

Rui Miguel Saramago, gabinete 2. N.º 16  
rui.miguel.saramago@tecnico.ulisboa.pt

## AVALIAÇÃO

3 MAP45 ou Exame Final

1º MAP: 10 de outubro <sup>(cap. 1 e 2)</sup>  
2º MAP: 29 de novembro  
3º MAP: 3 de janeiro } sem nota mínima

Exame: 17 de janeiro (pode repescar-se um dos MAP)

## materia

- Equações diferenciais ordinárias (sem derivadas parciais)
- Superfícies e Integrais de Superfície
- Equações diferenciais parciais

Vídeos no EDUCAST na secção "Aulas de Recuperação"

# Equações Diferenciais Ordinárias

- Incógnitas são funções  $y(t)$
- Nas equações aparecem derivadas da função incógnita

$$\frac{dy}{dt} + \sin(t+y) = 0 \quad \text{ordem 1}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \ln y = 0 \quad \text{ordem 1}$$

nunca vai haver solução única da eq.

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + t \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad \text{ordem 3}$$

Ordem da equação: ordem da maior derivada que aparecer

ex:

$$\frac{dy}{dt} = t \rightarrow y(t) = ?$$

$$\Rightarrow y = \frac{t^2}{2} + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

solução geral - com constante  
(todas as soluções possíveis)

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \Rightarrow y = \int f(t) dt + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad \text{se } f \text{ for primitivável}$$



$$\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow y = \int y(t) dt \quad \times$$

$$y(t) = e^t + C \neq \frac{dy}{dt} = e^t$$

solução geral:

$$y(t) = ce^t \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

## Equações 1ª ordem lineares

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

$$y \mapsto y_1 + y_2$$

$$y \mapsto ay$$

$$b(t) = 0 \rightarrow \text{homogênea}$$

$$b(t) \neq 0 \rightarrow \text{não-homogênea}$$

ex:

$$\frac{dy}{dt} = y$$

(para  $y \neq 0$ )

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} - y = 0 \quad \text{linear homogênea com } a(t) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 1$$

$$\frac{d}{dt} [\ln |y|] = 1$$

$$\Rightarrow \ln |y| = \int 1 dt + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$\ln |y| = t + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

solução geral da equação na forma implícita

$$\Rightarrow |y| = e^{t+C} = ke^t \quad \forall k \in \mathbb{R}^+ \quad (k = e^C)$$

$$\Rightarrow y = ke^t \quad \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$y=0$  também é solução (por inspeção direta)

Solução geral na forma explícita

$$y(t) = ke^t \quad \forall k \in \mathbb{R}$$



# Equação linear homogênea genérica

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -a(t)y$$

Se  $y \neq 0$ ,

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = -a(t)$$

$$\frac{d}{dt} [\ln |y|] = -a(t)$$

$$\ln |y| = -\int a(t)dt + c \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \text{solução geral na forma implícita}$$

$$\Rightarrow |y| = e^{-\int a(t)dt + c} = Ke^{-\int a(t)dt} \quad K \in \mathbb{R}^+$$

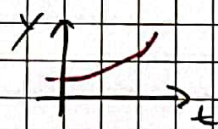
Solução geral na forma explícita

$$y(t) = Ke^{-\int a(t)dt} \quad K \in \mathbb{R}$$

Se  $y$  for população,

$$\frac{dy}{dt} = y \rightarrow y(t) = Ke^t \quad K \in \mathbb{R} \quad \text{crescimento exponencial} \quad \text{Domínio: } t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \rightarrow y(t) = ce^{\alpha t}$$



$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2 \quad \text{quase mais indivíduos mais interação}$$

não é linear ainda não conseguimos resolver



# Equações lineares não-homogêneas

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = 3t \quad (t \neq 0)$$

quase a derivada de um produto

Se multiplicarmos a equação por  $t$ : para aparecer a derivada do

$$t \frac{dy}{dt} + 1 \cdot y = 3t^2$$

$$\frac{d}{dt} [ty] = 3t^2$$

produto mas não esquecer de multiplicar a direita



$$t y' = \int 3t^2 dt + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$t y = t^3 + c$$

$$y = t^2 + \frac{c}{t} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \text{sol. geral final}$$

para  $c=0$ ,  $y(t) = t^2$  é solut. ex.

Domínio de definição da solução:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mu(t) = t$  fator integrante

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

$$\underbrace{\mu(t)}_{\substack{\downarrow \\ \text{v'}}} \frac{dy}{dt} + \underbrace{\mu(t)a(t)}_{\substack{\downarrow \\ \text{v'}}} y = \mu(t)b(t) \quad (*)$$

○ fator integrante  $\mu(t)$  tem de satisfazer:

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)a(t)$$

$$\frac{d\mu}{dt} - a(t)\mu = 0 \quad \text{linear homogênea}$$

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 \rightarrow y(t) = k e^{-\int a(t) dt} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d\mu}{dt} - a(t)\mu = 0 \rightarrow \mu(t) = k e^{\int a(t) dt} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

*eq. homogênea correspondente*

Podemos escolher por exemplo,  $\mu(t) = e^{\int a(t) dt}$

A equação (\*) fica:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y(t)] = \mu(t)b(t)$$

$$\frac{d}{dt} [e^{\int a(t) dt} y(t)] = e^{\int a(t) dt} b(t)$$

$$e^{\int a(t) dt} y(t) = \int e^{\int a(t) dt} b(t) dt + c$$

$$y(t) = \underbrace{e^{-\int a(t) dt}}_{y_p} \int \underbrace{e^{\int a(t) dt} b(t) dt}_{y_p} + \underbrace{c e^{-\int a(t) dt}}_{y_h} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$



Para equações lineares:

há o princípio de sobreposição de soluções

$\uparrow$  solução particular da não-homogênea (sem constantes)

$y = y_p + y_h \rightarrow$  solução geral (com constantes) da equação homogênea correspondente

$\downarrow$  solução geral (com constantes) da não-homogênea

# Equações lineares

14/09/2023

homogêneas:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$$

(fazemos aparecer derivada de um logaritmo)

não-homogêneas:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

(fazemos aparecer a derivada de um produto)

ex:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y^2} \quad (y \neq 0)$$

$$\Rightarrow y^2 \frac{dy}{dt} = t^2$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{y^3}{3} \right] = t^2 \longrightarrow \frac{y^3}{3} = \int t^2 dt + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{y^3}{3} \right] = \frac{d}{dy} \left[ \frac{y^3}{3} \right] \frac{dy}{dt} = y^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} + c \quad \forall c \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{Solução geral na forma implícita}$$

$\rightarrow$  resolver em ordem a  $y$  para passar para a forma explícita

$$y^3 = t^3 + c' \quad \forall c' \in \mathbb{R} \quad c' = 3c$$

$$y = \sqrt[3]{t^3 + c} \longrightarrow \text{Solução geral na forma explícita}$$

Domínio da solução:  $t \in \mathbb{R}$  se não for pedido especificamente não é preciso fazer

$$y^2 \frac{dy}{dt} = t^2 \quad \cancel{y^2 dy = t^2 dt} \quad \int y^2 dy = \int t^2 dt \quad \frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} + c$$

não podemos se separarmos termos mediante a solução fazer este passo



Importante saber

## Equações separáveis

São da forma  $\frac{dy}{dt} = \frac{f(t)}{g(y)}$  ( $\Leftrightarrow g(y) \frac{dy}{dt} = f(t)$ )

Para resolver:

$$\int g(y) dy = \int f(t) dt + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \int g(y) dy \right] = f(t)$$

Ex:

$$(1+e^y) \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\int (1+e^y) dy = \int \cos t dt + C$$

$$y + e^y = \sin t + C \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad \text{Solução geral na forma implícita}$$

Não conseguimos a forma explícita

$$\begin{cases} (1+e^y) \frac{dy}{dt} = \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

problema de  
valor inicial

$$y(0) = 1$$

$$y + e^y = \sin t + C$$

$$t=0 \quad y=1$$

$$1 + e = \sin 0 + C \Rightarrow C = 1 + e$$

$$y + e^y = \sin t + 1 + e \Rightarrow \text{Solução particular na forma implícita}$$

## Equação linear homogênea

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$$

É separável?  $\frac{dy}{dt} = -a(t)y = \frac{-a(t)}{\frac{1}{y}}$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -a(t) dt + C$$

não é preciso saber  
resolver eq. lineares  
homogêneas para as  
resolver basta saber  
resolver eq. separáveis

## Equação linear não-homogênea

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

não separável



$y(t)$  - população no instante  $t$

$$\frac{dy}{dt} = ay \rightarrow y(t) = ke^{at} \quad a > 0$$

$$y(0) = k = y_0 \text{ (população inicial)}$$

$$y(t) = y_0 e^{at} \quad \text{crescimento exponencial}$$

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \quad \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}$$

