$$

c) $e(x,y) = x^3 - y^2$

$$\nabla e = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial x} = 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$H_e(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 e}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}$$

inconclusivo

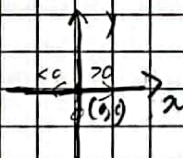
Análise direta:

$$e(x,y) = x^3 - y^2 \quad e(0,0) = 0$$

$$e(x,0) = x^3 > 0 \text{ para } x > 0$$

$$< 0 \text{ para } x < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ é um ponto de sela



i) $f(x,y,z) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4y + 4z$

$$\nabla f = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 2 + 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

da 1ª eq.: $x(4x^2 - 12x + 8) = 0$

$$x = 0 \text{ ou } x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = -1 \text{ ou } x = 2$$

da 2ª eq.: $z = -4y - 4$

Subst. na 3ª eq.: $y + 2(-4y - 4) + 1 = 0$

$$\Rightarrow y = -1 \text{ e } z = 0$$

$$\begin{matrix} (0, -1, 0) \\ (1, -1, 0) \\ (2, -1, 0) \end{matrix}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Soma dos raízes = 3
Produto dos raízes = 2



by Staples

$$H_i(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 i}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 24z + 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_i(0, -1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

com os menores principais

$$|8| = 8 > 0$$

$$|8 \ 0| = 32 > 0$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8(8-1) = 8 \cdot 7 > 0$$

$\Rightarrow (0, -1, 0)$ é ponto de mínimo

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$H_i(1, -1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|-4| = -4 < 0$$

$$|-4 \ 0| = -16 < 0$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot 7 < 0$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

$$|-4 \ 0 \ 0| = -4$$

com os valores próprios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1 = -4$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} > 0 \quad \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$$

Por valores próprios de sinal diferente $\Rightarrow$ ponto de sela

$$H_i(2, -1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$12x^2 - 24x + 8$$

$$|8| = 8 > 0$$

$$|8 \ 0| = 32 > 0$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 7 > 0$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$$|8 \ 0 \ 0| = 8$$

$\Rightarrow$ ponto de mínimo

Teorema da Função Implícita

02/05/2023

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow y = f(x)$$

Teorema Função implícita ($\mathbb{R}^n$)

$$F: U \rightarrow \mathbb{R} \quad (U \subset \mathbb{R}^2 \text{ aberto})$$

$$(a, b) \in U$$

Se $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$, $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ numa vizinhança de (a, b) .

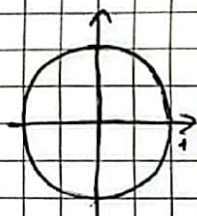
• f é de classe C^1

• $f'(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$

indep.
dep.

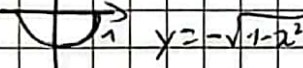
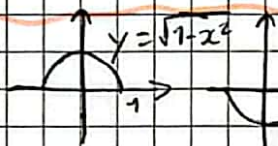
ex:

$x^2 + y^2 = 1$ circunf.



• Será que $y = f(x)$?

sem o leorema
 $\Rightarrow y = \pm \sqrt{1-x^2}$



com o leorema

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$

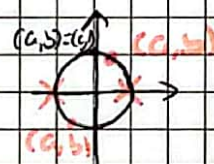
Podemos considerar $F(x,y) = x^2 + y^2$ de classe C^1

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $U = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ podemos usar o leorema

$y = f(x)$ localmente se $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \neq 0$ se (a,b) for tal que $b \neq 0$



Se $(a,b) = (0,1)$, $f'(0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = - \frac{2x|_{(0,1)}}{2y|_{(0,1)}} = 0$

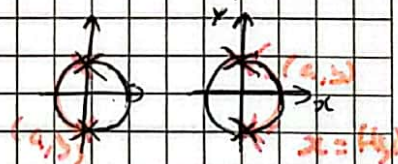
• $x = f(y)$ localmente?

dep. indep.

Sim, se $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$

indep.
dep.

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \neq 0$ É possível escrever $x = f(y)$ se (a,b) for tal que $a \neq 0$



Regra da cadeia

$F(x, f(x)) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$



by Staples

sem o teorema

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{1-y^2}$$

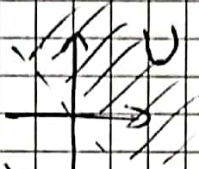
ex:

$$x \log(x+y) + y = 1 \Rightarrow y = f(x)$$

$$F(x, y) = x \log(x+y) + y \quad C^1$$

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$$



- Se quisermos y dependente,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{x+y} + 1 \neq 0$$

por exemplo, se $(a, b) = (0, 1)$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{existe } f(x) \text{ localmente}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1)} = \frac{\log(x+y) + \frac{x}{x+y}}{\frac{x}{x+y} + 1} \Big|_{(0, 1)} = 0$$

Embora nunca consigamos saber f , conseguimos determinar a derivada

- Se quisermos x dependente,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \log(x+y) + \frac{x}{x+y} \neq 0$$

por exemplo, se $(a, b) = (0, 1)$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1) = 0 \text{ não podemos usar o teorema, (mas podem haver } x = f(y))$$

se $(a, b) = (1, 0)$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{o teorema garante } x = f(y) \text{ localmente}$$

$$\text{e } \frac{\partial F}{\partial y}(0) = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0)} = -\frac{2}{1} = -2$$

||

$$x_1, \dots, x_k \quad y_1, \dots, y_m$$

$$F(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = 0 \quad F: U \rightarrow \mathbb{R}^m \quad U \subset \mathbb{R}^{k+m} \text{ aberto}$$

$$\Rightarrow (y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_k)$$

dependentes independentes

ex: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = f(z)$

$m=2$
 $k=1$

Teorema da Função Implícita (geral)

$F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$
de classe C^1

$U \subset \mathbb{R}^{k+m}$ aberto
 $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$
 $F = (F_1, \dots, F_m)$

Se $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0$ em $(a, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$

então localmente $(y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_k)$

- f é de classe C^1
- $D_x f(a) = -[D_y F(a, b)]^{-1} D_x F(a, b)$
 $\begin{matrix} m \times k & \begin{matrix} m \times m \\ \downarrow \text{dep.} \end{matrix} & \begin{matrix} m \times k \\ \downarrow \text{indep.} \end{matrix} \end{matrix}$

ex: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

$F(x, y, z) = (\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{F_1}, \underbrace{x + y}_{F_2})$

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1

Se quisermos x e y dependentes

$|D_{xy} F| \neq 0$

$|D_{xy} F| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y$

Se (a, b, c) for tal que $2a - 2b \neq 0$ ($\Leftrightarrow a \neq b$) o teorema garante que localmente x e y podem ser dependentes de z .

$(x, y) = f(z) \quad f: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad I \subset \mathbb{R} \text{ aberto}$

nesses pontos,

$$Df(a,b) = -[Df_2(a,b,c)]^{-1} Df_1(a,b,c)$$

dep. indep.

$$\begin{bmatrix} x'(c) \\ y'(c) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2z \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= - \frac{1}{2x-2y} \begin{bmatrix} 1-2y \\ -1 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2z}{2x-2y} \\ \frac{2z}{2x-2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \end{bmatrix}$$

O teorema permite escrever $g(x,y,z) = (f_1(z), f_2(z), z)$ localmente (parametrização da curva)

Um vetor tangente é $g'(z) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, 1 \right) = \left(-\frac{2z}{2x-2y}, \frac{2z}{2x-2y}, 1 \right)$

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

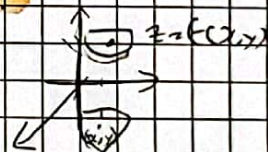
(x, y, z)

$$F = (F_1, F_2)$$

Só faz sentido considerar variáveis dependentes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{impossível} \\ \text{superfície} \end{matrix}$$

curva



Se quisermos x e z dependentes:

$|D_x F|$ tem de ser não nulo

$$|D_x F| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2z \text{ desde que } z \neq 0, \text{ em termo de } (a,b,c) \text{ podemos ter } x \text{ e } z \text{ dependentes e } y \text{ independentes } (x,z) = f(y)$$

Não desses pontos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2y \\ 1 \end{bmatrix} = - \frac{1}{-z} \begin{bmatrix} 0 & -2z \\ -1 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2y-2x}{2z} \end{bmatrix}$$

Problemas

02/05/2023

FICHA 5

1) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y): x=0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \left(xy, \frac{y}{x} \right)$

- Mostre que f não é injetiva.
- Determine um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ onde f seja injetiva.
- Mostre que f tem inversa local em torno de $(2,2)$.
- Calcule $\mathcal{D}f^{-1}(4,1)$, onde f^{-1} é uma inversa de f .

1. F. Inversa

$$(y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n) \stackrel{!}{\Rightarrow} (x_1, \dots, x_n) = f^{-1}(y_1, \dots, y_m)$$

→ só dá condição para que exista
não dá fórmula para a função inversa

a) Injetiva se $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

Por exemplo

$$\begin{aligned} \text{se } (x_1, y_1) &= (1, 2) & f(1, 2) &= (2, 2) \\ (x_2, y_2) &= (-1, -2) & f(-1, -2) &= (2, 2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ não é injetiva

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow \left(x_1 y_1, \frac{y_1}{x_1} \right) = \left(x_2 y_2, \frac{y_2}{x_2} \right)$$

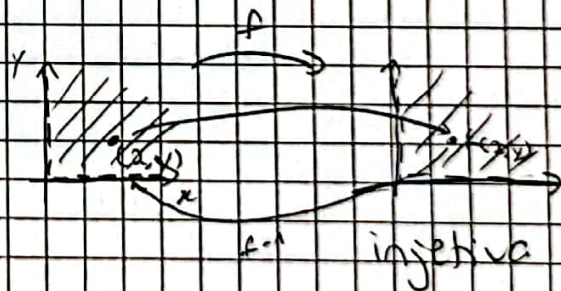
$$\begin{cases} x_1 y_1 = x_2 y_2 \\ \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \quad \text{não era possível neste caso}$$

b) $f(x,y) = \left(xy, \frac{y}{x} \right)$

Subconjunto onde seja injetiva?

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$$

Aqui f é injetiva



c) $(x,y) \xrightarrow{f^{-1}} (u,v)$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x = a(u,v) \\ y = b(u,v) \end{cases}$$

Teorema da Função Inversa

Se $|\mathcal{D}f(a,b)| \neq 0$, então existe f^{-1} localmente.

$$|\mathcal{D}f(2,2)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ existe inversa localmente



$$f(2,2) = (4,1)$$



O teorema também diz que:

$$[Df^{-1}](f(a,b)) = [Df(a,b)]^{-1}$$

1) $(a,b) = (2,1)$ $[Df^{-1}](4,1) = [Df(2,1)]^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}_{(2,1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1}_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof } A)^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) $f(x,y,z) = (2e^{yz-1}, e^{xz-1}, -e^{xy-1})$

Mostre que f é invertível numa vizinhança de $(1,1,1)$ com inversa de C^1 e calcule a derivada $[Df^{-1}](2,1,-1)$.

$(x,y,z) \xrightarrow{f} (u,v,w)$

$$\begin{cases} u = 2e^{yz-1} \\ v = e^{xz-1} \\ w = -e^{xy-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} (u,v,w)$$

$$[Df(1,1,1)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2ze^{yz-1} & 2ye^{yz-1} \\ ze^{xz-1} & 0 & xe^{xz-1} \\ -ye^{xy-1} & -xe^{xy-1} & 0 \end{bmatrix}_{(1,1,1)}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ o teorema garante inversa local, que é de classe C^1 e

$$[Df^{-1}](f(1,1,1)) = [Df(1,1,1)]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}_{(2,1,-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof } A)^T = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 \cdot (-1) \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5) Mostre que $y \sin(x+y) = 0$ define implicitamente x como função de y numa vizinhança de $(0, \pi)$.
 Calcule $\frac{dx}{dy}(0, \pi)$
 x dependente
 y independente

$$F(x, y) = y \sin(x+y)$$

Usar T. F. Implícita

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, \pi) = y \cos(x+y)|_{(0, \pi)} = \pi \cos \pi = -\pi$$

$\Rightarrow x$ pode ser dependente de y localmente

$$\frac{dx}{dy}(0, \pi) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(0, \pi)}{\frac{\partial F}{\partial x}(0, \pi)} = - \frac{\sin(x+y) + y \cos(x+y)|_{(0, \pi)}}{-\pi} = - \frac{-\pi}{-\pi} = -1$$

normalmente não se integra

nota de p.

Confirme a derivada resolvendo $y \sin(x+y) = 0$ em ordem a x .

$$\Rightarrow y=0 \text{ ou } \sin(x+y)=0$$

X

$$x+y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -y + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{dx}{dy}(\pi) = -1$$

Teorema da Função Implícita

ex:

$$F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(x, y, u, v) = (xv + yu, xy - uv)$$

$$\begin{cases} xv + yu = 0 \\ xy - uv = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2 \text{ dependentes} \\ 2 \text{ independentes} \end{matrix}$$

Se quisermos u e v dependentes de x e y podemos fazer isto em vizinhanças de pontos (x, y, u, v) tais que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{O determinante é } \begin{vmatrix} y & x \\ -v & -u \end{vmatrix} = -uy + xv$$

(para u e v serem independentes)

Só podemos usar o teorema em torno de pontos tais que $uy \neq xv$, por exemplo, $(0, 1, 1, 0)$

$$\Rightarrow (u, v) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

dep. indep.