É separável:

$$\frac{1}{-by^2 + ay} \frac{dy}{dt} = 1$$

multiplicação por  $-b$

$$\frac{1}{y^2 - \frac{a}{b}y} \frac{dy}{dt} = -b$$

$$\int \frac{1}{y(y - \frac{a}{b})} dy = \int -b dt + c$$

$$\int \left( \frac{A}{y} + \frac{B}{y - \frac{a}{b}} \right) dy = -bt + c$$

$$A\left(y - \frac{a}{b}\right) + By = 1$$

$$y = \frac{a}{b} \Rightarrow B \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow B = \frac{b}{a}$$

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{a}{b}A = 1 \Rightarrow A = -\frac{b}{a}$$

$$\int \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y - \frac{a}{b}} \right) dy = t + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\ln \left| \frac{y}{y - \frac{a}{b}} \right| = at + c$$

$$\frac{y}{y - \frac{a}{b}} = ke^{at}$$

$$y = \left( y - \frac{a}{b} \right) ke^{at}$$

$$(1 - ke^{at})y = -\frac{a}{b} ke^{at}$$

$$y = \frac{\frac{a}{b} ke^{at}}{ke^{at} - 1} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

quando  $t \rightarrow +\infty$ , se  $k \neq 0$ ,  $y \rightarrow \frac{a}{b}$

se  $k = 0$ ,  $y \rightarrow 0$



# Equações exatas

Akt agora, conseguimos pôr as equações na forma

$$\frac{d}{dt}[G(y)] = f(t) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\left[G(y) - \int f(t)dt\right] = 0$$

Uma equação  $M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$  é **exata** se puder ser posta na forma

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t, y)] = 0$$

para algum  $\Phi$ .

Regra da cadeia

$$\Phi = t, y = t$$

Quando é que existe  $\Phi$ ?

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}_M + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt}}_N = 0$$

Queremos resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = M \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \end{cases}$$

$\Phi$  é um potencial escalar para  $(M, N)$

Só existe  $\Phi$  se  $(M, N)$  for **conservativo**

- Se  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$  (ou seja, é fechado) e o domínio for um retângulo (ou qualquer conjunto simplesmente conexo) então existe  $\Phi$ .

ex:

$$\underbrace{(3y + e^t)}_M + \underbrace{(3t + \cos y)}_N \frac{dy}{dt} = 0$$

Será exata?

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 3$$

$\Rightarrow$  é um campo fechado  $\Rightarrow$  é cond. necessária e  $\bar{n}$  suficiente  
se fossem  $\neq$  automaticamente não era exata  
termos de ver o retângulo

O domínio de  $(M, N)$  é  $\mathbb{R}^2$  (retângulo)



⇒ a eq. é exata e podemos procurar  $\phi$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} = M = 3y + e^t \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = N = 3t + \cos y \end{array} \right.$$

Da 1ª eq.:  $\phi = \int (3y + e^t) dt = 3yt + e^t + C_1(y)$

Substituir na 2ª eq.:  $\frac{\partial}{\partial y} [3yt + e^t + C_1(y)] = 3t + \cos y$

$$3t + C_1'(y) = 3t + \cos y$$

$$\begin{aligned} C_1'(y) &= \cos y \\ C_1(y) &= \int \cos y dy \\ C_1(y) &= \sin y + C \end{aligned}$$

$$C_1(y) = \sin y + C$$

$$\phi(t, y) = 3yt + e^t + \sin y + C$$

$$\frac{d}{dt} [\phi(t, y)] = 0$$

Solução geral da equação diferencial:

$$\phi = C \quad 3yt + e^t + \sin y = C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

ex:

$$\underbrace{\left( \frac{y^2}{2} + 2ye^t \right)}_M + \underbrace{(y + e^t)}_N \frac{dy}{dt} = 0$$

Como são as  
cruçadas  
 $M dt + N dy = 0$

É exata?

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = y + 2e^t \\ \frac{\partial N}{\partial t} = e^t \end{array} \right.$$

≠ não é exata

Equações redutíveis a exatas

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

Se  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$ , podemos tentar multiplicar toda a equação por

um fator integrante em  $\mu(t, y)$  para a tornar exata



$$M(t,y)M'(t,y) + M(t,y)N(t,y) \frac{dy}{dt} = 0$$

Queremos:

$$\frac{\partial}{\partial y} [MM'] = \frac{\partial}{\partial t} [MN]$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} M + M \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial t} N + M \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\Rightarrow M(t,y) = \dots$$

Podemos por exemplo procurar  $\mu(t)$ .

$$0 + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = M' N + M \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\underbrace{\mu'}_t = \underbrace{\frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial t}}_N \underbrace{\mu}_t \quad \text{equação linear homogênea}$$

não pode ter  $y$

Se for possível resolver,

$$\mu(t) = K e^{\int \frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial t} dt} \quad \forall K \in \mathbb{R}$$

## Problemas

15/09/2023

Lista 1  $\Rightarrow$  Equações de Primeira Ordem

①  
b)  $y' + y \cos t = 0 \Rightarrow y \neq 0$

linear homogênea

$$\frac{y'}{y} = -\cos t$$

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int -\cos t dt$$

$$\log |y(t)| = -\sin(t) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$|y(t)| = e^C e^{-\sin(t)}, C \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \pm C_1 e^{-\sin(t)}, C_1 \in \mathbb{R}^+$$

$$y(t) = K e^{-\sin(t)}, K \in \mathbb{R}$$



6) a)  $y'(t) - y(t) \sin(t) = e^{-\cos(t)}$  linear não-homogênea

$$M(t) y'(t) + y(t) (-\sin(t)) M(t) = M(t) e^{-\cos(t)}$$

$$(My)' = My' + yM'$$

$$M' = -\sin(t) M \Rightarrow M \neq 0$$

$$\frac{M'}{M} = -\sin(t)$$

$$\log|M| = \cos(t) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$|M| = e^C e^{\cos(t)}, C \in \mathbb{R}$$

$$M = \pm C_1 e^{\cos(t)}, C_1 \in \mathbb{R}^*$$

$$M = K e^{\cos(t)}, K \in \mathbb{R}$$

$$e^{\cos(t)} e^{-\cos(t)} = e^0 = K$$

$$e^{\cos(t)} y' + y(-\sin(t)) e^{\cos(t)} = 1$$

$$(e^{\cos(t)} y)' = 1$$

$$\int (e^{\cos(t)} y)' dt = t + C, C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\cos(t)} y = t + C, C \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{-\cos(t)} (t + C), C \in \mathbb{R} \rightarrow \text{sol. geral}$$

$$t \in ]-\infty, +\infty[$$

2) b)  $(\cos y) y' = \frac{-t \sin y}{1+t^2} \Rightarrow \sin y \neq 0$

separável  $y' = \frac{g(t)}{c(y)}$

$$\frac{\cos y y'}{\sin y} = \frac{-t}{1+t^2}$$

$$\frac{(\sin y)'}{\sin y} = \frac{-t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{(\sin y)'}{\sin y} dy = - \int \frac{t}{1+t^2} dt \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} dt$$

$$\Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{1}{2} \log|1+t^2| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |\sin y| = e^{-\frac{1}{2} \log|1+t^2| + C}$$

$$C \in \mathbb{R} \Rightarrow |\sin y| = e^C e^{-\frac{1}{2} \log|1+t^2|}, C \in \mathbb{R}$$

$$\sin y = \pm C_1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, C_1 \in \mathbb{R}^*$$

$$y = \arcsen\left(\pm C_1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right), C_1 \in \mathbb{R}^*$$

$$y = \arcsen\left(K \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right), K \in \mathbb{R}$$

$$y(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arcsen\left(K \frac{1}{\sqrt{1+1^2}}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{K}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{K}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow K = 1$$

$$y(t) = \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$



$$-1 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1$$

$$t \in ]-\infty, +\infty[$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} \quad y \sinh(ty) + \sinh y + t(\sinh(ty) + \cosh y) \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{eq exacte}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sinh(ty) + y t \cosh(ty) + \cosh y$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sinh(ty) + \cosh y + t y \cosh(ty)$$

$$M = \frac{\partial \phi}{\partial t} = y \sinh(ty) + \sinh(y)$$

primitive en ordonnee t

$$\phi = \cosh(ty) + t \sinh(y) + f_1(y)$$

$$N = \frac{\partial \phi}{\partial y} = t(\sinh(ty) + \cosh y) = t \sinh(ty) + t \cosh y$$

$$\phi = \cosh(ty) + t \sinh(y) + f_2(t)$$

$$\phi = \cosh(ty) + t \sinh(y)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \phi = C, C \in \mathbb{R} \quad \cosh(ty) + t \sinh(y) = C, C \in \mathbb{R}$$

sol implicite

①

$$\textcircled{1} \quad y' - y^2 = 1 + t + t y^2$$

separable

$$\Leftrightarrow y' = 1 + t + y^2 + t y^2 \Leftrightarrow y' = 1 + t + (1+t)y^2 \Leftrightarrow y' = (1+t)(1+y^2) \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1+t \quad \int \frac{y'}{1+y^2} dt = t + \frac{t^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\arctan y = t + \frac{t^2}{2} + C, C \in \mathbb{R} \quad y = \tan\left(t + \frac{t^2}{2} + C\right), C \in \mathbb{R}$$





# Equações Exatas

19/09/2023

$M(t,y) + N(t,y) \frac{dy}{dt} = 0$  é exata se poder ser posta na forma  $\frac{d}{dt} [\phi(t,y)] = 0$  para algum  $\phi$ .