Se fixarmos um ponto, por exemplo $(0, 0, 1, 0)$, podemos ver em torno deste ponto que variáveis podem ser dependentes.

(x, y, u, v)

6 possibilidades

(x, y) (x, u) (x, v)
 (y, u) (y, v) (u, v) ✓

(u, v) podem ser dependentes?

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \dots = -uv + xv \Big|_{(0,0,1,0)} = 0$$

$\Rightarrow$ o teorema não permite concluir se u e v podem ser variáveis dependentes em torno desse ponto

y e u podem ser dependentes?

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u & y \\ x & -v \end{vmatrix} = -uv - xy$$

no ponto $(0, 0, 1, 0)$ é $\neq 0$
 $\Rightarrow$ não podemos usar o teorema

y e v podem ser dependentes?

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u & x \\ x & -v \end{vmatrix} = -v^2 - x^2$$

no ponto: $-1 \neq 0$
 $(0, 0, 1, 0)$

$\Rightarrow$ o teorema garante

$(y, v) = (f_1(x, u), f_2(x, u))$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

localmente
 dep. indep.

para o teste
 cap. 4 a 6

Extremos Condicionados

ex:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

de classe $C^2 \Rightarrow$ podemos usar os critérios anteriores
pontos de estacionaridade

$$\nabla f = (0,0)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \right. \quad (0,0)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \right.$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

valores próprios: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$

$\Rightarrow (0,0)$ é um ponto mínimo de f

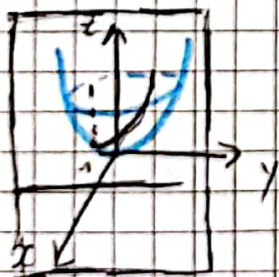


não há $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ parabolóide
máximo

mínimo = 0
em (0,0)

Se quisermos os extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2$ que estejam no plano $x=1$ ($(0,0)$ já não é um ponto de mínimo neste caso).

$$S = \{x=1\}$$



$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + y^2$$

Queremos os extremos da restrição

$$f|_S: S \rightarrow \mathbb{R} \quad f|_S(x,y) = f(1,y) = 1 + y^2$$

extremos?

tem mínimo = 1 em $(x,y) = (1,0)$ não tem máximo

$(1,0)$ não é ponto de estacionaridade de f original.

$$\begin{cases} f(x,y) \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \leftarrow \text{restrição}$$

problema de extremos condicionado

Proposição

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto de classe C^2

$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \text{onde } f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2 \end{cases}$

- Se $a \in U$ tal que $\nabla f(a) \neq 0$ e se $f|_S$ tem um extremo em a , então $\nabla(f + \lambda f) = 0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

ex:

λ - multiplicador de Lagrange

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 \\ F(x, y) = x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$g = f + \lambda F = x^2 + y^2 + \lambda(x - 1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y = 0$$

$$x = 1$$

$$2^a \text{ eq.} \Rightarrow y = 0$$

$$3^a \text{ eq.} \Rightarrow x = 1$$

$$1^a \text{ eq.} \Rightarrow \lambda = -2x = -2$$

$$(1, 0, -2)$$

$\Rightarrow f|_S$ tem um extremo em $(1, 0)$

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$F = x^2 + y^2 - 1$$

$$g = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + \lambda 2x = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y + \lambda 2y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$1^a \text{ eq. } 2x(1 + \lambda) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } \lambda = -1$$

$$2^a \text{ eq. } 2y(1 + \lambda) = 0$$

$$y = 0 \text{ ou } \lambda = -1$$

$$x = 0 \text{ e } y = 0 \Rightarrow \text{imp}$$

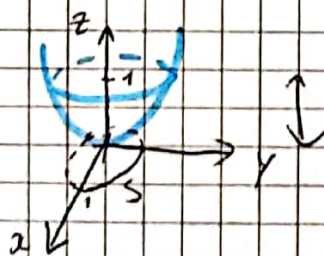
$$x = 0 \text{ e } \lambda = -1 \Rightarrow \checkmark$$

$$\lambda = -1 \text{ e } y = 0 \Rightarrow \checkmark$$

$$\lambda = -1 \leftarrow \lambda = -1$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

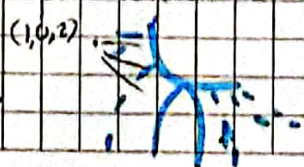
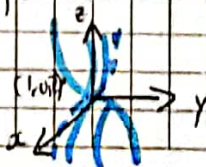
qualquer ponto de $x^2 + y^2 = 1$ é ponto de extremo



são todos os pontos de máximo e pontos de mínimo

ex:

Quais os pontos do hiperbolóide $z = x^2 - y^2$ mais próximos do ponto $(1, 0, 2)$?



$F(x, y, z)$ = distância de (x, y, z) a $(1, 0, 2)$

$$F(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2}$$

restrição: $z = x^2 - y^2$

$$F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$$

$$g = F + \lambda F$$

Podemos minimizar a função quadrado da distância

$$f = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2$$

$$g = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 + \lambda(x^2 - y^2 - z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(x-1) + 2\lambda x = 0$$

$$2^a \text{ eq: } 2y(1-\lambda) = 0$$

$$y = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y - 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2(z-2) - \lambda = 0$$

$$z = x^2 - y^2$$

Se $\lambda = 1$:

$$1^a \text{ eq: } 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$3^a \text{ eq: } 2z = 5 \Leftrightarrow z = \frac{5}{2}$$

$$4^a \text{ eq: } y^2 = x^2 - z = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} \text{ imp.}$$

Portanto $y = 0$:

$$4^a \text{ eq: } z = \frac{1}{2}$$

$$3^a \text{ eq: } 2x^2 - 4 - 2 = 0$$

$$1^a \text{ eq: } 2x - 2 + 2\lambda x = 0$$

MÉTODO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

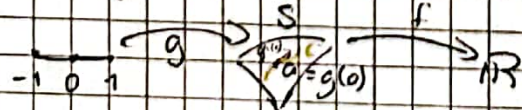
09/05/2023

$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1(U \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto})$$

$$S = \{F(x_1, \dots, x_n) = 0\} \quad F: U \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$$

$a \in S$ tal que $\nabla F(a) \neq 0$

• Se $f|_S$ tem um extremo em a , então $\nabla(f - \lambda F) = 0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.



g = parametrização da curva

$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $g(0) = a$.

Se $(f \circ g)(t)$ tem um extremo, $f \circ g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$



então $(f \circ g)'(x) = 0$

$\nabla f(g(0)) \cdot g'(0) = 0$

$\nabla f(a) \cdot g'(0) = 0$

tangente em c
 $\Rightarrow$ tangente a S

$\Rightarrow \nabla f(a)$ tem de ser normal a S

$S = \{F(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ $\nabla F(a)$ é normal a S em a .

O espaço normal a S em a é $\{\lambda \nabla F(a) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\neq 0$

$\Rightarrow \nabla f(a) = -\lambda \nabla F(a)$ para algum λ

$\nabla(F + \lambda F) = 0$

ex:

pontos de $z = x^2 - y^2$ mais próximos de $(1, 0, 2)$



Queremos minimizar a
 função distância de
 (x, y, z) a $(1, 0, 2)$

$d(x, y, z) = \|(x, y, z) - (1, 0, 2)\| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2}$

$S = \{z = x^2 - y^2\}$ $F(x, y, z) = z - x^2 + y^2$

Podemos minimizar o quadrado da distância

$f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2$

$g = f + \lambda F$

$g(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 + \lambda(z - x^2 + y^2)$

$\nabla g = 0$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(x-1) - 2\lambda x = 0$

2ª eq. $2y(1+\lambda) = 0$

$y=0$ ou $\lambda = -1$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0$

Se $\lambda = -1$:

$\frac{\partial g}{\partial z} = 2(z-2) + \lambda = 0$

1ª eq. $2(x-1) + 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

3ª eq. $2z - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{5}{2}$

4ª eq. $\frac{5}{2} = 1 - y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{8}$

imp.

$\Rightarrow y = 0$

4ª eq. $z = x^2$

3ª eq. $\lambda = 4 - 2z = 4 - 2x^2$

1ª eq. $2(2-1) - 2(4-2x^2)x = 0$

$4x^3 - 6x - 2 = 0$

$2x^3 - 3x - 1 = 0$

$\lambda = -1$ é raiz

Buffini

$\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & -3 & -1 \\ \hline & -2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$

$\frac{2x^2 - 2x - 1 = 0}{x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}}$

$$(-1, 0, 1) \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0, \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \quad \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0, \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)$$

Candidatos a pontos de extremo

$$f(-1, 0, 1) = 5 \quad f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0, \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \dots = \frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ menor valor}$$

$$f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0, \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \dots = \frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ pto. sela global}$$

A menor distância é $\sqrt{\frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}}$

f não tem máximo em S . po $z = x^2 + y^2$ tende para infinito

MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1 (U \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto})$$

$$F_1, \dots, F_m: U \rightarrow \mathbb{R} \quad S = \{F_1 = 0 \wedge \dots \wedge F_m = 0\}$$

$a \in S$ tal que $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$ são linearmente independentes

• Se $a \in S$ é um ponto de extremo,

$$\nabla(f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m) = 0 \text{ para alguns } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

λ_i - multiplicadores de Lagrange

espaço normal:

$$\nabla f \in \{ \lambda_1 \nabla F_1(a) + \dots + \lambda_m \nabla F_m(a) : \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

ex:

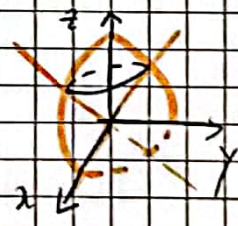
$$f(x, y, z) = x + y + z$$

Extremos na curva dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad z^2 = x^2 + y^2$$

sup. esf.

sup. cônica



$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$F_2 = z^2 - x^2 - y^2 = 0$$

$$g = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$$

$$g = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda_2(z^2 - x^2 - y^2)$$

$$\nabla g = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 + 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 x = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1 + 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 1 + 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$



$$1^a \text{ eq. } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$x = \frac{-1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$2^a \text{ eq. } y = \frac{-1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=y}$$

$$4^a \text{ eq. e } 5^a \text{ eq.}$$

$$2x^2 + z^2 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ z^2 = 2 \end{cases}$$

$$x = \pm 1$$

$$y = \pm 1$$

$$z^2 = 2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{2}$$

$$f(1, 1, \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$$

máximo

$$f(1, 1, -\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$$

$$f(-1, -1, \sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2}$$

$$f(-1, -1, -\sqrt{2}) = -2 - \sqrt{2}$$

mínimo

ex:

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

S é o cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

T. Weierstrass

f é cont.

S é compacto

$\Rightarrow f$ tem máximo e mínimo

$$F_1 = z$$

$$F_2 = x^2 + y^2$$

$$F_3 = z$$

No interior de S podemos usar os critérios anteriores:

$$\nabla f = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 = 0$$

imp.

possíveis extremos em $z=1$:

$$g = x + y + z + \lambda z$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 1 + \lambda = 0$$

$$z = 1$$

imp.

$$(x^2 + y^2 \leq 1)$$

$$\text{Em } z=0: g = x + y + z + \lambda z$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 1 + \lambda = 0$$

$$z = 0$$

imp.

$$\text{Em } x^2 + y^2 = 1:$$

$$g = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

imp.