Se for exata, é possível resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = M \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = N \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{é possível se } \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} \text{ e se o domínio} \\ \text{for retângulo} \end{array} \right)$$

Se não for exata, pode ser redutível a exata.

Procuramos multiplicar toda a equação por um fator integrante  $M(t,y)$  para que a equação já fique exata

$$M(t,y) \left( M(t,y) + N(t,y) \frac{dy}{dt} \right) = 0$$

Para ficar exata, é preciso que

$$\frac{\partial}{\partial y} [M M] = \frac{\partial}{\partial t} [M N]$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} M + M \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial t} N + M \frac{\partial N}{\partial t} \quad (*)$$

Notação

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$M_{yt} = \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial t}$$

Se procurarmos  $\mu = \mu(t)$ , a equação fica

$$0 + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu N + \mu \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

Para existir  $\mu = \mu(t)$ ,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \text{ não pode depender de } y$$

lin. homogênea

$$\mu' + a(t)\mu = 0$$

e neste caso  $\mu(t) = K e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} dt}$   $K \in \mathbb{R}$

Podemos escolher por exemplo  $K=1$



ex:

$$\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^t\right) + (y+e^t) \frac{dy}{dt} = 0$$

É exata?

$$\begin{cases} M = \frac{y^2}{2} + 2ye^t \\ N = y + e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = y + 2e^t \\ \frac{\partial N}{\partial t} = e^t \end{cases} \neq \text{não é exata}$$

Será redutível a exata?

• Existe  $\mu(t)$ ?

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}}{N} - \frac{\frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{(y+2e^t)-e^t}{y+e^t} = 1$$

não depende de  $y \Rightarrow$  existe  $\mu(t)$

$$\mu' = \mu \Rightarrow \mu(t) = e^t \quad \mu(t) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} dt} = e^{\int 1 dt} = e^t$$

A equação original fica:

$$\left(\frac{y^2}{2} e^t + 2ye^{2t}\right) + (ye^t + e^{2t}) \frac{dy}{dt} = 0$$

Procuramos  $\Phi$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{y^2}{2} e^t + 2ye^{2t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = ye^t + e^{2t} \end{cases}$$

Da 1ª eq:  $\Phi = \int \left(\frac{y^2}{2} e^t + 2ye^{2t}\right) dt = \frac{y^2}{2} e^t + ye^{2t} + c_1(y)$

Substituindo na 2ª eq:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{y^2}{2} e^t + ye^{2t} + c_1(y) \right] = ye^t + e^{2t}$$

$$ye^t + e^{2t} + c_1'(y) = ye^t + e^{2t}$$

$$c_1'(y) = 0 \quad c_1(y) = c$$

$$\Phi(t, y) = \frac{y^2}{2} e^t + ye^{2t} + c$$

$$\mu + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d}{dt} [\Phi(t, y)] = 0$$

$\Rightarrow$  logo tem de ser constante em  $t$



by Staples



Solução final:

$$\Phi(t, y) = C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\frac{y^2}{2} e^t + y e^{2t} = C \quad \forall C \in \mathbb{R}} \quad \text{forma implícita}$$

Para a forma explícita:

fórmula resolvente

$$y = \frac{-e^{2t} \pm \sqrt{e^{4t} - 2e^t(-C)}}{e^t} \quad y(0) = 1$$

Solução geral na forma explícita

Se quisermos  $M = M(y)$ , (\*)

$$M' M + M \frac{\partial M}{\partial y} = 0 + M \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$M' = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} M$$

Só há  $M(y)$  se  $\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$  não depender de  $t$  e

nesse caso  $M(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}$

Pode não existir  $M(t)$  ou  $M(y)$ .

$$M(t, y)$$

ex:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos(t+y)}$$

- não linear  
- não separável

- exata? não

$$\underbrace{-\frac{1}{\cos(t+y)}}_M + \underbrace{\frac{1}{\cos(t+y)}}_{N} \frac{dy}{dt}$$

- redutível a exata?

$$M = M(t)?$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}}{M} - \frac{\frac{\partial N}{\partial t}}{M} = \frac{\frac{\sin(t+y)}{\cos^2(t+y)}}{1} - 0$$

depende de  $y$  X

$$M = M(y)?$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t}}{M} - \frac{\frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{0 - \frac{\sin(t+y)}{\cos^2(t+y)}}{\frac{1}{\cos(t+y)}} = -\frac{\sin(t+y)}{\cos(t+y)}$$

depende de  $t$  X



## Mudança de variável

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos(t+y)}$$

Se escolhermos  $u = t + y$

$$y = y(t) \rightarrow u = u(t)$$

$$u = t + y \rightarrow y = u - t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} - 1$$

A equação fica  $\frac{du}{dt} - 1 = \frac{1}{\cos u}$  separável

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\cos u} + 1 = \frac{1 + \cos u}{\cos u}$$

$$\frac{\cos u}{1 + \cos u} \frac{du}{dt} = 1$$

$$\int \frac{\cos u}{1 + \cos u} du = \int 1 dt$$

$$\frac{\cos u}{1 + \cos u} = \frac{\cos u (1 - \cos u)}{(1 + \cos u)(1 - \cos u)} = \frac{\cos u - \cos^2 u}{1 - \cos^2 u} = \frac{\cos u - \cos^2 u}{\sin^2 u} =$$

$$= \frac{\cos u}{\sin^2 u} - \frac{1 + \sin^2 u}{\sin^2 u} = \left( \frac{\cos u}{\sin^2 u} - \frac{1}{\sin^2 u} \right) + 1$$

Primitivas

$$\rightarrow \frac{1}{\sin u} + \cotg u + u = t + C \quad \text{implícita} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$\left( \frac{\cos u}{\sin u} \right)' = \frac{-\sin^2 u - \cos^2 u}{\sin^2 u} = -\frac{1}{\sin^2 u}$$

Desfazendo a transformação

$$u = t + y$$

$$\frac{1}{\sin(t+y)} + \cotg(t+y) + t + y = t + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$



# Análise Qualitativa das Soluções

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{Problema de valor inicial}$$

## Método Iterativo de Picard

Construímos uma sucessão de aproximações à solução  $y_n(t)$

Em certos casos  $y_n(t)$  converge para uma solução

$$\frac{dy}{ds} = f(s, y)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{dy}{ds} ds = \int_{t_0}^t f(s, y) ds$$

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t \dots ds$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y) ds \quad \text{— equação integral}$$

$$y_0(t) = y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

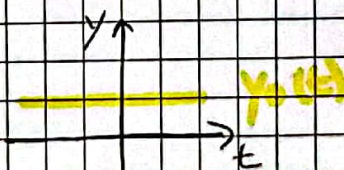
$$(n \geq 1)$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

$$\text{Se existir } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t)$$

ex:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



$$y_0(t) = y_0 = 1$$

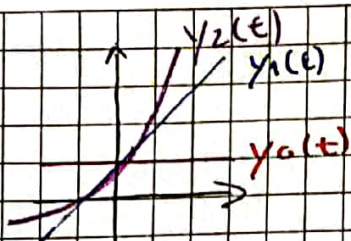
$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds = 1 + \int_0^t f(s, 1) ds = 1 + \int_0^t 1 ds =$$

$$= 1 + [s]_0^t = 1 + t$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t f(s, y_1(s)) ds = 1 + \int_0^t f(s, 1+s) ds = 1 + \int_0^t (1+s) ds =$$

$$= 1 + \left[ s + \frac{s^2}{2} \right]_0^t = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$





Em geral, podemos ver que:

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \quad (\text{provamos por indução})$$

## Análise Qualitativa de Equações Diferenciais

21/09/2023

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{problema de valor inicial}$$

- Método Iterativo de Picard
- Teorema de Existência e Unicidade de Picard
- Traçado Gráfico de Soluções

### Método Iterativo de Picard

Construímos uma sucessão de aproximações

$$y_0(t) = y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$n \geq 1$

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

ex:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} t_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ f(t, y) = y \end{matrix}$$

$$y_0(t) = 1 \quad y_1(t) = 1 + t \quad y_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

Vemos que:

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \quad P(n)$$

Provamos por indução

$$P(1) \checkmark \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$P(n+1) \quad y_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t f(s, y_n(s)) ds = 1 + \int_0^t y_n(s) ds =$$

$$= 1 + \int_0^t \sum_{k=0}^n \frac{s^k}{k!} ds = 1 + \left[ \sum_{k=0}^n \frac{s^{k+1}}{(k+1)!} \right]_{s=0}^{s=t} = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = 1 + \sum_{m=1}^{n+1} \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{n+1} \frac{t^m}{m!}$$

hipótese de indução

$k \cup m = k+1$



Obtivemos as aproximações

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$$

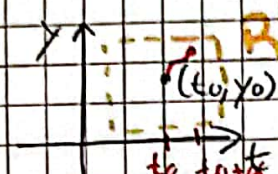
Quando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$y_n(t) \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

$\Rightarrow y(t) = e^t$  é solução do problema

## Teorema de Existência e Unicidade de Picard

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$



não é preciso saber quanto iterativamente e o  $\alpha$  se sabemos q quanto maior o retângulo maior o  $\alpha$

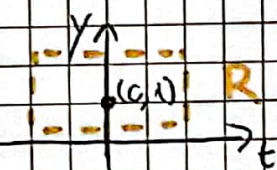
não é preciso ser de classe  $C^1$  mas pode ser

Se  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  forem contínuas num retângulo aberto contendo

$(t_0, y_0)$ , então o problema tem solução local única (definida num intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$ )  $\alpha$  depende do retângulo escolhido (A solução é o limite da sucessão de iterações do Método de Picard)

ex:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



Este teorema não resolve a eq só prova que esta exista

$f(t, y) = y$   $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$  contínuas em  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  não basta dizer isto tem de fazer a separação (pq é formada por 2 funções contínuas etc)

Qualquer retângulo aberto em torno de  $(0, 1)$  serve para garantir existência e unicidade

ex:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = t^2 + e^{-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



$f(t, y) = t^2 + e^{-y^2}$  contínua em  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-y^2}$  contínua em  $\mathbb{R}^2$

Qualquer retângulo aberto em torno de  $(0, 0)$  serve para garantir existência e unicidade localmente



ex:

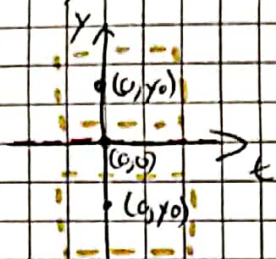
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{y} + t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Para que valores de  $y_0$  garantimos solução local única?

$$y(0) = y_0$$

$$f(t, y) = \sqrt[3]{y} + t \text{ contínua em } \mathbb{R}^2$$

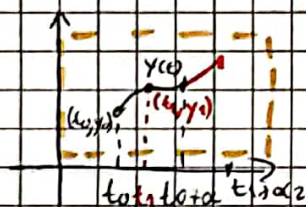
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (\sqrt[3]{y})' = \frac{1}{3} y^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \text{ contínua em } y \neq 0$$



Para  $y_0 \neq 0$  o teorema garante existência e unicidade

Para  $y_0 = 0$ , o teorema não garante

Do teorema obtemos solução em  $[t_0, t_0 + \alpha[$



Podemos aplicar o teorema num novo ponto  $(t_1, y_1)$  e obter uma solução até um  $\alpha_2$ .

Repetindo o processo, obtemos o **intervalo máximo de definição** da solução.

O intervalo pode ser:  $[t_0, +\infty[$

ou  $[t_0, t_0 + \beta[$  para  $\beta$  finito (e  $y$  tem uma assíntota vertical em  $t_0 + \beta$ )

ex:

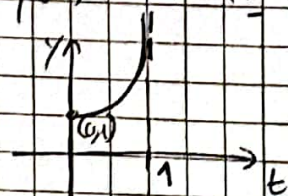
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Garantimos existência e unicidade

$$y \neq 0 \quad \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} = 1$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dt \quad -\frac{1}{y} = t + c \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad y = -\frac{1}{t+c}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{0+c} \Rightarrow c = -1 \quad y(t) = -\frac{1}{t-1} \text{ definida para } t \neq 1$$



O intervalo máximo de definição é  $[0, 1[$

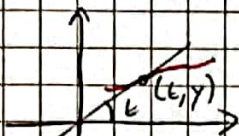


Se  $\alpha$  for finito, diz-se que a solução "explode em tempo finito"

## Traçado Gráfico de Soluções

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$\frac{dy}{dt} = \tan \alpha$  em cada ponto da curva



ex:

$$\frac{dy}{dt} = t + y$$

$$(0, 0) \rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$$

Para  $y=0$ :

$$(1, 0) \rightarrow \frac{dy}{dt} = 1$$

$$(2, 0) \rightarrow \frac{dy}{dt} = 2$$

$$(t, 0) \rightarrow \frac{dy}{dt} = t$$

$$(-1, 0) \rightarrow \frac{dy}{dt} = -1$$

No eixo das  $y$ :

$$(0, y) \rightarrow \frac{dy}{dt} = y$$

declive horizontal

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow y + t = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 \Leftrightarrow y + t = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -1 \Leftrightarrow y + t = -1$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow y + t = c$$

**Problemas**

22/09/2023

(1)

$$y - 2t^2 + (2ty + t \log t) y' = 0$$

$$y'(1) = 2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 2y + \log t + 1$$

não é exata

$$M(y - 2t^2) + N(2ty + t \log t) y' = 0$$



$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} (y - 2t^2) + M$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial t} (2ty + t \log t) + M(2y + \log t + 1)$$

Suponha que  $M$  só depende de  $t$  então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = M'(2ty + t \log t) + M(2y + \log t + 1)$$

Para ser  
exata tem de  
ser igual

$$M = M'(2ty + t \log t) + M(2y + \log t + 1)$$

$$M = M'(2ty + t \log t) + M(2y + \log t) + M$$

$$0 = (M't + M)(2y + \log t)$$

$$M't + M = 0 \Leftrightarrow M't = -M \Rightarrow \frac{M'}{M} = -\frac{1}{t}$$

$$\log |M| = -\log |t| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$|M| = e^C e^{-\log |t|}, C \in \mathbb{R}$$

$$M = \pm e^C \frac{1}{|t|}, C \in \mathbb{R}$$

$$M = K \frac{1}{|t|}, K \in \mathbb{R} \quad \log t \geq 0$$

$$M = K \frac{1}{t}$$

$$M(y - 2t^2) + M(2ty + t \log t) y' = 0$$

$$\frac{y}{t} - 2t + (2y + \log t) y' = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \phi = C$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N = 2y \cdot \log t$$

$$\phi = y^2 + y \log t + f(t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M = \frac{y}{t} - 2t$$

$$\phi = y \log t + t^2 + f(2(y)) \rightarrow \phi = y^2 - t^2 + y \log t = C, C \in \mathbb{R}$$



$$y(1) = 2$$

$$2^2 - 1^2 + 2 \log 1 = C \Rightarrow 4 - 1 + 0 = C \Rightarrow C = 3$$

$$y^2 + y \log t - (t^2 + 3) = 0$$

$$y(t) = \frac{-\log t \pm \sqrt{\log^2 t + 4(t^2 + 3)}}{2}$$

$$2 = \frac{-\log 1 \pm \sqrt{\log^2 1 + 4(1^2 + 3)}}{2}$$

$$2 = \frac{\pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow 2 = \pm 2 \quad \text{single } e^+ \text{ + } e^-$$

$$y(t) = \frac{-\log t + \sqrt{\log^2 t + 4(t^2 + 3)}}{2} \quad t \in ]0, +\infty[$$

$$(9) y = tu$$

$$(a) y' = \frac{t+x}{t-y} \quad y' = u + t(u')$$

$$u + t(u') = \frac{t + tu}{t - tu}$$

$$u + t(u') = \frac{t(1+u)}{t(1-u)} = \frac{1+u}{1-u}$$

$$t(u') = \frac{1+u}{1-u} \quad u = \frac{1+u-u+u^2}{1-u}$$

$$t(u') = \frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \int \frac{u'(1-u)}{1+u^2} dt = \frac{1}{t} \Rightarrow \int \frac{u'}{1+u^2} - \frac{uu'}{1+u^2} dt = \log|t| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(u) - \frac{1}{2} \int \frac{2uu'}{1+u^2} dt = \log|t| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(u) - \frac{1}{2} \log|1+u^2| = \log|t| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$2 \arctan(u) - \log|1+u^2| = 2 \log|t| + C, C \in \mathbb{R}$$

$$2 \arctan(u) - (\log(1+u^2) + \log t^2) = C, C \in \mathbb{R}$$

$$2 \arctan\left(\frac{y}{t}\right) - \log\left(\left(1+\frac{y^2}{t^2}\right)t^2\right) = C, C \in \mathbb{R}$$

$$2 \arctan\left(\frac{y}{t}\right) - \log(t^2 + y^2) = C, C \in \mathbb{R}$$



# Equações Diferenciais de 2ª ordem

26/09/2023

Lineares

São da forma  $\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t)$

(se conseguirmos resolver, a solução geral depende de duas constantes)

Para definirmos uma solução particular, são precisas duas condições

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y'_0 \end{aligned}$$

condições  
iniciais

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y(t_1) &= y_1 \end{aligned}$$

condições  
de fronteira

$t_0$   $t_1$

$g(t) = 0 \Rightarrow$  homogêneas

$g(t) \neq 0 \Rightarrow$  não-homogêneas

## Teorema de Existência e Unicidade

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

Se  $p$  e  $q$  são contínuas num intervalo aberto em torno de  $t_0$ , o problema tem solução única

Dada a equação homogênea, se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções então  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  também são soluções  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ex:

$$y'' = y$$

$y_1 = e^t$  é solução

$c_1 e^t$  é solução  $\forall c_1 \in \mathbb{R}$

$y_2 = 2e^t$  é solução

$$y = \underbrace{c_1 e^t + c_2 \cdot 2e^t}_{= c e^t} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{é solução}$$



Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da homogênea tais que

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

então a solução geral é  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Dados  $y_1$  e  $y_2$

Se  $y$  for qualquer solução, queremos ver se

$$y \stackrel{?}{=} c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y'(t_0) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}$$

É possível determinar se  $\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

ex:

$$y'' = y$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^t \\ y_2 &= 2e^t \end{aligned}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & 2e^t \\ e^t & 2e^t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Não podemos concluir que } y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$W(y_1, y_2)$  - WRONSKIANO de  $y_1$  e  $y_2$

Se  $W(y_1, y_2) \neq 0$ ,

$\{y_1, y_2\}$  é conjunto fundamental de soluções (base para espaço das soluções)

**Teorema de Abel**

$W$  verifica a equação

$$W' + p(t)W = 0$$



$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$\begin{aligned} W' + pW &= (y_1 y_2' - y_2 y_1')' + pW = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_2' y_1'} - y_2 y_1'' + \\ &+ p(y_1 y_2' - y_2 y_1') = y_1(y_2'' + p y_2') - y_2(y_1'' + p y_1') = \\ &= y_1(-q y_2) - y_2(-q y_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2'' + p y_2' + q y_2 &= 0 \\ y_1'' + p y_1' + q y_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$W' + pW = 0 \quad \text{linear homogênea 1ª ordem}$$

$$W(t) = K e^{-\int p(t) dt} \quad \forall K \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{ou } W &= 0 \quad \forall t \\ \text{ou } W &\neq 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

Basta só verificar  $W(y_1, y_2) \neq 0$  num ponto  $t_0$ .

## Equações Lineares Homogêneas de 2ª ordem com Coeficientes Constantes

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

$$y'' + p(t) y' + q(t) y = 0$$

Precisamos de  $y_1$  e  $y_2$  linearmente independentes

Procuramos soluções da forma  $y = e^{rt}$  para alguns  $r$ .

$$y' = r e^{rt} \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

$$a y'' + b y' + c y = a r^2 e^{rt} + b r e^{rt} + c e^{rt} = (a r^2 + b r + c) e^{rt} = 0$$

$$\Rightarrow a r^2 + b r + c = 0 \quad \text{polinômio característico da equação}$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1º caso:  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Ha duas raízes reais diferentes

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= e^{r_1 t} \\ y_2 &= e^{r_2 t} \end{aligned}$$



São linearmente independentes?

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = r_2 e^{r_2 t} e^{r_1 t} - r_1 e^{r_1 t} e^{r_2 t} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0$$

$\Rightarrow$  a solução geral é  $y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$   
 (há mais soluções)

ex:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

polinômio característico:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

soma raízes   produto raízes

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = 2$$

$$\begin{cases} y_1 = e^t \\ y_2 = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \text{A solução geral é } y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} ar^2 + br + c &= 0 \\ (r-r_1)(r-r_2) &= \\ &= r^2 - (r_1+r_2)r + r_1 r_2 \end{aligned}$$

2º caso:  $b^2 - 4ac = 0$

Há uma raiz real dupla

$$r = -\frac{b}{2a} \quad y_1 = e^{-\frac{b}{2a}t} \text{ é solução}$$

Precisamos de um  $y_2$  lin. indep.

### Método de Redução de Ordem

Procuramos  $y_2$  da forma

$$y_2(t) = u(t) y_1(t) = \underbrace{u(t)}_{?} e^{rt} \quad (u(t) \text{ não pode ser constante})$$

$$y_2 = u e^{rt} \quad y_2' = u' e^{rt} + r u e^{rt}$$

$$y_2'' = u'' e^{rt} + r u' e^{rt} + r u' e^{rt} + r^2 u e^{rt}$$

$$a y_2'' + b y_2' + c y_2 = 0$$

$$= e^{rt} [a(u'' + 2ru' + r^2 u) + b(u' + ru) + cu]$$

$$a u'' + (2ar + b)u' + (ar^2 + br + c)u = 0$$

$$e'' > 0$$

$$r = -\frac{b}{2a}$$

$$a u'' + (2ar + b)u' = 0 \quad \text{eq. 2ª ordem em } u \text{ mas de 1ª ordem em } v = u'$$

$$a v' + (2ar + b)v = 0 \quad \text{eq. 1ª ordem linear homogênea}$$

$$a u'' = 0 \Rightarrow u'' = 0$$

$$\Rightarrow u(t) = A$$

$$\Rightarrow u(t) = At + B \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$$



$$y_2 = (At + B)e^{rt}$$

Por exemplo,  $y_2 = te^{rt}$

$$A=1 \\ B=0$$

linearmente indep.?

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & e^{rt} + tre^{rt} \end{vmatrix} = e^{rt}(e^{rt} + tre^{rt}) - te^{rt}re^{rt} = e^{2rt} \neq 0 \checkmark$$

podemos escolher um valor de  $t$ , por exemplo  $t=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

A solução geral é  $y = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$r = -\frac{b}{2a}$$

## Equações lineares de coeficientes constantes de ordem 2

28/09/2023

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Procuramos soluções exponenciais:  $y = e^{rt}$

Obtemos o polinômio característico:  $ar^2 + br + c = 0$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1º caso:  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Tem 2 raízes diferentes:  $r_1$  e  $r_2$

$$y_1 = e^{r_1 t} \quad y_2 = e^{r_2 t}$$

São linearmente independentes porque o wronskiano:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

A solução geral é  $y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$



2º caso:  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Tem 1 raiz real dupla  $r = -\frac{b}{2a}$

$$y_1 = e^{-\frac{b}{2a}t} \quad y_2 = t e^{-\frac{b}{2a}t}$$

A solução geral é  $y = c_1 e^{-\frac{b}{2a}t} + c_2 t e^{-\frac{b}{2a}t} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3º caso:  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Tem 2 raízes complexas conjugadas

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm i\beta$$

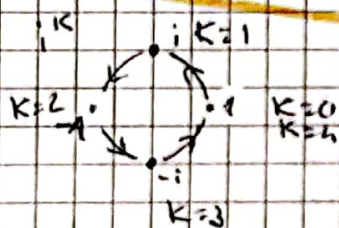
$$i = \sqrt{-1}$$

$$\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{e^{(\alpha-i\beta)t}}$$

são duas soluções

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t}$$

$$e^{i\beta t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\beta t)^k}{k!} = (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k} t^{2k}}{(2k)!}) + i(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}) = \cos(\beta t) + i \sin(\beta t)$$



$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = \text{cis } \theta$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} \cos(\beta t) - i e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

São duas soluções da equação, mas são complexas ~~X~~  
but we don't want that

A soma também é solução:  $2 e^{\alpha t} \cos(\beta t)$

$$\rightarrow y_1 = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

A diferença também é solução:  $2i e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

$$\rightarrow y_2 = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

São lin. indep?

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ \alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} \sin(\beta t) & \alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{vmatrix} \neq 0 ?$$

Podemos escolher  $t=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta \neq 0 \quad \text{porque as raízes são complexas}$$

$\Rightarrow$  são linearmente independentes



A solução geral é

$$y = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ex:

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

pol. caract.

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$\alpha = -1 \\ \beta = 1$$

$$y_1 = e^{-t} \cos t$$

$$y_2 = e^{-t} \sin t$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

## Equações lineares não-homogêneas de ordem 2

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = \underbrace{g(t)}_{\neq 0}$$

- Método dos coeficientes indeterminados

ou

- Método de variação dos parâmetros

## Equações de Ordem Superior a 2 homogêneas lineares

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0$$

Precisamos de  $n$  soluções  $y_1, \dots, y_n$  que sejam linearmente independentes

O wronskiano

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

O lema de Abel não é válido para  $n \geq 2$ .