Em $z=1$ e $x^2+y^2=1$

$g = 2 + y + z + \lambda_1 z + \lambda_2 (x^2 + y^2)$

1ª eq. $\lambda_2 \neq 0 \quad x = -\frac{1}{2\lambda_2} \quad x=y$

2ª eq. $y = -\frac{1}{2\lambda_2}$

3ª eq. $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1) \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 1 + 2\lambda_2 x = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 1 + 2\lambda_2 y = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z} = 1 + \lambda_1 = 0 \\ z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Em $z=0$ e $x^2+y^2=1$

$g = 2 + y + z + \lambda_1 z + \lambda_2 (x^2 + y^2)$

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

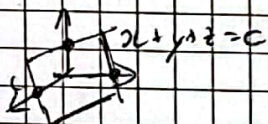
$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 1 + 2\lambda_2 x = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 1 + 2\lambda_2 y = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z} = 1 + \lambda_1 = 0 \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1) = \sqrt{2} + 1$ **máximo**

$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1) = -\sqrt{2} + 1$

$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \sqrt{2}$

$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = -\sqrt{2}$ **mínimo**



$F = x + y + z$

Problemas

09/05/2023

6) S: $\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 + 1 \\ y^2 + \sin x + \sin z = 1 \end{cases}$

a) Mostre que S é o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ numa vizinhança de $(0, 1, 0)$

b) Calcule $F'(0)$

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (x, y, z)

Para x e y serem dependentes
 $F(x, y, z) = (y^2 + z^2 - x^2, y^2 + \sin x + \sin z)$

$D_x F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 2y \\ \cos x & 2y \cos z \end{pmatrix} \Big|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

$\Rightarrow x$ e y podem ser dependentes (e z indep) $(x, y) = f(z) \quad x = f_1(z) \quad y = f_2(z)$



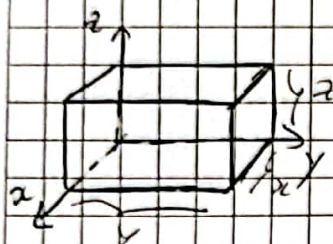
by Staples

$$b) F'(0) = (F'_1(0), F'_2(0)) = (-1, 0)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \end{bmatrix}_{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{(0,1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2z \\ 1 \end{bmatrix}_{(0,1)} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FICHA 6

5) Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume 1 m^3 que minimizam a área da caixa.



$$\text{Volume} = xyz = 1$$

$$\text{Área} = 2xy + 2xz + 2yz$$

Minimizar $F(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$
com restrição $xyz = 1$

$$F(x, y, z) = xyz$$

$$g = F + \lambda F = 2xy + 2xz + 2yz + \lambda xyz$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2y + 2z + \lambda yz = 0$$

$x \neq 0$ e $y \neq 0$ e $z \neq 0$ por causa da 4ª eq.

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2x + 2z + \lambda xz = 0$$

$$1^\text{a} \text{ eq: } \lambda = -2 \frac{(y+z)}{yz}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2x + 2y + \lambda xy = 0$$

$$2^\text{a} \text{ eq: } \lambda = -2 \frac{(x+y)}{xz}$$

$$xyz = 1$$

$$3^\text{a} \text{ eq: } \lambda = -2 \frac{(x+y)}{xy}$$

$$\frac{-2(y+z)}{yz} = \frac{-2(x+z)}{xz} = \frac{-2(x+y)}{xy} \quad c)$$

$$-2z(y+z) = -2y(x+z) = -2x(x+y)$$

$$-2xy - 2xz = -2yx - 2yz \Rightarrow z = y$$

$$\Rightarrow x = y = z$$

$$-2y^2 - 2y^2 = -2zx - 2xy \Rightarrow y = x$$

$$4^\text{a} \text{ eq } x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

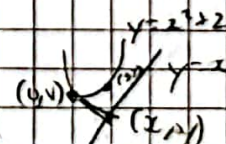
As dimensões são $(x, y, z) = (1, 1, 1)$



6) Ponto $y = x$ mais próximo de $y = x^2 + 2$

Se fosse:

ponto de $y = x$ mais próximo de $(0, 2)$
minimizamos $F(x, y) = x^4 + (y - 2)^2$



$$\text{Usamos } F(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

$$F = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = (x - u)^2 + (y - v)^2 + \lambda_1 (y - x) + \lambda_2 (y - x^2 - 2)$$

$$F_1 = y - x$$

$$F_2 = y - x^2 - 2$$

$$\nabla F = 0$$

$$F_2 = y - x^2 - 2$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(2-u) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-v) + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = -2(u-2) - 2\lambda_2 u = 0 \rightarrow 2(u-2) = 2\lambda_2 u = 4(u-2)u$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -2(y-v) + \lambda_2 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 2(y-v) = 2(u-2)$$

$$y = u$$

$$v = u^2 + 2$$

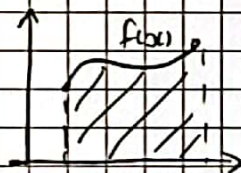
$$u \neq 2 \Rightarrow 2 = 4u \Rightarrow u = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (u, v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \in \text{parábola}$$

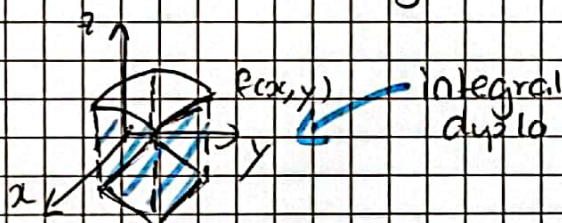
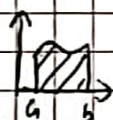
Integrais

12/05/2023

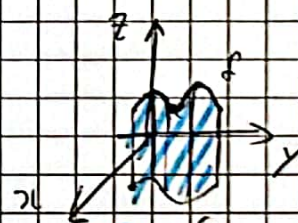
$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$



Se $\int_a^b f(x) dx$ existe, dá a área abaixo do gráfico



Integral duplo



Integral de linha

$$f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

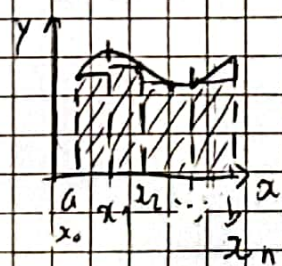
$$R = [a, b] \times [c, d]$$

- Quando existir, o integral duplo $\iint_R f(x, y) dz dy$ define o volume abaixo do gráfico.

$$f: C \rightarrow \mathbb{R}$$

- Quando existir, o integral de linha $\int_C f dg$ é a área entre a curva e o gráfico.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitada}$$



Uma partição de $[a, b]$ é $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

para esta partição a soma inferior de Darboux

$$S_n = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \text{ aproximação por defeito}$$

1) Integral inferior

$\int_a^b f(x) dx = \sup \{ S_d : d \text{ é uma partição de } [a,b] \}$ é a melhor aproximação por defeito a área

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

A soma superior de Darboux é $S_d = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$

(aproximação por excesso a área)

2) Integral superior

$\int_a^b f(x) dx = \inf \{ S_d : d \text{ é uma decomp. de } [a,b] \}$ é a melhor aproximação por excesso a área.

Para cada decomposição d ,

$$s_d \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_d$$

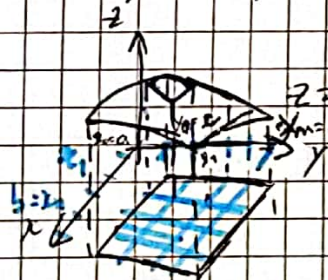
Se $\int_a^b f(x) dx = \bar{\int}_a^b f(x) dx$ a função é integrável e $\int_a^b f(x) dx = \bar{\int}_a^b f(x) dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$



integral improprio

$f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada



$$z = f(x,y)$$

Uma decomposição d de $R = [a,b] \times [c,d]$

$$\text{é } \{(x_i, y_j) : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

$$m_{ij} = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x,y)$$

Para esta decomposição a soma inferior é

$$s_d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})$$

7 integral?

A soma inferior

$$\iint_{-R} f(x,y) dx dy = \sup \{ S_d : d \text{ é uma decomposição de } R \}$$

é a melhor aproximação por defeito do volume abaixo do gráfico

$$f_{ij} = \sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x,y)$$

Para esta decomposição, a soma superior é

$$S_d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})$$

Para cada decomposição d ,

$$s_d \leq \iint_R f(x,y) dx dy \leq \iint_R f(x,y) dx dy \leq S_d$$

Se $\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_R f(x,y) dx dy$ $f(x,y)$ é integrável em

$R = [a,b] \times [c,d]$ e definimos o integral duplo $\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_R f(x,y) dx dy$

Ex:

$$f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(x,y) = \alpha$ constante é integrável

Dada uma decomposição d de $[a,b] \times [c,d]$

$$m_{ij} = \inf_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x,y) = \alpha$$

$$M_{ij} = \sup_{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x,y) = \alpha$$

$$s_d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha \left[\sum_{j=1}^m (y_j - y_{j-1}) \right] (x_i - x_{i-1}) = \alpha \sum_{i=1}^n (y_m - y_0 + y_2 - y_1 + \dots + y_m - y_{m-1}) (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n (y_m - y_0) (x_i - x_{i-1}) = \alpha (d - c) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \alpha (d - c) (x_n - x_0) =$$

$$= \alpha (d - c) (b - a)$$

$$S_d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) = \alpha (d - c) (b - a)$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \sup \{ s_d : d \text{ é dec. } \} = \sup \{ \alpha (d - c) (b - a) \} = \alpha (d - c) (b - a)$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \inf \{ S_d : d \text{ é dec. } \} = \inf \{ \alpha (d - c) (b - a) \} = \alpha (d - c) (b - a)$$

Como $\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_R f(x,y) dx dy$, $f(x,y)$ é integrável em R e



$$\iint_R f(x,y) dx dy = a(d-c)(b-a)$$

ex:

$$f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

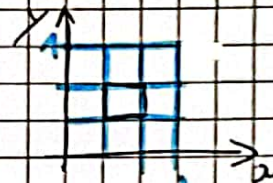
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função de Dirichlet

f é integrável em $R = [0,1] \times [0,1]$?

Para cada decomposição d de R :

$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x,y) = 0$$



porque em cada subretângulo há pontos (x,y) onde ou x ou y são irracionais

$$M_{ij} = \sup_{(x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]} f(x,y) = 1$$

porque em cada subretângulo há pontos (x,y) com x e y racionais

$$S_d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{m_{ij}}_{=0} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = 0$$

$$S_d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{M_{ij}}_{=1} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = 1$$

$$\text{O int. inferior } \iint_R f(x,y) dx dy = \sup \{ S_d : d \text{ é decomp.} \} = \sup \{ 0 \} = 0$$

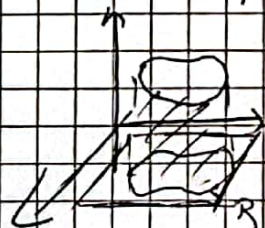
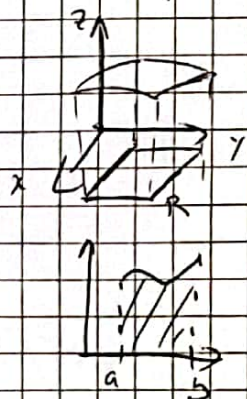
$$\text{O int. superior } \iint_R f(x,y) dx dy = \inf \{ S_d : d \text{ é decomp.} \} = \inf \{ 1 \} = 1$$

Como $\iint_R f(x,y) dx dy \neq \iint_R f(x,y) dx dy$ f não é integrável em

R e portanto não existe $\iint_R f(x,y) dx dy$

Quando possível, definimos $\iint_R f(x,y) dx dy$ se R é um retângulo

Também podemos ter



$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_R \tilde{f}(x,y) dx dy$$

é o volume entre S e o gráfico de f

$$\text{para } \tilde{f}(z,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in S \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\iint_R \tilde{f}(x,y) dx dy = \iint_S f(x,y) dx dy$$

Problemas



16/05/2023

FICHAS

⑤

$$2z + x^2 z^5 + y^2 x^3 + xy = 2$$

Mostre que a eq. define implicitamente z como função de x e y em torno de $(0,0,1)$ e calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,0)$.

$z = f(x, y)$ $\Rightarrow$ des x, y indep

$$F(x, y, z) = 2z + x^2 z^5 + y^2 x^3 + xy$$

Requisitos de:

$$|D_z F| \neq 0 \text{ em } (0,0,1)$$

$$|D_z F| = \left| \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) \right| = 2 + 5x^2 z^4 \Big|_{(0,0,1)} = 2 \neq 0$$

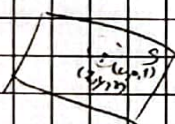
$\Rightarrow$ pelo T. Função implícita z pode depender de x e y . $z = f(x, y)$

$$\left[\frac{\partial x}{\partial y} F \right]_{(0,0)} = - \left[D_z F \right]_{(0,0,1)}^{-1} \left[D_{xy} F \right]_{(0,0,1)}$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \right]_{(0,0)} = - \left[\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) \right]^{-1} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2z^5 + 3y^2 x^2 + y & 2yx^3 + x \end{bmatrix}_{(0,0,1)} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right]_{(0,0)} = 1$$



Em pontos próximos de $(0,0,1)$, $|D_z F| = 2 + 5x^2 z^4 + 0$

e podemos usar o T. da função implícita em (x, y, z)

$$\left[\frac{\partial x}{\partial y} F \right]_{(x,y)} = - \left[D_z F \right]_{(x,y,z)}^{-1} \left[D_{xy} F \right]_{(x,y,z)} = -\frac{1}{2 + 5x^2 z^4} \begin{bmatrix} 2z^5 + 3y^2 x^2 + y & 2yx^3 + x \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2 + 5x^2 z^4} (2z^5 + 3y^2 x^2 + y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{1}{2 + 5x^2 z^4} (6yx^2 + 1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,0) = -\frac{1}{2}$$

FICHA 6

4) Ponto da reta $y=x$ mais próximo de $y=x^2+2$

Se fosse pontos de $y=x$ mais próximos de $(0,2)$

minimizar $(x-0)^2 + (y-2)^2$ com a restrição $y=x$

$$g = x^2 + (y-2)^2 + \lambda(y-x)$$

minimizar $(x-u)^2 + (y-v)^2$ com $y=x$ $v=u^2+2$
 $g = (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda_1(y-x) + \lambda_2(v-u^2)$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(x-u) - \lambda_1 = 0$$

$$1^a \text{ eq } \lambda_1 = 2x - 2u \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2u = 2y - 2v \\ 2x - 2u = y - v \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-v) + \lambda_1 = 0$$

$$2^a \text{ eq } \lambda_1 = 2y - 2v$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_1} = 2(x-u) - 2(y-v) = 0$$

$$-2(u-2) = 2\lambda_2 = 4u(2-u) \quad \Rightarrow u = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_2} = -2(y-v) + 2(u^2+2) = 0$$

$$\lambda_2 = 2(y-v) = 2(x-u)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = -2(x-u) + 2\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_2 = 2(y-v) = 2(x-u)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -2(y-v) + 2\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_2 = 2(y-v) = 2(x-u)$$

$$y=x$$

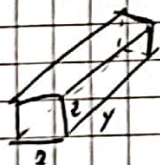
$$v = u^2 + 2$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \in U$$

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} + x^2 - \frac{9x}{2} + \frac{81}{16}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - \frac{7x}{2} - \frac{37}{16} = 0$$

5) Det. dimensões de uma caixa retangular de volume $1m^3$ que minimizem a área.



$$xyz = 1$$

minimizar

$$Área = 2xy + 2yz + 2xz \Rightarrow \dots \Rightarrow x=y=z=1$$

Se for uma caixa aberta:



Sem a tampa de uma

minimizar

$$Área = xy + 2xz + 2yz \quad \text{com a restrição} \quad \text{volume} = xyz = 1$$

$$g = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz)$$

$$1^a \text{ eq } \lambda = \frac{y+2z}{x^2} \quad \text{e } y \neq 0 \quad (y=0 \text{ é imp})$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y + 2z + \lambda yz = 0$$

$$2^a \text{ eq } \lambda = \frac{x+2y}{z^2} \quad \text{se } z \neq 0 \quad (z=0 \text{ é imp})$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x + 2z + \lambda xz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y+2z}{x^2} = \frac{x+2y}{z^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = x + 2y + \lambda xy = 0$$

$$xyz = 1$$

$$-\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -\frac{1}{z} - \frac{2}{x} \Rightarrow x=y \quad 3^a \text{ eq } 5\lambda + 2\lambda = 0 \quad \text{se } \lambda \neq 0 \quad \text{imp}$$

$$x=y \quad \lambda = -\frac{1}{5}$$

$$2^a \text{ eq } 2 + 2\lambda xz = 0 \quad x+2z - \frac{4xz}{5} = 0 \quad x+2z - 4z = 0 \quad x=2z$$

$$x=y \quad x=2z$$

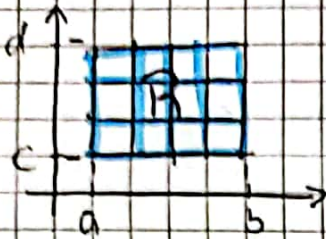
$$4^a \text{ eq } 2yz = 1 \quad (2z)(2z)z = 1 \Rightarrow 4z^3 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \quad \text{qrc}$$

Integrais duplas

19/05/2023

$$f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

limitada



Para cada decomposição d , definimos a soma inferior s_d e a soma superior S_d .

Integral Superior

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \inf \{ S_d \}$$

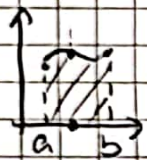
Integral Inferior

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \sup \{ s_d \}$$

Se $\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy$, a função é integrável e definimos

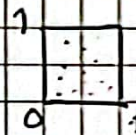
$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

- Se $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, é integrável



função de Dirichlet

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



não é integrável

- Se o conjunto de pontos de descontinuidade de $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tiver **conteúdo nulo**, então f é integrável

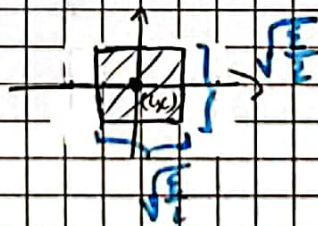
$A \subset \mathbb{R}^2$ tem **conteúdo nulo** se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura finita $\{R_i\}$ tais que $A \subset \bigcup R_i$ e $\sum \text{Área}(R_i) < \varepsilon$

ex:

$$A = \{(0, 0)\}$$

tem conteúdo nulo

Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos



$$R_1 = \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \right] \times \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \right]$$

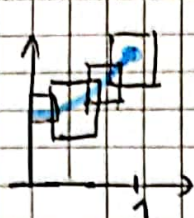
- Um número finito de pontos tem conteúdo nulo
- $\mathbb{N}$ não tem conteúdo nulo (porque não é um conjunto limitado)
- Se A tem conteúdo nulo, é limitado
- $[0, 1] \times [0, 1]$ não tem conteúdo nulo

$$A \subset \bigcup R_i \quad \sum \text{Área}(R_i) \geq 1 \text{ para qualquer cobertura}$$



(para $\varepsilon < 1$, não há cobertura com área total $\leq \varepsilon$)

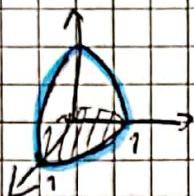
• Gráficos de funções contínuas têm conteúdo nulo $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$



para cada $\varepsilon > 0$
Área total $\leq \varepsilon$
 $f(x) = e^x$

O gráfico de $f(x) = e^x$ $x \in [0,1]$
tem conteúdo nulo

$f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$



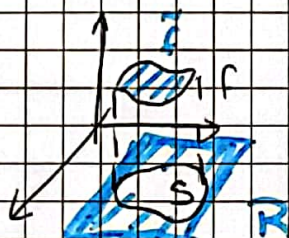
$$S = \{x^2 + y^2 = 1\}$$

meia esfera
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad z \geq 0$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$\iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \rightarrow$ volume abaixo do gráfico

Se S não for um retângulo, para definir $\iint_S f(x,y) \, dx \, dy$ consideramos
SCR



$$\tilde{f} = \begin{cases} f, & (x,y) \in S \\ 0, & (x,y) \notin S \end{cases}$$

Definimos $\iint_S f(x,y) \, dx \, dy$ como $\iint_R \tilde{f}(x,y) \, dx \, dy$ (não depende do retângulo)

• Se $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua vai ser integrável se a fronteira de S tiver conteúdo nulo (porque essa fronteira é o conjunto de pontos de descontinuidade de $\tilde{f}$).

ex:

$$f(x,y) = y \quad f: [0,1] \times [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$$

f é contínua e o domínio é um retângulo
 $\Rightarrow f$ é integrável em $[0,1] \times [0,2]$

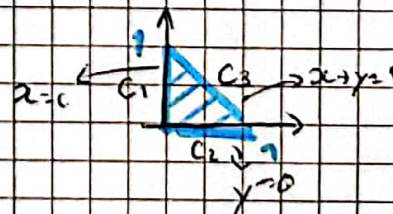
$$f(x,y) = y \quad f: S \rightarrow \mathbb{R}$$

f é contínua A fronteira tem conteúdo nulo?

$$\text{Fronteira de } S = c_1 \cup c_2 \cup c_3$$

c_3 : é o gráfico de $y = x+1$
 $\Rightarrow$ tem cont. nulo

$f(x) = x+1 \quad f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua



C₂: e' o grafico de $y=0$ $f(x)=0$ $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ que e' cont'nuo
 $\Rightarrow$ tem cont'nuo nulo

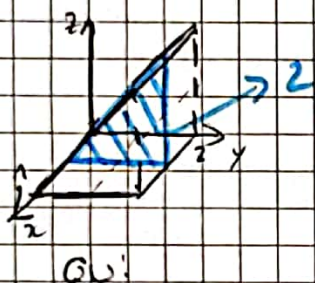
C₄: e' o grafico de $x=0$ $f(y)=0$ $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ que e' cont'nuo
 $\Rightarrow$ tem cont'nuo nulo

$\Rightarrow$ S tem cont'nuo nulo por ser uma un'ao finita de conjuntos de cont'nuo nulo

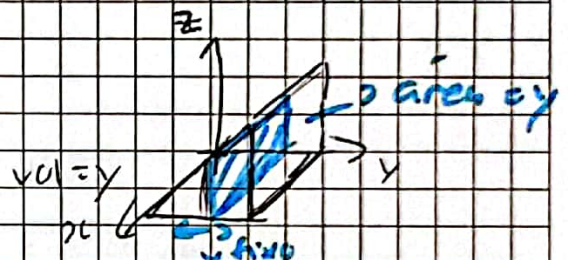
$\Rightarrow f$ e' integravel em S

Integrais Iteradas

$$\int_0^1 \left[\int_0^2 y dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2} \right] dx = \int_0^1 2 dx = 2x \Big|_{x=0}^{x=1} = 2$$

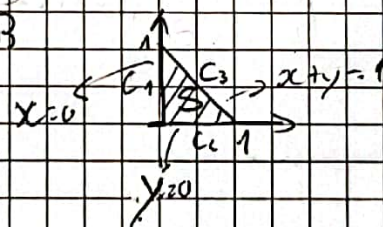


plane $z = 2y$



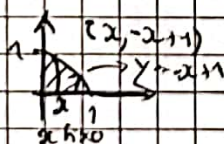
$$\int_0^2 \left[\int_0^1 y dx \right] dy = \int_0^2 \left[yx \Big|_{x=0}^{x=1} \right] dy = \int_0^2 y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2} = 2$$

$f(x,y) = y$ $f: S \rightarrow \mathbb{R}$



f e' cont'nuo
 A fronteira tem cont'nuo nulo?

Integral iterado em S
 $[dy dx]$



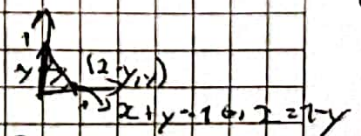
$$\int_0^1 \left[\int_0^{2-x} y dx \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2-x} \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{(2-x)^2}{2} dy = -\frac{(2-x)^3}{6} \Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{6}$$

$[dx dy]$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{2-y} y dx \right] dy = \int_0^1 \left[yx \Big|_{x=0}^{x=2-y} \right] dy = \int_0^1 y(2-y) dy =$$

$$= \int_0^1 (2y - y^2) dy = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



Teorema de Fubini

$f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada integrável

• Se $\forall x \in [a,b]$ a função $y \mapsto f(x,y)$ é integrável em $[c,d]$

• Se $z \mapsto \int_c^d f(x,y) dy$ é integrável em $[a,b]$

$$\text{Então } \iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dz$$

• Se f é contínua podemos usar o Teorema de Fubini

• Ou se o conjunto de pontos descontinuos tiver conteúdo nulo.

Integrais Duplos

26/05/2023

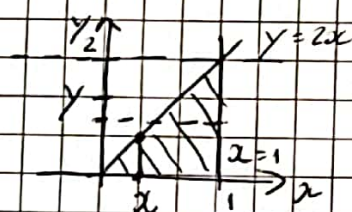
$$\int_0^2 \left[\int_{\frac{1}{2}x}^1 dx^2 \right] dy$$

reta

$dy dx$

$$x = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2x$$

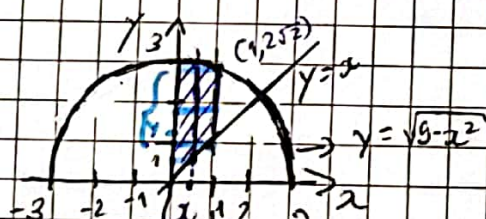
$$x = 1$$



$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_0^{2x} e^{x^2} dy \right] dx &= \int_0^1 e^{x^2} y \Big|_{y=0}^{y=2x} dx = \\ &= \int_0^1 e^{x^2} 2x dx = e^{x^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = e - 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left[\int_{\frac{1}{2}x}^1 F(x,y) dy \right] dx$$

trocar a ordem de iteração



$$\begin{aligned} y &= x \text{ reta} \\ y &= \sqrt{9-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \text{ semi-circunf.} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^x f(x,y) dx \right] dy + \int_1^{2\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y) dx \right] dy +$$

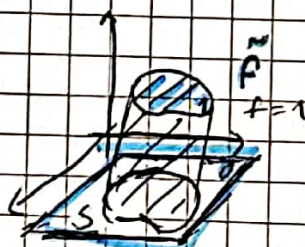
$$+ \int_{\frac{1}{2}}^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y) dy \right] dx$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{9-x^2} \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x = \pm \sqrt{9-y^2}$$

S: região de $\mathbb{R}^2$ cuja fronteira tem conteúdo nulo.

$$\text{Área}(S) = \iint_S 1 dx dy$$



Volume = Área(S) · altura

$$\iint_S 1 dx dy = \text{Área}(S)$$

$$\int_a^b 1 dx = \text{comp.}([a, b])$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx$$

qualquer integral da função 1 dá a medida da região de integração
centroide de uma região S

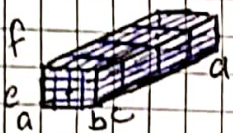
$(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{Área}(S)} \iint_S x dx dy$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{Área}(S)} \iint_S y dx dy$$