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ W' + p(t)W = 0 \\ \Rightarrow W = K e^{-\int p(t) dt}$$

A solução geral é

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$



## Equações de coeficientes constantes lineares homogêneas

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

Procuramos soluções exponenciais  $y = e^{rt}$

Obtemos o polinômio característico

$$a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

## Teorema Fundamental da Álgebra

Qualquer polinômio de grau  $n > 0$  com coeficientes reais tem exatamente  $n$  raízes (contando com as multiplicidades)

ex:

fun fact

vem da numeração romana

$$y^{(iv)} + y''' - 3y'' - y' + 2y = 0$$

Pol. caract

$$r^4 + r^3 - 3r^2 - r + 2 = 0$$

tem 4 raízes:  $\pm 1$   
 $\pm 2$

$$r_1 = 1 \text{ é raiz} \rightarrow y_1 = e^t$$

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0 \quad \pm 1, \pm 2$$

$$r_2 = 1 \rightarrow y_2 = t e^t$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = -1 \text{ ou } -2$$

$$r_3 = -1 \rightarrow y_3 = e^{-t}$$

$$r_4 = -2 \rightarrow y_4 = e^{-2t}$$

Pode ver-se que  $W(y_1, \dots, y_4) \neq 0 \rightarrow$  são lin. indep.

$$e \quad y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 e^{-2t} \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

ex:

$$y^{(iv)} + 2y''' + y = 0$$

$$r^4 + 2r^3 + r = 0 \Rightarrow (r^2)^2 + 2(r^2) + 1 = 0$$

$$(r^2 + 1)^2 = 0$$

$$(r^2 - (i)^2)^2$$



$$(r-i)^2 (r-i)^2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = i$$

$$r_3 = r_4 = -i$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 1$$

$$y_1 = e^{it} \cos(\beta t) = \cos t$$

$$y_2 = e^{it} \sin(\beta t) = \sin t$$

$$y_3 = t \cos t$$

$$y_4 = t \sin t$$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

Uma raiz real  $r$  com multiplicidade  $m$  produz  $m$  soluções lin. indep.

$$y_1 = e^{rt} \quad y_2 = t e^{rt} \quad y_3 = t^2 e^{rt} \quad \dots \quad y_m = t^{m-1} e^{rt}$$

Dois raízes complexas conjugadas  $\alpha \pm i\beta$  ambas com multiplicidade  $m$  produzem  $2m$  soluções lin. indep.

$$y_1 = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad y_2 = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad y_3 = t e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$y_4 = t e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad y_5 = t^2 e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad y_6 = t^2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

$$\dots \quad y_{2m-1} = t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad y_{2m} = t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Uma eq. linear homogênea com coef. constantes tem como solução

$$y_1 = t e^t \sin t \quad y_2 = e^{2t} \quad y_3 = t^3$$

Qual a menor ordem possível da eq.?

Qual a solução geral?

Qual uma eq. possível?

$$t e^t \sin t \rightarrow y_1 = t e^t \cos t$$

$$y_2 = e^t \sin t$$

$$y_3 = e^t \cos t$$

$r = 1 \pm i$  (duplas)

$$e^{2t} \rightarrow r = 2$$

$$t^3 \rightarrow y_4 = t^2$$

$$r = 0 \quad y_5 = t$$

$$y_6 = 1$$

A menor ordem é 6.

$$y = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t + c_3 t e^t \cos t + c_4 t e^t \sin t + c_5 e^{2t} + c_6 + c_7 t + c_8 t^2 + c_9 t^3 \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

O pol. caract. é

$$(r - (1+i))^2 (r - (1-i))^2 (r-2)(r-0)^4 = 0$$

$$r^4 + \dots = 0$$

$$y^{(4)} + \dots = 0$$



# Problemas

29/09/2023

## Série 1 - Equações de Primeira Ordem

(16) (a)  $\frac{dV}{dt} = -K A_s$   $V(t) = \frac{4}{3} \pi r^3(t)$   $A_s(t) = 4\pi r^2(t)$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2(t) r'(t)$$

$$4\pi r^2(t) r'(t) = -K 4\pi r^2(t) \Leftrightarrow r^2(t) r'(t) + K r^2(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2(t) (r'(t) + K) = 0 \Leftrightarrow r'(t) + K = 0 \Leftrightarrow r'(t) = -K$$

$$\Rightarrow r(t) = -Kt + C, \forall C \in \mathbb{R}$$

$$r(0) = R_0$$

$$-K \times 0 + C = R_0 \quad r(t) = -Kt + R_0$$

$$r(t) = 0 \Leftrightarrow -Kt + R_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{R_0}{K}$$

## Série 1 - Existência e Unicidade de Solução

(17) (a)  $\begin{cases} y' = 6t^3 \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$  o teorema não prova a existência de classe  $C^1$

$$y' = 6t^3 \sqrt[3]{y} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt[3]{y}} = 6t^3 \Leftrightarrow \int \frac{y'}{\sqrt[3]{y}} dt = 3t^3 + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = 3t^3 + C, C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{y} = 3t^3 + C, C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = t^3 + C, C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = (t^3 + C)^3, C \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 0$$

$$(0^3 + C)^3 = 0 \Leftrightarrow C = 0$$

$$y = t^6 \in C^1$$

$$\begin{cases} y' = 2(\cos t) \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y' = 2(\cos t) \sqrt{y} \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \cos t \quad \int \frac{y'}{2\sqrt{y}} dt = \sin(t) + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{y} = \sin t + C, C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = (\sin t + C)^2, C \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 0$$

$$(\sin(0) + C)^2 = 0 \Leftrightarrow C = 0$$

$$y = \sin^2 t \in C^1 \quad y' = 2 \sin t \cos t$$

$$2 \cos t \sqrt{y} = 2 \cos t \sqrt{\sin^2 t} = 2 \cos t |\sin t| \quad t \in [0, \pi]$$



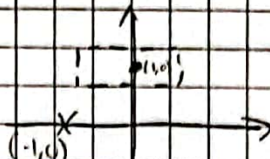
b)  $(0,0)$   
 $f(t,y) = 2 \cos(t) \sqrt{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cos(t)}{\sqrt{y}}$$

$$f(t,y) = 6t \sqrt[3]{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6t \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \frac{4t}{\sqrt[3]{y}}$$

②  $y' = \frac{1}{3y^2 + \sqrt{(t+1)^2}} = f(t,y)$   
 $y(0) = 1$   
 $(0,1)$

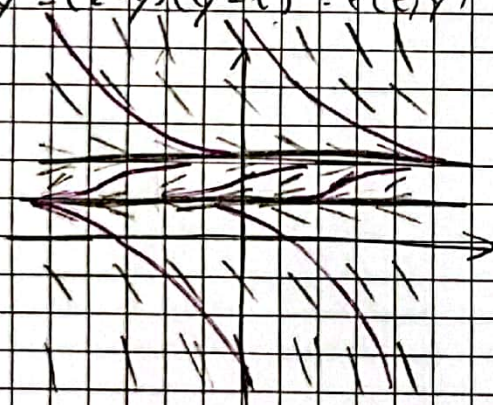


$(-1,0)$  é o pto problemático

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{6y}{(3y^2 + \sqrt{(t+1)^2})^2}$$

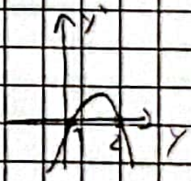
Como  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas num retângulo aberto que contenha  $(0,1)$  e não contenha  $(-1,0)$ , então o teorema de existência e unicidade garante que existe uma única solução em  $[0, \alpha]$  com  $\alpha > 0$ , ou seja, localmente.

③ c)  $y' = (2-y)(y-1) = f(t,y)$



$$y' = \left(2 - \frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = 1$$

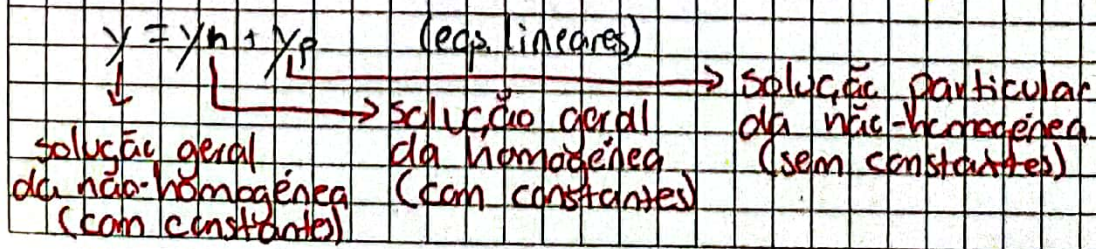


## Eq. de 2ª ordem lineares não-homogêneas

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t)$$

Se  $y^1$  e  $y^2$  são soluções da não-homogênea, então  $y^1 - y^2$  é solução da homogênea

## Princípio da Sobreposição de Soluções





Para resolver a não-homogênea:

1º:  $y_h$  Resolvemos a homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

( $y_1, y_2$  - lin. indep.)

2º:  $y_p$  solução particular da não-homogênea

3º:  $y = y_h + y_p$

ex:

$$y'' + y = 2e^t$$

1º  $y_h$   $y'' + y = 0$

pol. caract.:  $r^2 + 1 = 0$

$$\alpha = 0 \quad \beta = 1$$

$$r = \pm i$$

$$y_1 = e^{0t} \cos(1 \cdot t) = \cos t$$

$$y_2 = e^{0t} \sin(1 \cdot t) = \sin t$$

lin.  
indep.

$$y_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad \forall c_i$$

2º  $y_p$  Por inspeção,  $y_p$  pode ser  $y_p = e^t$

3º  $y = y_h + y_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^t \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$

ex:

$$y'' + y = e^{2t}$$

$$y_p = A e^{2t}$$

$$(A e^{2t})'' + (A e^{2t}) = e^{2t} \Leftrightarrow$$

$$4A e^{2t} + A e^{2t} = e^{2t} \Leftrightarrow A = \frac{1}{5} \quad y_p = \frac{1}{5} e^{2t}$$

ex:

$$y'' - y = e^t$$

1º  $y_h$  pol. caract.:  $r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 1$

$$y_1 = e^t$$

$$y_2 = e^{-t}$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \quad \forall c_i$$

2º  $y_p$  Podemos provar  $y_p$  da forma

$$y_p = A e^t \quad (A e^t)'' - A e^t = e^t \Leftrightarrow 0 = e^t \text{ impossível!}$$

( $y_p$  não pode ser da forma  $A e^t$ )



Para descobrir  $y_p$ :  
→ Método dos Coeficientes Indeterminados

- Fácil usar
- Se podemos usar para coeficientes constantes e para alguns  $g(t)$

→ Método de Variação dos Parâmetros

- Pode ser usado em qualquer caso
- Menos fácil de usar em geral (depende de primitivas)

## Método dos Coeficientes Indeterminados

$$y'' - y = e^t$$

Notação:

$$Dy = y' \quad D^2y = y'' \quad \text{etc.}$$

$$D^2y - y = e^t$$

$$(D^2 - 1)y = e^t$$

Aplicamos uma combinação de derivadas para anular o lado direito.

$$De^t = e^t$$

$$De^t - e^t = 0$$

$$(D-1)e^t = 0$$

$$(D-1)(D^2-1)y = \underbrace{(D-1)e^t}_{=0} \quad \text{eq. homogênea de ordem 3}$$

por caract.:

$$(r-1)(r^2-1) = 0$$

$$\text{raízes: } r_1 = r_2 = 1$$

$$r_3 = -1$$

$y_p$  é da forma

$$y_p = \underbrace{Ae^{-t} + Be^t + Cte^t}$$

já estão no  $y_h$

Substituímos na equação original para determinar as constantes:

$$y_p = Cte^t$$

$$y'_p = Ce^t + Cte^t$$

$$y''_p = Ce^t + Ce^t + Cte^t$$

$$(Cte^t)'' - Cte^t = e^t \Leftrightarrow (2Ce^t + Cte^t) - Cte^t = e^t$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p = \frac{1}{2}te^t$$

se os outros termos não cancelarem algo está mal



$$(3^o) y = y_h + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^t, \forall c_i \in \mathbb{R}$$

D-1 é o aniquilador de  $e^t$

# Aniquiladores

$$e^{at} \mapsto D - \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$t e^{at} \mapsto (D - \alpha)^2$$

$$t^m e^{at} \mapsto (D - \alpha)^{m+1}$$

$$\cos(\beta t) \mapsto D^2 + \beta^2$$

$$\sin(\beta t) \mapsto D^2 + \beta^2$$

$$t^m \cos(\beta t) \mapsto (D^2 + \beta^2)^{m+1}$$

$$t^m \sin(\beta t) \mapsto (D^2 + \beta^2)^{m+1}$$

$$e^{at} \cos(\beta t) \mapsto (D - \alpha)^2 + \beta^2$$

$$e^{at} \sin(\beta t) \mapsto (D - \alpha)^2 + \beta^2$$

$$D e^{at} = \alpha e^{at}$$

$$D e^{at} - \alpha e^{at} = 0$$

$$(D - \alpha) e^{at} = 0$$

$$D \cos(\beta t) = -\beta \sin(\beta t)$$

$$D^2 \cos(\beta t) = -\beta^2 \cos(\beta t)$$

$$(D^2 + \beta^2) \cos(\beta t) = 0$$

$$D^2 \sin(\beta t) = -\beta^2 \sin(\beta t)$$

$$D(t e^{at}) = e^{at} + \alpha t e^{at}$$

$$D(t e^{at}) - \alpha t e^{at} = e^{at}$$

$$(D - \alpha) t e^{at} = e^{at}$$

$$(D - \alpha)^2 t e^{at} = (D - \alpha) e^{at} = 0$$

ex:

$$y'' + y = \cos t$$

$$(1^o) y_h \quad y'' + y = 0$$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r = \pm i$$

$$y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

$$(2^o) y_p \quad (D^2 + 1)y = \cos t$$

$$(D^2 + 1)y = (D^2 + 1) \cos t$$

eq. homogênea de ordem 4

$$\alpha = 0 \quad \beta = 1$$

$$\text{pol. caract. } (r^2 + 1)^2 = 0 \quad r_1 = r_2 = i \quad r_3 = r_4 = -i$$

$$y_p = A \cos t + B \sin t + C t \cos t + D t \sin t$$

já está na homogênea

$$y_p' = C \cos t - C t \sin t + D \sin t + D t \cos t$$

$$y_p'' = -C \sin t - C \sin t - C t \cos t + D \cos t + D \cos t - D t \sin t$$

$$y_p'' + y_p = \cos t \Leftrightarrow (-2C \sin t + 2D \cos t - C t \cos t - D t \sin t) + (A \cos t + B \sin t + C t \cos t + D t \sin t) = \cos t$$



$$\Rightarrow C=0$$

$$2D=1$$

$$y_p = \frac{1}{2} t \sin t$$

$$(3^\circ) \quad y = y_h + y_p = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2} t \sin t \quad \forall C_i \in \mathbb{R}$$

ex:

$$y'' - 2y' + y = e^t + t \cos t + t^2$$

$$(1^\circ) \quad y_h \quad \begin{aligned} y'' - 2y' + y &= 0 \\ y^2 - 2r + 1 &= 0 \\ (r-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$r_1 = r_2 = 1 \Rightarrow y_h = C_1 e^t + C_2 t e^t \quad \forall C_i \in \mathbb{R}$$

$$(2^\circ) \quad y_p \quad \begin{aligned} (D^2 - 2D + 1)y &= e^t + t \cos t + t^2 \\ (D-1)^2 y &= e^t + t \cos t + t^2 \end{aligned}$$

O aniquilador de uma soma é o produto dos aniquiladores

ex:

$$\begin{aligned} (D-1)e^t &= 0 & (D^2+1)\cos t &= 0 \\ ((D-1) + D^2+1)(e^t + \cos t) &\neq 0 \\ (D-1)(D^2+1)(e^t + \cos t) &= (D-1)(D^2+1)e^t + (D-1)(D^2+1)\cos t = \\ &= (D^3+1)(D-1)e^t + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D-1)^2 y &= e^t + t \cos t + t^2 \\ (D-1)^2 (D-1)^2 y &= 0 \end{aligned}$$

eq. homogênea de ordem 4

$r=0$  tripla  $r=1$  tripla

$y_p$  é da forma:

$$y_p = A e^t + B t e^t + C t^2 e^t + D \cos t + E \sin t + F t \cos t + G t \sin t + H + I t + J t^2$$

já na homogênea

Substituímos na eq. original para determinar as constantes

**Resumo**

Serie 2

$$\begin{aligned} (1) \quad y_1(t) &= \sin t \\ y_2(t) &= \cos t \\ y_3(t) &= t \cos t \end{aligned}$$

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t & t \cos t \\ \cos t & -\sin t & \cos t - t \sin t \\ -\sin t & -\cos t & -t \sin t - t \cos t \end{vmatrix}$$

$$= 2 \sin t$$

como é diferente de 0, são linearmente independentes em  $\mathbb{R}$



②/③

a)  $y'' - y = 0$

$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$   
 $r_1 = 1$  e  $r_2 = -1$   
 $y_1 = e^t$  e  $y_2 = e^{-t}$

$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y(0) = 0$   
 $y'(0) = 1$

$y' = c_1 e^t - c_2 e^{-t}, c_1 \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -2c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1/2 \\ c_2 = -1/2 \end{cases}$

$y = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh(t)$

c)  $y'' - 6y' + 9y = 0$

$r^2 - 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times 9}}{2} \Leftrightarrow r = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} \quad r_1 = 3 \text{ e } r_2 = 3$

$y_1 = e^{3t}$  e  $y_2 = t e^{3t}$

$y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}, \forall c_i \in \mathbb{R}$

$y(0) = 0$   
 $y'(0) = 1$

$y' = 3c_1 e^{3t} + c_2 e^{3t} + 3c_2 t e^{3t}, \forall c_i \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 0 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$

$y = t e^{3t}$

f)  $y''' - y'' + y' - y = 0$

$r^3 - r^2 + r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r^2+1) = 0$

$r_1 = 1, r_2 = i \text{ e } r_3 = -i$

acc. B.1

$y_1 = e^t, y_2 = e^{it} \cos t \text{ e } y_3 = e^{it} \sin t$

$\alpha + \beta i \rightarrow e^{\alpha t} \cos(\beta t)$   
 $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