Integrais Triplas

$$f: [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

decomposição^a de $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

Subdivide o paralelepípedo em R_{ijk}



$$S_d = \sum_{i,j,k} m_{ijk} \text{volume}(R_{ijk}) \rightarrow \text{aproximação por defeito}$$

$$S_e = \sum_{i,j,k} M_{ijk} \text{volume}(R_{ijk}) \rightarrow \text{aproximação por excesso}$$

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \inf \{ S_e \} \quad \text{melhor aprox. por excesso}$$

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \sup \{ S_d \} \quad \text{melhor aprox. por defeito}$$

Se $\iiint f = \iiint f$, f é integrável e definimos $\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$

ex:

$$f(x, y, z) = x + 2y - z$$

Integral tripla na região

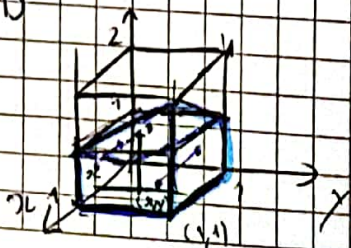
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - x\}$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\frac{dx dy dz}{dx dz dy}$$

$$\frac{dy dz dz}{dy dz dx}$$

$$\frac{dz dz dy}{dz dy dx}$$



$$z = 0$$

$$z = 2 - x \text{ plano}$$

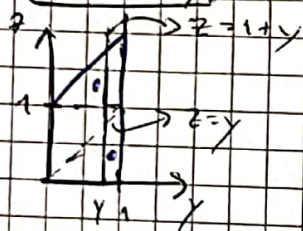
$$\int_0^1 \int_0^{1+y} \int_0^{x+y} (x+zy-z) dz dy dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1+y} (x+zy)z - \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=x+y} dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1+y} ((x+zy)(x+y) - (x+y)^2/2) dy \right] dx$$

fazemos a primitiva em y considerando x como constante

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1+y} (x+zy-z) dz \right] dx dy = \dots$$

$$dx dz dy$$

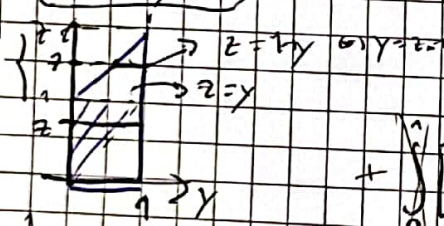


$$\begin{cases} z=1 \\ z=x+y \end{cases} \Rightarrow z=1+y$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1+y} \left[\int_0^{x+y} f dz \right] dx \right] dy + \int_0^1 \left[\int_y^{1+y} \left[\int_{z-y}^z f dz \right] dx \right] dy$$

$$z=x+y \Leftrightarrow x=z-y$$

$$dz dy dz$$



$$\int_0^1 \left[\int_0^{1+y} \left[\int_{z-y}^z f dx \right] dy \right] dz +$$

$$+ \int_0^1 \left[\int_z^{1+y} \left[\int_{z-y}^z f dx \right] dy \right] dz + \int_1^2 \left[\int_{z-1}^1 \left[\int_{z-y}^z f dx \right] dy \right] dz$$

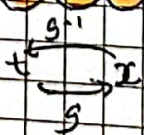
$$\int_0^1 \left[\int_0^{1+y} \int_0^{x+y} f dz dy \right] dx$$

Integração por substituição

30/05/2023

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \left| \frac{dx}{dt} \right| dt$$

$x = g(t)$

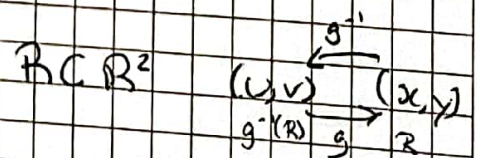


- mudança de variável
- injetiva
 - g de classe C¹
 - |g'(t)| ≠ 0 sempre

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_{g^{-1}(R)} f(g(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

(x,y) = g(u,v)

jacobiano



mudança de variáveis

- injetiva
- ϕ de classe C^1
- $|Dg| \neq 0$

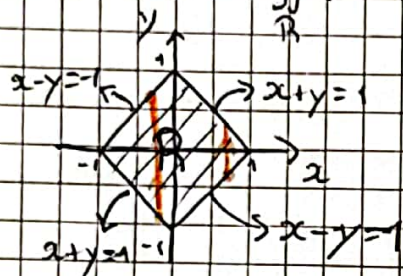
$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ - módulo determinante da matriz jacobiana

$$Dg = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Notação: $Dg = Jg$ jacobiana da transformação

ex:

Calcular $\iint_R (x^2 - y^2) dx dy$ onde R é o quadrado



Coordenadas cartesianas

$|dy dx|$

$$\int_{-1}^0 \int_{-1-x}^{1-x} (x^2 - y^2) dy dx + \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} (x^2 - y^2) dy dx$$

Vamos usar uma mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = x+y & u \in [-1, 1] \\ v = x-y & v \in [-1, 1] \end{cases}$$

mudança de variáveis?

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} & \text{é injetiva} \\ y = \frac{u-v}{2} & \text{é } C^1 \text{ (polinômicos)} \end{cases}$$

$$|Dg| \neq 0$$

$$|Dg| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \iint_R (x^2 - y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u \cdot v \cdot \frac{1}{2} du dv = \int_{-1}^1 \frac{u^2 v}{4} \Big|_{v=-1}^{v=1} du = 0$$

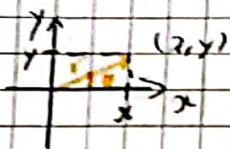
$$f(x,y) = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = uv$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$$

$$\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right]^{-1} = \left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right]$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (u+v) \ln(u+v)$$

Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$



(r, θ)
 r - distância à origem $r \in [0, +\infty[$
 θ - ângulo entre o vetor e o semi-eixo positivo das

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$(r, \theta) \rightarrow (x, y)$$

$$g: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

não é injetiva

por exemplo: $g(1, 0) = (1, 0)$
 $g(1, 2\pi) = (1, 0)$

Para ser injetiva, θ tem de estar num intervalo de comprimento 2π ,
 por exemplo $[0, 2\pi]$

$$g(0, \pi) = (0, 0) \text{ para qualquer } \theta$$

Se definimos coordenadas polares para $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ (por

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = |r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta| = r \neq 0$$

(exemplo)
jacobiano

ex:

Área de um círculo de raio $R = \pi R^2$

$$\text{Área}(S) = \iint_S 1 \, dx \, dy = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \, dy \, dx = \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2-x^2} \, dx$$

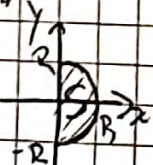


$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

podia fazer-se
 por substituição
 $x = R \cos t$

Em coordenadas polares:

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R 1 \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=R} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$



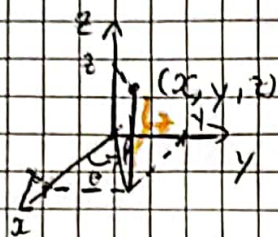
$\theta \in [0, 2\pi]$

$$\text{Área} = \iint_S 1 \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta$$

Se escolhermos $\theta \in [-\pi, \pi]$, já fica só um integral:

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta$$

Coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$



$$(p, \theta, z)$$

(p, θ) - coordenadas polares da projeção no plano xy
 z - altura

$$p \in [0, +\infty] \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (\text{ou outro intervalo de comprimento } 2\pi)$$

$$z \in \mathbb{R} \quad (p, \theta, z) \rightarrow (x, y, z)$$

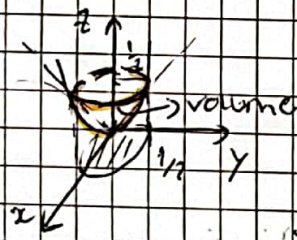
$$\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{jacobiano } |Dg| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -p \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & p \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = p$$

ex:

volume da região

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{z^2 + 1}\}$$



$$\begin{aligned} z &= 2(x^2 + y^2) \quad \text{Parabolóide} \\ z &= \sqrt{z^2 + 1} \quad \text{Sup. cônica} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z \geq 2(x^2 + y^2) \\ z \leq \sqrt{z^2 + 1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ p &= 2p^2 \Rightarrow p = 0 \text{ ou } p = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{volume} = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \int_{2p^2}^{\sqrt{z^2 + 1}} p \, dz \, dp \, d\theta$$

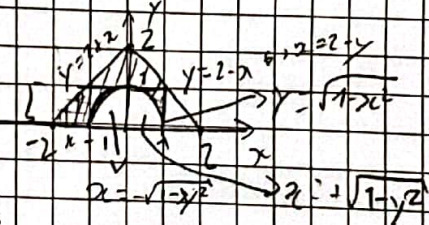
$$\begin{aligned} z - 2(x^2 + y^2) &= 2p^2 \\ z &= \sqrt{z^2 + 1} = p \end{aligned}$$

Problemas

30/05/2023

$$\textcircled{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \int_{2p^2}^{\sqrt{z^2 + 1}} f(x, y, z) \, dz \, dp \, d\theta + \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-|x|} f(x, y) \, dy \, dx$$

$$\begin{aligned} y &= 0 & y &= 2-x & \text{e.l.c.} & \rightarrow x = y+2 \\ y &= \sqrt{1-x^2} & \rightarrow 2^2 + y^2 &= 1 & y &= 2-|x| = \begin{cases} 2-x, x \geq 0 \\ 2+x, x < 0 \end{cases} \\ & & & & & \downarrow \\ & & & & & z = \pm \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

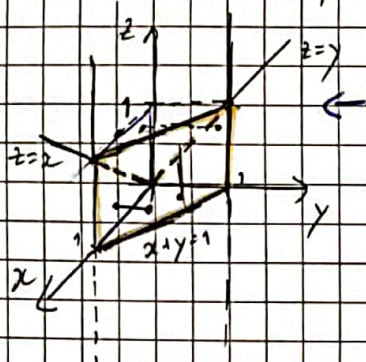


$$\int_0^1 \int_{y-2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx dy$$

$$+ \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y) dx dy + \int_1^2 \int_{y-2}^{2-y} f(x,y) dx dy$$

5

a) Volume de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, 0 \leq z \leq x+y\}$ nos ordens $dz dx dy$ e $dy dz dx$

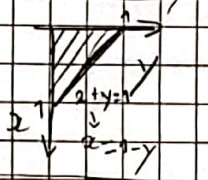


$$x+y=1$$

$$z=0$$

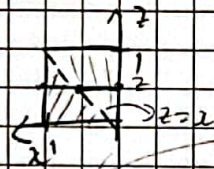
$$z=x+y$$

$$dz dx dy$$



$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{x+y} 1 dz dx dy$$

$$dy dz dx$$



y varia entre $z=2x$ e $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$

y varia entre $y=0$ e $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$

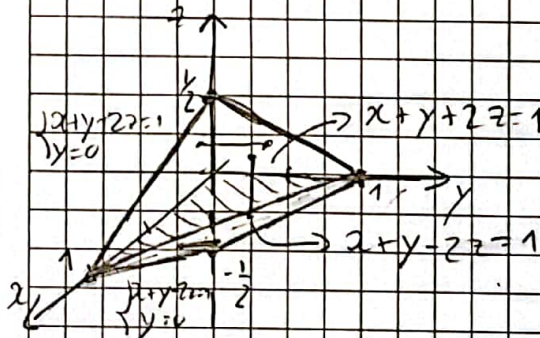
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_x^{1-x} f(x,y,z) dy dz dx + \int_0^1 \int_z^0 \int_0^{1-x} f(x,y,z) dy dz dx$$

b) Volume de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x+y+z \leq 1, x+y-z \leq 1\}$ nos ordens $dy dz dx$ e $dz dx dy$

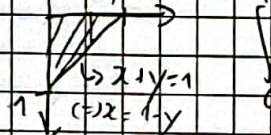
planos

$$x+y+z=1 \Rightarrow z=1-x-y$$

$$x+y-z=1 \Rightarrow z=x+y-1$$



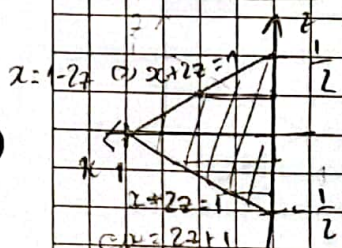
$$dz dx dy$$



$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+y-1}^{1-x-y} 1 dz dx dy$$

$$dy dz dx$$

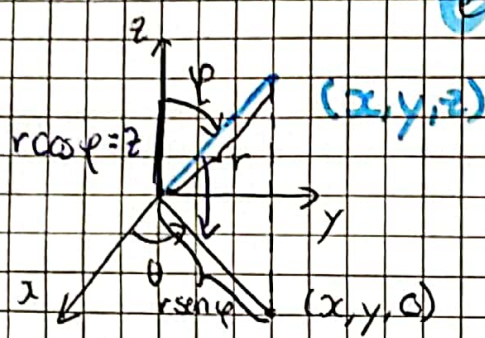
$$\int_{-1/2}^0 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^{1-x-z} 1 dy dz dx + \int_0^{1/2} \int_0^{1-x} \int_{x+z}^{1-x-z} 1 dy dz dx$$



y varia entre $y=0$ e $x+y-z=1 \Rightarrow y=1-x+z$

y varia entre $y=0$ e $x+y+z=1 \Rightarrow y=1-x-z$

coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^3$



(r, θ, φ)

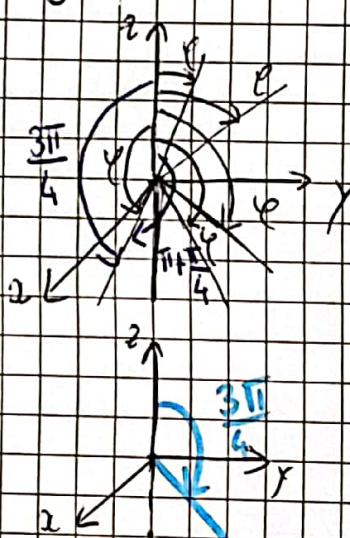
r - distância à origem

θ - ângulo das coordenadas polares da projeção

φ - ângulo com o semi-eixo positivo dos z

$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$

$$g:]0, +\infty[\times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$



Se fosse $\varphi = \pi + \frac{\pi}{4}$ poderíamos analisar

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\in [0, \pi] \\ \cos \varphi &\in [1, -1] \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4} \quad z = r \cos \frac{3\pi}{4}$$

Jacobiano

$$Jg = \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos \varphi \begin{vmatrix} -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \sin \theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos \varphi (-r^2 \sin \varphi \cos \varphi) - r \sin \varphi (r \sin^2 \varphi) = -r^2 \sin \varphi$$

O jacobiano é o módulo do determinante: $Jg = r^2 \sin \varphi$

ex:

Volume de uma esfera em S de raio R

$$\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Vol} = \iiint_S 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \underbrace{1 \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \right|}_{\text{jacobiano}} \, dr \, d\theta \, d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_{r=0}^{r=R} \, d\theta \, d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{R^3 \sin \theta}{3} \right) \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R^3 \cos \theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \, d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{2R^3}{3} \, d\phi =$$

$$\frac{4\pi R^3}{3}$$

Integrais Paramétricas

ex:

$$\varphi(t) = \int_0^1 t \cos(x+t) \, dx$$

$$f(x,t) = t \cos(x+t)$$

$$K=[0,1] \quad U=\mathbb{R}$$

$$f: \underset{x}{K} \times \underset{t}{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

K - compacto U - aberto

$$\varphi(t) = \int_I f(x,t) \, dx$$

Em geral, $x = (x_1, \dots, x_n)$
 $t = (t_1, \dots, t_m)$

Regra de Leibnitz

Se $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ existir e for contínua, então $\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}$ existe e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i} = \int_K \frac{\partial f}{\partial t_i} \, dx$$

ex:

$$\varphi(t) = \int_0^1 t \cos(x+t) \, dx \quad f(x,t) = t \cos(x+t)$$

como $\frac{\partial f}{\partial t} = \cos(x+t) - t \sin(x+t)$ é contínua, a regra de

Leibnitz diz que $\varphi'(t)$ existe e $\varphi'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} \, dx =$
 $= \int_0^1 (\cos(x+t) - t \sin(x+t)) \, dx = \sin(x+t) + t \cos(x+t) \Big|_{x=0}^{x=1} =$
 $= \sin(1+t) + t \cos(1+t) - \sin(t) - t \cos(t)$

ex:

Se fosse $f(x, t_1, t_2) = t_1 \cos(x + t_2)$

$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \cos(x + t_2)$ é contínua $\frac{\partial f}{\partial t_2} = -t_1 \sin(x + t_2)$ é contínua

$\Rightarrow$ existem $\frac{\partial f}{\partial t_1}$ e $\frac{\partial f}{\partial t_2}$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t_1} dx = \int_0^1 (\cos(x + t_2)) dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t_2} dx = \int_0^1 (-t_1 \sin(x + t_2)) dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = F_1 \longrightarrow \varphi(t_1, t_2) = \int F_1 dt_1 + c_1(t_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = F_2 \longrightarrow \varphi(t_1, t_2) = \int F_2 dt_2 + c_2(t_1)$$

ex:

$$\varphi(t) = \int_0^t t \cos(x + t) dx \quad \varphi'(t) = ?$$

Se fosse $\int_0^t \cos x dx$ a derivada era $\cos t$ (T. fundamental cálculo)

Podemos considerar $\varphi(u, v) = \int_0^v u \cos(x + v) dx$

$$\varphi(t) = \varphi(t, t)$$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t, t) \cdot 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(t, t) \cdot 1 =$$

T. fund. cálculo Regra de Leibnitz

$$= v \cos(u + v) \Big|_{(t, t)} + \int_0^t (\cos(x + v) - v \sin(x + v)) dx \Big|_{(t, t)} =$$

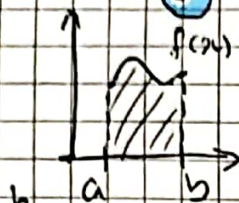
$$= t \cos(2t) + \int_0^t (\cos(x + t) - t \sin(x + t)) dx$$

Se fosse $\int_1^{t^2} \cos x dx$

T. fund. cálculo,

$$\left[\int_{a(t)}^{b(t)} \cos x dx \right] = \cos(b(t)) \frac{d(b(t))}{dt} - \cos(a(t)) \frac{d(a(t))}{dt}$$

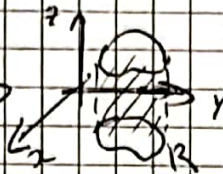
Integral de linha



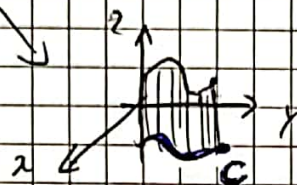
$\int_a^b f(x) dx$
- área abaixo do gráfico

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$

$U \subset \mathbb{R}^n$ aberto



$\iint_R f(x, y) dx dy$ - volume abaixo do gráfico

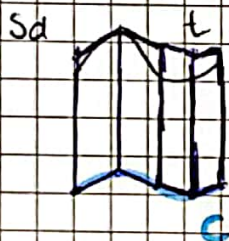


$\int_c^d f dg$ - área abaixo do gráfico

c - curva regular contida em U com parametrização $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Definimos o integral de linha

$$\int_c f dg = \int_a^b \underbrace{f(g(t))}_{\text{altura}} \cdot \underbrace{\|g'(t)\|}_{\text{limite das comprimentos dos intervalos}} dt \quad (\text{se o integral existir})$$



Comprimento

$$\text{comp}(c) = \int_c 1 dg$$

ex:

Circunferência de raio R

parametrização:

$$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(t) = (R \cos t, R \sin t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \|g'(t)\| dt$$

$$g'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$

$$\|g'(t)\| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

$$= \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

Integrais de linha de campos escalares

C - curva regular em $\mathbb{R}^n$ com parametrização $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (regular se $g'(t) \in C([a, b])$ e $g'(t) \neq 0$)

$f: C \rightarrow \mathbb{R}$ integrável

$$\int_C f dg = \int_a^b f(g(t)) \|g'(t)\| dt$$

Comprimento

$$\text{comp}(C) = \int_C 1 dg$$

massa de um fio C

$$m(C) = \int_C \sigma dg$$

σ - densidade de massa do fio

centro de massa do fio C

$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

$$\bar{x}_i = \frac{\int_C x_i \sigma dg}{m(C)} = \frac{\int_C x_i \sigma dg}{\int_C \sigma dg}$$

centróide do fio C

centro de massa se σ for constante

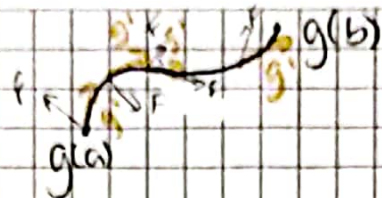
Integrais de linha de campos vectoriais

C - curva regular em $\mathbb{R}^n$ com parametrização $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$F: C \rightarrow \mathbb{R}^n$ integrável

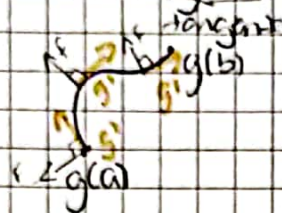
$$\int_C F dg = \int_a^b \underbrace{F(g(t))}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{g'(t)}_{\in \mathbb{R}^n} dt$$

$\int_C F dg$ representa o trabalho de um campo de forças F ao longo de C .



$g'(t)$ é tangente à curva em cada $g(t)$

Se $F \perp g'(t)$ em cada ponto, o integral é nulo



(o trabalho de F perpendicular ao movimento é zero porque F não contribui para o movimento)

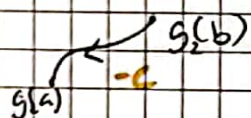
Se F tiver a direção e o sentido de $g'(t)$ $\forall t$, então $F \cdot g'(t)$ é máximo e o trabalho é máximo.

Para $\int F \cdot dg$ interessa o sentido em que se percorre a curva

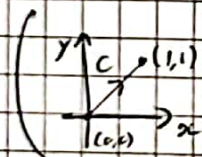


$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Se percorrermos a mesma curva no sentido contrário,



$$g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$



$$g(t) = (t, t) \quad t \in [0, 1]$$

$$\text{para } -C: g_2(t) = (1-t, 1-t) \quad t \in [0, 1]$$

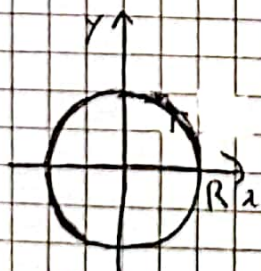
$$\int_{-C} F \cdot dg = - \int_C F \cdot dg$$

ex:

$$F(x, y) = (-y, x)$$

$$\int_C F \cdot dg$$

C = circunferência raio R e centro na origem no sentido direto (contrário às ponteiros do relógio)



$$g(t) = (R \cos t, R \sin t)$$

$$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$

contínua e não nula $\Rightarrow C$ é regular

F é contínua, logo integrável

$\Rightarrow \int_C F \cdot dg$ existe

$$\int_C F dg = \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_0^{2\pi} F(R \cos t, R \sin t) (-R \sin t, R \cos t) dt =$$

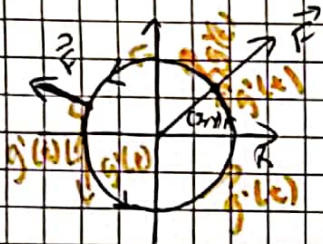
$$= \int_0^{2\pi} (-R \sin t, R \cos t) (-R \sin t, R \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2$$

ex:

A mesma curva e $F(x, y) = (x, y)$

$$\int_C F dg = \dots = \int_0^{2\pi} (R \cos t, R \sin t) (-R \sin t, R \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

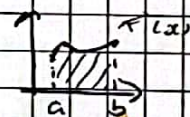


$$F(x, y) = (x, y)$$

Em certos casos, podemos calcular $\int_C F dg$ sem parametrizações

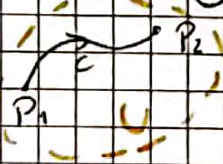
Regra de Barrow

$$\int_a^b F(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{se } F' \text{ é contínua})$$



Teorema Fundamental do Cálculo (para integrais de linha)

γ - curva regular em $U \subset \mathbb{R}^n$ entre P_1 e P_2



φ de classe C^1 em $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto

Então,

$$\int_C (\nabla \varphi) dg = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$$

porque:

$$\int_C (\nabla \varphi) dg = \int_a^b (\nabla \varphi)(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [\varphi(g(t))] dt$$

Regra da cadeia

pela regra de Barrow,

$$= \varphi(g(b)) - \varphi(g(a)) = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$$



by Staples

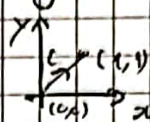
ex:

$$\varphi = x^2 + 2y^2$$

$$\nabla \varphi = (2x, 4y)$$

$$\int_C (2x, 4y) \cdot dg = 2$$

C = segmento entre (0,0) e (1,1) de modo



$$\alpha = \int \nabla(x^2 + 2y^2) dg =$$

$$= x^2 + 2y^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 3 - 0 = 3$$

ex:

$$F(x, y) = (x, y)$$

Se $F = \nabla \varphi$ para algum φ , o cálculo é mais direto

$$(x, y) \stackrel{?}{=} \nabla \varphi$$

Temos de resolver

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x \rightarrow \varphi(x, y) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y$$

(são todas as soluções possíveis)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y$$

Substituindo na 2ª eq.:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x^2}{2} + C_1(y) \right] = y \quad C_1'(y) = y \quad \Rightarrow C_1(y) = \int y dy = \frac{y^2}{2} + C_2 \quad \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + C_1(y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C_2 \quad \forall C_2 \in \mathbb{R}$$

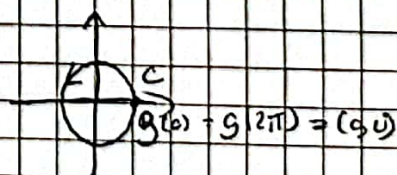
ou:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = \int y dy = \frac{y^2}{2} + C_2(x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \int_C (x, y) \cdot dg = \varphi(0, 0) - \varphi(0, 0) = 0$$



Para curvas fechadas, $\int_C (\nabla \varphi) \cdot dg = 0$

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

Dado F , se existir φ tal que $F = \nabla \varphi$, F diz-se um campo conservativo e φ é o seu potencial escalar.

Dado F , queremos critérios para ver se F é conservativo.

ex:

$$F(x, y) = (-y, x)$$

$$\oint_C F \cdot dg = 2\pi \neq 0$$

para a
circunt. anterior



$\Rightarrow F$ não é conservativo

$$F \text{ conservativo} \Rightarrow \oint_C F \cdot dg = 0$$

para qualquer
curva fechada

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial P}{\partial y} = x \end{cases}$$

$(-y, x) \neq \nabla P$ para qualquer P

o sistema é impossível

Da 1ª eq: $P = \int -y dx = -yx + c_1(y)$

Subst. na 2ª eq: $\frac{\partial}{\partial y} [-yx + c_1(y)] = x$

$$-x + c_1'(y) = x \Rightarrow c_1'(y) = 2x \text{ impossível } \times$$

Da 2ª maneira:

primitivas a 2ª eq. em ordem a y

$$P = \int x dy = xy + c_2(x)$$

$$P(x, y) = -yx + c_1(y)$$

$$P(x, y) = xy + c_2(x) = -yx + \underline{2xy + c_2(x)}$$

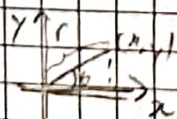
É impossível arranjar $c_1(y)$ e $c_2(x)$

Problemas

06/06/2023

5) Escreva $\iint_S f(x, y) dx dy$ em coordenadas polares, onde

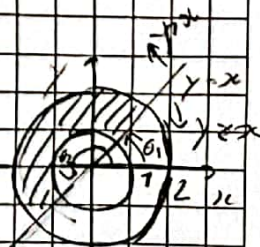
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y > x\}$$



coordenadas polares (r, θ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

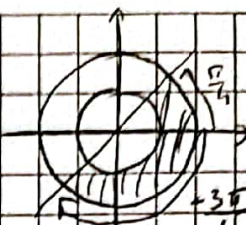
$$\theta \in [0, 2\pi]$$



$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \underbrace{r}_{\text{jacobiano da transformação}} dr d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

se fosse com $y < 0$ $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

$$\iint f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr + \int_1^2 \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$



$\theta \in [0, 2\pi]$

av: $\int_1^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$ para isto, usamos coordenadas polares a 1/4 de

com por exemplo $\theta \in [-\pi, \pi]$

θ km de estar num intervalo de comprimento 2π

(c) Use coordenadas cilíndricas ou esféricas para exprimir o volume de cada região.

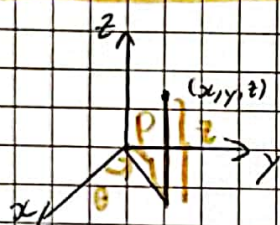
a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < \sqrt{2-x^2-y^2}\}$

origem $z=0$ e por isso tememos cilindricas

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$

sup. esférica mais simples coord. esféricas

coordenadas cilíndricas

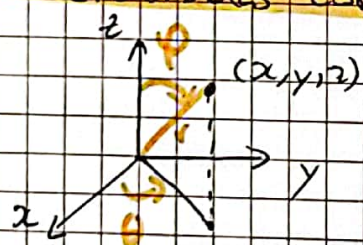


(ρ, θ, z)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{jacobiano: } \rho$$

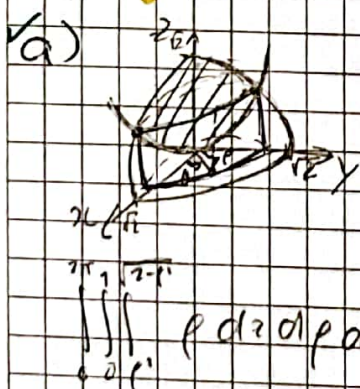
úteis para simétricas em relação a eixos

coordenadas esféricas



(r, θ, ϕ)

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \quad \text{jacobiano: } r^2 \sin \phi$$



paraboloide

$z = 2 - y^2$

em coordenadas cilíndricas:

$z = \sqrt{2-x^2-y^2}$

$z = \rho^2$

sup. esférica $z = \sqrt{2-\rho^2}$

$\rho^2 < z < \sqrt{2-\rho^2}$

$x^2 + y^2 + z^2 = 2$

sup. esférica de raio $\sqrt{2}$

e centro $(0,0,0)$

A interseção das superfícies é dada por

$z = \rho^2$

$z = \sqrt{2-\rho^2}$

$\rho^2 = \sqrt{2-\rho^2}$

$u = \rho^2$

$u = \sqrt{2-u} \Rightarrow u^2 = 2-u \Rightarrow u^2 + u - 2 = 0$

$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1 \text{ ou } -2$

$\Rightarrow u = \rho^2 = 1$

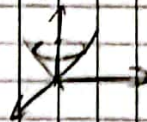
$\Rightarrow \rho = 1$

$$b) 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{2}$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

sup. cônica



em coordenadas esféricas: (r, θ, φ)

$$r \in [1, \sqrt{2}]$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

FICHA 9

1) 1) Del. o comprimento da curva dada por $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$g(t) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{2}} t^2, \frac{1}{3} t^3 \right)$$

$$\text{comp}(c) = \int_c 1 \, dg = \int_0^1 \|g'(t)\| \, dt = *$$

$$g'(t) = \left(1, \frac{2t}{\sqrt{2}}, \frac{t^2}{3} \right) = \left(1, \sqrt{2}t, \frac{t^2}{3} \right)$$

$$\|g'(t)\| = \sqrt{1 + 2t^2 + \frac{t^4}{9}} = \sqrt{(t^2 + 1)^2} = t^2 + 1$$

$$* = \int_0^1 (t^2 + 1) \, dt = \frac{t^3}{3} + t \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

2) massa:

$$m(c) = \int_c \sigma \, ds$$

σ - densidade de massa

Integrais de linha de campos vetoriais

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{g} = \int_a^b \vec{F}(g(t)) \cdot g'(t) \, dt$$

• Se $\vec{F} = \nabla \varphi$, $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{g} = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$

Se $\vec{F} = \nabla \varphi$, $\vec{F}$ é conservativo e φ é um potencial escalar

• Dado $\vec{F}$ vetorial, vai haver critérios para decidir se $\vec{F}$ é conservativo ou não.

Condições Necessárias

F conservativo $\Rightarrow$?

Se F é conservativo,

$$\int_C F \cdot dg = 0 \text{ para qualquer curva fechada.}$$

Se F é conservativo e de classe C^1 , $F = \nabla \varphi$

$$(F_1, \dots, F_n) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

$\Rightarrow$ porque $\varphi \in C^2$

Se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j \rightarrow F$ é **fechado**
(derivadas cruzadas iguais)

Condições Necessárias

Dado F de classe C^1

F conservativo $\Rightarrow F$ fechado

ex:

$$F(x, y) = (-y, x)$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Vimos que F não é conservativo porque $\int_C F \cdot dg = 2\pi$
para uma circunf. raio 1 e centro origem

Com o novo critério:

$$\begin{cases} F_1 = -y \\ F_2 = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ não é conservativo

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x \end{cases}$$

é impossível

Ex:

$$F(x, y) = (y, x)$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} F_1 = y \\ F_2 = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 \end{cases} =$$

$\Rightarrow F$ é fechado

$\Rightarrow F$ pode ou não ser conservativo

Podemos tentar resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1 = y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2 = x \end{cases}$$

Da 1ª eq.:

$$\varphi = \int y \, dx = xy + c_1(y)$$

Substitui na 2ª eq.:

$$\frac{\partial}{\partial y} [xy + c_1(y)] = x \quad \text{e} \quad x + c_1'(y) = x \Rightarrow c_1'(y) = 0$$

$\Rightarrow c_1(y) = C$

$$\varphi = xy + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \Rightarrow F \text{ é conservativo}$$

Ex:

$$F(x, y) = (2x, y)$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$O = (F_1(x), F_2(y))$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \end{cases} =$$

$\Rightarrow F$ é fechado

$$\varphi = \int f_1(x) \, dx + \int f_2(y) \, dy + C$$

e descobrimos $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$

Ex:

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Será fechado?

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$\Rightarrow F$ é fechado

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

Será conservativo?

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2 = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Da 1ª eq.:

$$\varphi = \int \frac{x}{x^2 + y^2} \, dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c_1(y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + c_1(y)$$

válida para $(x, y) \neq (0, 0)$

Subst. na 2ª eq.:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c_1(y) \right] = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} + c_1'(y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow c_1'(y) = 0 \Leftrightarrow c_1(y) = C$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad \text{F é conservativo no seu domínio } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

ex:

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

É fechado?

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{-y}{x^2 + y^2} \right] = \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] = \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

iguais $\Rightarrow F$ é fechado

$\Rightarrow F$ pode ou não ser conservativo

Se $\int_C F \cdot dg \neq 0$ para alguma curva fechada, F não é conservativo
 C - circunferência raio 1, centro na origem

$$g(t) = (\cos t, \sin t) \quad g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\int_C F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow F$ não é conservativo no seu domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

É impossível de resolver no conj. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Da 1ª eq.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow \varphi = \int \frac{-\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dx = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c_1(y)$$

Subst. na 2ª eq.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c_1(y) \right] = \frac{x}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} + c_1'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow c_1'(y) = 0 \Leftrightarrow c_1(y) = C$$

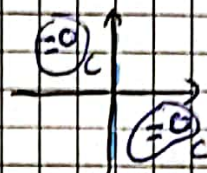
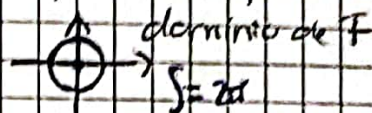
$$g_1(x)(y) \geq 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ são potências para } F$$

desde que $x \neq 0$

F é conservativo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$

(Se $F \in C^1$)



domínio onde F é conservativo

> Condições necessárias <

F conservativo $\Rightarrow F$ é fechado

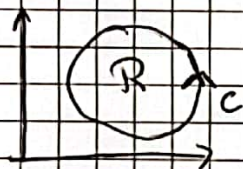
> Condições suficientes <

F fechado

+
o domínio de F
tem de ser
de uma certa
forma

$\Rightarrow F$ é conservativo

Teorema de Green



R - região regular com fronteira

C - curva fechada, simples, seccionalmente regular
contornada uma vez no sentido direto

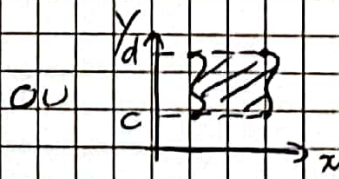
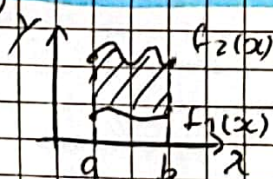
$F = (P, Q)$ de classe C^1 em R

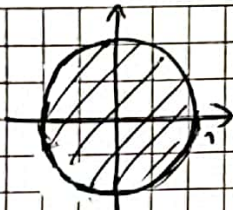
Então

$$\oint_C F \cdot dg = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Região regular - união finita de regiões elementares

Região elementar:



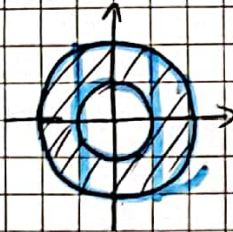


É elementar porque $x \in [-1, 1]$

$$\frac{-\sqrt{1-x^2}}{f_1} \leq y \leq \frac{\sqrt{1-x^2}}{f_2}$$

ou: $y \in [-1, 1]$ $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow$ a região é regular



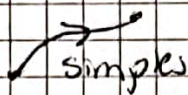
É regular
Não é elementar

(união de 4 elementos)

Curva: com parametrização $g[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

fechada - $g(a) = g(b)$

simples - g é injetiva em $]a, b[$ (não se cruza)



simples

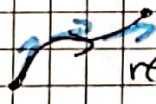


simples



não simples

regular - se g é de classe C^1 (em $]a, b[$)
(não forma vértices)



regular



não regular

(não há tangente)

seccionalmente regular:

pode ter um nº finito de vértices

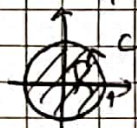


não regular
secc. regular

ex:

$$\int_C (-x^3, y^3) dg$$

C - circunf. raio 1 centro na origem
1 vez no sentido direto



R é regular

C fechada, simples, regular

γ - classe C^1 em R

$$= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R \left(\frac{\partial y^3}{\partial x} - \frac{\partial (-x^3)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R 0 dx dy = 0$$

Se F fechado

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (P, Q)$$

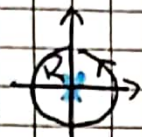
$x \quad y$

$$\Rightarrow \oint_C F \cdot dg = \iint_R 0 \, dx \, dy = 0$$

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

ϵ' fechado

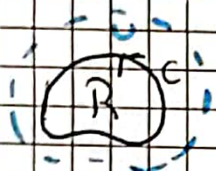
$$\oint_C F \cdot dg = 2\pi i$$



Não podemos usar o T. Green porque F não é C^1 na R

Teorema de Green

16/06/2023



C - curva fechada, simples e seccionalmente regular percorrida no sentido direto englobando R - região regular

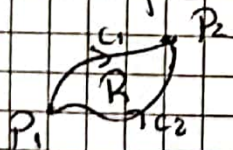
$F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1

$$F = (P, Q)$$

Então:

$$\oint_C F \cdot dg = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy$$

F - campo fechado de classe C^1



Aplicamos o Teorema de Green à curva $C = C_2 \cup C_1$

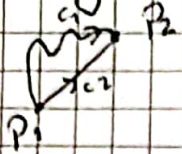
Obtemos:

$$\oint_C F \cdot dg = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy \quad \text{porque } F \text{ é fechado}$$

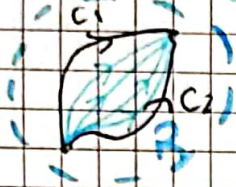
$$\Rightarrow \int_{C_1} F \cdot dg - \int_{C_2} F \cdot dg = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} F \cdot dg = \int_{C_2} F \cdot dg$$

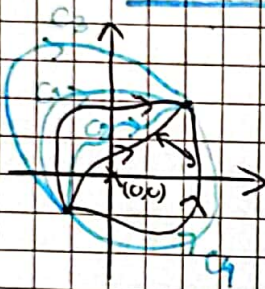
Para campos fechados, se F for C^1 entre duas curvas, as integrais são iguais



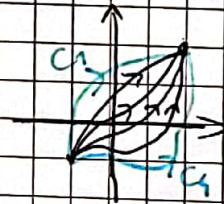
C_1 e C_2 curvas homotópicas numa região R podem ser deformadas uma na outra continuamente sem sair da região R



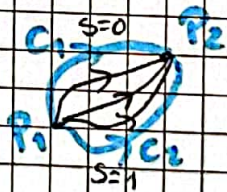
Se for $R = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



C_1 é homotópica a C_2
 C_1 é homotópica a C_3
 C_1 não é homotópica a C_3 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 mas C_1 é homotópica a C_3 em $\mathbb{R}^2$



C_1 com parametrização $g_1: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 C_2 com parametrização $g_2: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 São curvas homotópicas se existir $F: [a,b] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (homotopia) contínua tal que
 $F(a,s) = P_1 \quad \forall s$
 $F(b,s) = P_2 \quad \forall s$
 $F(t,0) = g_1(t) \quad \forall t$
 $F(t,1) = g_2(t) \quad \forall t$



Se F é um campo fechado e C_1 e C_2 são curvas homotópicas no domínio de F , então

$$\int_{C_1} F \cdot dg = \int_{C_2} F \cdot dg$$

Se as curvas estiverem em $\mathbb{R}^n$, também se pode definir homotopia $F: [a,b] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Se C_1 e C_2 forem fechadas, (no mesmo sentido)



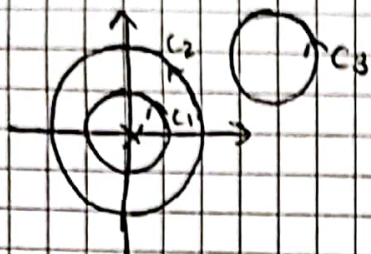
são homotópicas se existir $F: [a,b] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que
 $F(t,0) = g_1(t)$
 $F(t,1) = g_2(t)$

ex:

Em $\mathbb{R}^2$ todas as curvas fechadas são homotópicas

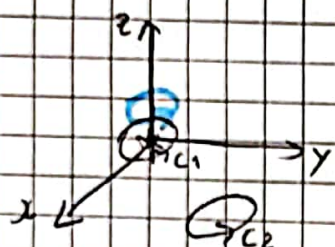


Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



C_1 é homotópica a C_2) em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 C_1 não é homotópica a C_3 (porque teríamos que passar pelo origem)

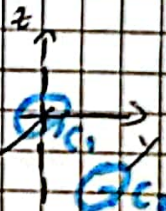
Em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$



C_1 é homotópica a C_2

Em $\mathbb{R}^3 \setminus \text{eixo dos } z$

C_1 não é homotópica a C_2



S é um conjunto simplesmente conexo se qualquer curva fechada em S for homotópica a um ponto do conjunto.

ex:

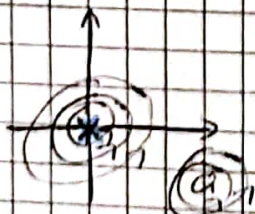
$\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo



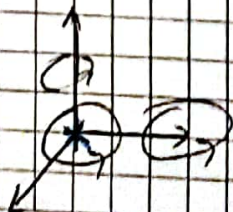
$\mathbb{R}^1$ é simplesmente conexo

ex:

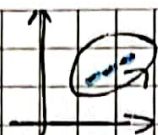
$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ não é simplesmente conexo



$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ é simplesmente conexo

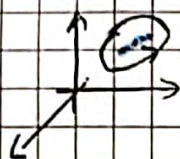


$\mathbb{R}^2 \setminus \text{segm. reta}$

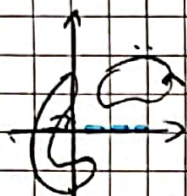


não simpl. conexo

$\mathbb{R}^3 \setminus \text{segm. reta}$ é simplesmente conexo



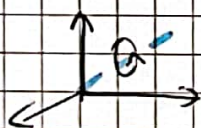
$\mathbb{R}^2 \setminus \text{semi-reta}$ é simplesmente conexo



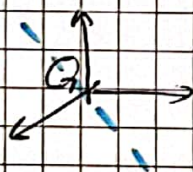
$\mathbb{R}^2 \setminus \text{reta}$ é simplesmente conexo



$\mathbb{R}^3 \setminus \text{semi-reta}$ é simplesmente conexo



$\mathbb{R}^3 \setminus \text{reta}$ não é simplesmente conexo



F de classe C^1

condições necessárias para ser conservativo

F conservativo $\Rightarrow F$ fechado

[F conservativo $\Rightarrow \oint_C F \cdot dg = 0$ para qualquer curva fechada]

condições suficientes para ser conservativo

F fechado + o domínio de F é
|| simples conexo
 $\Rightarrow F$ conservativo

ex:

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

F é fechado (feivisto)

Domínio de F é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ não é simplesmente conexo

$\Rightarrow$ não podemos concluir se F é conservativo



Se C_1 for uma elipse em torno da origem, é homotópica a uma circunferência em torno da origem (por exemplo com raio 1)

$$\Rightarrow \oint_{C_1} F \cdot dg = \oint_{C_2} F \cdot dg = 2\pi$$

elipse circunf.

Como o domínio não é simplesmente conexo, não podemos concluir se F é conservativo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (com as condições suficientes)

Mas F vai ser conservativo em alguns domínios mais pequenos por exemplo $\mathbb{R}^2 \setminus \text{eixo das } x$ é simplesmente conexo



F restrito a $\{x \neq 0\}$ já é conservativo

$\Rightarrow$ nesse conjunto já conseguimos resolver

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\frac{x}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} \end{aligned} \right\} \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

São soluções

Problemas

16/06/2023

2) $F = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, z^2 \right)$

a) Calcule trabalho de F ao longo de $\{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$

Quero potencial, ou seja, quero $\varphi: \nabla \varphi = F$

$$\varphi = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2+1) + z^2$$

Caso o campo F seja conservativo temos que

$$\int F \cdot dg = \int \nabla \varphi \cdot dg = \varphi(g(b)) - \varphi(g(a))$$

teorema da integral de linha

$$\int_C F \cdot dg = \varphi(g(2\pi)) - \varphi(g(0)) = \varphi(1, 1, 2\pi) - \varphi(1, 1, 0) = 0$$

repare-se que se C for fechada então $\int_C F \cdot dg = 0$

$$\nabla \varphi = F = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = (F_1, F_2, F_3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{1+x^2+y^2} \rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \log(1+x^2+y^2) + h(y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{1+x^2+y^2} \rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \log(1+x^2+y^2) + h_2(y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z \Rightarrow \varphi = z^2 + h_1(x, y)$$

F é fechada se $\mathcal{D}F = \mathcal{D}F^T$ em $\mathbb{R}^3 = F(F_1, F_2)$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

$$\oint_C F \cdot dg = \int_C (F(g(t)) \cdot g'(t)) dt$$

b) a curva de interseção $x^2 + z^2 = 1, x = y^2 - z^2$

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ z &= \sin \theta \end{aligned} \rightarrow x - y^2 - z^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$$

$$g_2(\theta) = (\cos(2\theta), \cos \theta, \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_C F \cdot dg = \varphi(g_2(2\pi)) - \varphi(g_2(0)) = \varphi(1, 1, 0) - \varphi(1, 1, 0) = 0$$

caminho é fechado e é conservativo

④

a) $F(x, y, z) = \left(\frac{3z}{x^2+z^2} + \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, -\frac{3x}{x^2+z^2} \right)$

$C: x^2 + z^2 = 1, y = 4$
 $g(\cos \theta, 4, \sin \theta)$

$$\int_C F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(\theta)) \cdot g'(\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(3 \sin \theta + \frac{2 \cos \theta}{\cos^2 \theta + 16}, \frac{8}{\cos^2 \theta + 16}, -3 \cos \theta \right) \cdot (\sin \theta, 0, \cos \theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-3 \sin^2 \theta - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + 16} - 3 \cos^2 \theta \right) d\theta = \int_0^{2\pi} -3 d\theta + \left[\log(\cos^2 \theta + 16) \right]_0^{2\pi} =$$

$$-6\pi \neq 0$$

não vai ser conservativo
 (é impossível provar que é conservativo
 Assim, era preciso testar todas
 as curvas e que é impossível)

Green $\rightarrow F = (P, Q)$

num domínio fechado, A , em ∂A é caminho fechado

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial A} F \cdot dg$$

N posso usar T. Green
em domínios π limitados

FICHA 11

② Use Green para calcular a área de $\{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\} = A$

$$\iint_A 1 \, dx \, dy$$

$$\oint_{\partial A} F \cdot dg$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \rightarrow F = (0, x)$$



reta $\rightarrow g_1(\theta) = (0, t), t \in [-1, 1]$
arco $\rightarrow g_2(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{\partial A} F \cdot dg = \int_{C_1} F \cdot dg_1 + \int_{C_2} F \cdot dg_2 = \int_{-1}^1 F(g_1(t)) \cdot g_1'(t) \, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(g_2(\theta)) \cdot g_2'(\theta) \, d\theta$$

$\partial A = C_1 \cup C_2$
reta elipse

$$= \int_{-1}^1 (0, t) \cdot (0, 1) \, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (0, \cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) \, d\theta$$

$$= \int_{-1}^1 t \, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = \pi \rightarrow \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta)}{2} = \frac{1 - 1 + \cos^2 \theta + \cos^2 \theta}{2} = \frac{2 \cos^2 \theta}{2} = \cos^2 \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \cos(2\theta) + \sin^2 \theta = \cos(2\theta) + (1 - \cos^2 \theta) \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 \theta = \cos 2\theta + 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$$

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TAGUSPARK: LEE/LETI/LEGI
16 DE MAIO DE 2023 - 18:15 HORAS
SEGUNDO TESTE - DURAÇÃO: 45M
NOTA: JUSTIFIQUE TODOS OS CÁLCULOS.

(1) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 12xy + 6x^3 - 2y^2 - 54x & \text{se } (x, y) \neq (1, 3), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 3). \end{cases}$$

- (a) Determine, caso existam, os extremos locais e globais de f .
- (b) Justifique que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) \leq \alpha$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $2 \leq x \leq 3$ e $2 \leq y \leq 4$.
- (2) Determine os extremos globais da restrição $g|_S$, onde $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g(x, y, z) = x + y - z$ e S é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge z = 2\}$.
- (3) Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = (e^x \cos y - e^y, e^x \sin y + e^y)$.
- (a) Justifique que h é injectiva numa vizinhança de $(0, 0)$.
- (b) Sendo $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y, u, v) = (u, v) - h(x, y)$, determine os pontos $(x, u) \in \mathbb{R}^2$ para os quais a equação $F(x, y, u, v) = (0, 0)$ define (y, v) como função de (x, u) numa vizinhança de $(x, 0, u, 1)$.
- (c) Pela alínea anterior, $F(x, y, u, v) = (0, 0) \Leftrightarrow (y, v) = (a(x, u), b(x, u))$ numa vizinhança de $(0, 0, 0, 1)$ para certas funções a e b . Calcule $\frac{\partial b}{\partial x}(0, 1)$.