$y = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t, \forall c_i \in \mathbb{R}$

$y(0) = 0$   
 $y'(0) = 1$

$y' = c_1 e^t - c_2 \sin t + c_3 \cos t, \forall c_i \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_3 = 1 - c_1 \end{cases}$

$y = c_1 e^t - c_1 \cos t + (1 - c_1) \sin t, c_1 \in \mathbb{R}$



4

$$te^{at}$$

$$\sin(2t) \rightarrow 2i \text{ e } -2i$$

0 é raiz dupla  
do polinômio  
característico

$$y = C_1 + C_2 t + C_3 \cos(2t) + C_4 \sin(2t), \forall C_i \in \mathbb{R}$$

5

$$y'' - 2y' + (1+\alpha)y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 0$$

$$r^2 - 2r + 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1+\alpha)}}{2} \Leftrightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{-4\alpha}}{2} \Leftrightarrow r = 1 \pm \sqrt{-\alpha}$$

Caso  $\alpha = 0$ :

$$r_1 = 1 \text{ e } r_2 = 1$$

$$y = C_1 e^t + C_2 t e^t, \forall C_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 e + C_2 e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$y = 0 \quad \text{X não funciona}$$

Caso  $\alpha < 0$ :

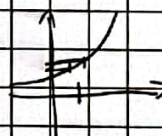
$$r_1 = 1 + \sqrt{-\alpha} \text{ e } r_2 = 1 - \sqrt{-\alpha}$$

$$y = C_1 e^{(1+\sqrt{-\alpha})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{-\alpha})t}, \forall C_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{1+\sqrt{-\alpha}} + C_2 e^{1-\sqrt{-\alpha}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -C_2 e^{1+\sqrt{-\alpha}} + C_2 e^{1-\sqrt{-\alpha}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_2 (e^{1-\sqrt{-\alpha}} - e^{1+\sqrt{-\alpha}}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$\neq 0$  porque  $e^t$  é injectiva



$$y = 0 \quad \text{X não funciona}$$

Caso  $\alpha > 0$ :

$$r_1 = 1 + i\sqrt{\alpha} \text{ e } r_2 = 1 - i\sqrt{\alpha}$$

$$y = C_1 e^t \cos(\sqrt{\alpha}t) + C_2 e^t \sin(\sqrt{\alpha}t), \forall C_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 e^t \cos(\sqrt{\alpha}) + C_2 e^t \sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \end{cases}$$

$$\sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = K\pi, K \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow \alpha = K^2 \pi^2, K \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = K^2 \pi^2, K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$



# método de variação dos parâmetros

10/10/2023

ex:

$$y'' + y = \tan t$$

1ª homogênea

$$y'' + y = 0$$

pol. caract.

$$r^2 + 1 = 0 \quad r = \pm i$$

$$\alpha \neq \beta \quad \alpha = 0 \quad \beta = 1$$

$$y_1 = e^{\alpha t} \cos(\beta t) = \cos t$$

$$y_2 = e^{\alpha t} \sin(\beta t) = \sin t \quad \text{lin. indep.}$$

$$y_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

2ª  $y_p$

Não há aniquilador para  $\tan t$ .

$\Rightarrow$  não podemos usar o método dos coef. indet.

Procuramos solução da forma

$$y_p = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t$$

$u_1$  e  $u_2$  não podem ser ambas constantes

Substituímos na equação

$$y_p' = u_1' \cos t - u_1 \sin t + u_2' \sin t + u_2 \cos t = 0$$

Só com uma equação o sistema não pode ser determinado.

Adicionamos uma 2ª equação

$$y_p'' = -u_1' \sin t - u_1 \cos t + u_2' \cos t - u_2 \sin t$$

$$y_p'' + y_p = \tan t \Leftrightarrow (-u_1' \sin t - u_1 \cos t + u_2' \cos t - u_2 \sin t) + (u_1 \cos t + u_2 \sin t) = \tan t$$

$$= \tan t \Leftrightarrow -u_1' \sin t + u_2' \cos t = \tan t$$

$$u_1' \cos t + u_2' \sin t = 0$$

$$-u_1' \sin t + u_2' \cos t = \tan t$$

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tan t \end{bmatrix}$$

e possível determinar porque o determinante é 1.





## Regra de Cramer

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sec t \\ \cos t & \sec t \\ \sec t & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sec t \\ \sec t & \cos t \end{vmatrix}} = \frac{-\sec t \tan t}{1} = -\frac{\sec^2 t}{\cos t}$$

$$u_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ \sec t & \tan t \\ \cos t & \sec t \\ \sec t & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sec t \\ \sec t & \cos t \end{vmatrix}} = \frac{\cos t \cdot \tan t}{1} = \sec t$$

$$u_2 = \int u_2 dt = \int \sec t dt = -\cos t$$

$$u_1 = \int u_1 dt = \int \frac{-\sec^2 t}{\cos t} dt = -\int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt + \int \sec t dt$$

mudança de variável:  
 $u = \tan t + \sec t$

$$du: \int \frac{1}{\cos t} dt = \int \frac{\cos t}{\cos t} dt = \int \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt = \int \frac{u'}{1 - u^2} = (*)$$

$u = \sec t$

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{(1 + u)(1 - u)} = \frac{-1}{(u + 1)(u - 1)} = \frac{A}{u + 1} + \frac{B}{u - 1}$$

$$A(u - 1) + B(u + 1) = -1$$

$$\begin{aligned} u = 1 &\rightarrow 2B = -1 \\ u = -1 &\rightarrow 2A = -1 \end{aligned}$$

$$(*) = \int \frac{\frac{1}{2}}{u + 1} du - \int \frac{\frac{1}{2}}{u - 1} du = \frac{1}{2} \ln |u + 1| - \frac{1}{2} \ln |u - 1| = \ln \sqrt{\frac{u + 1}{u - 1}} =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{\sec t + 1}{\sec t - 1}}$$

$$3^\circ y = y_h + y_p$$

## Método de variação dos parâmetros

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

$$1^\circ y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

com  $y_1$  e  $y_2$  lin. indep. (dada)

$$2^\circ y_p = u_1(t)y_1 + u_2(t)y_2$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_1 y_1' + u_2 y_2 + u_2 y_2' = 0$$





$$y'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

$$(u_1 y_1' + u_2 y_2') + p(t)(u_1 y_1' + u_2 y_2') + q(t)(u_1 y_1 + u_2 y_2) = g(t)$$

$$u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_1 \underbrace{(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1)}_{=0 \text{ pq } y_1 \text{ é sol. homog.}} + u_2 \underbrace{(y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2)}_{=0} = g(t)$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1 y_1' + u_2 y_2' = g(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

possível determinar porque  $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$  porque são lin. indep.

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(t) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_1 = \int u_1 dt = \int \frac{-y_2 g}{W(y_1, y_2)} dt$$

$$u_2 = \int u_2 dt = \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

3º  $y = y_h + y_p$

ex:

$$(1+t^2) y'' - 2t y' + 2y = 0$$

Dada:  $y_1 = t$

Precisamos de um  $y_2$  lin. indep.

**método de redução de ordem**

Procuramos  $y_2$  da forma  $y_2 = u(t)y_1 = u(t)t$   
 $u(t)$  não pode ser constante.

$$y_2 = u t + u$$

$$y_2'' = u''t + u' + u' = u''t + 2u'$$

Substituímos na equação

$$(1+t^2)y_2'' - 2t y_2' + 2y_2 = 0$$

$$(1+t^2)(u''t + 2u') - 2t(u't + u) + 2ut = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(1+t^2)u'' + (2(1+t) - 2t^2)u' + (-2t + 2t)u = 0$$

= 0



$$t(1+t^2)u'' + 2u' = 0 \quad \text{eq. 2ª ordem em } u \text{ mas de 1ª ordem em } v: u'$$

$$t(1+t^2)v' + 2v = 0 \quad \text{linear homogênea}$$

$$v' + \frac{2}{t(1+t^2)}v = 0$$

$$v = Ke^{-\int \frac{2}{t(1+t^2)} dt} = e^{-\int \frac{2}{t(1+t^2)} dt}$$

$$\int \frac{2}{t(1+t^2)} dt = \int \frac{A}{t} dt + \int \frac{Bt+C}{1+t^2} dt = 2\ln|t| - \ln|t^2+1|$$

$$A(t^2+1) + (Bt+C)t = 2$$

$$t=0 \rightarrow A=2$$

$$t^2 \rightarrow A+B=0 \rightarrow B=-2$$

$$t \rightarrow C=0$$

$$v = e^{-\int \frac{2}{t(1+t^2)} dt} = e^{-(2\ln|t| - \ln|t^2+1|)} = \frac{t^2+1}{t^2} = 1 + \frac{1}{t^2}$$

$$v = u'$$

$$\Rightarrow u = \int v dt = \int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = t - \frac{1}{t}$$

$$y_2 = ut = \left(t - \frac{1}{t}\right)t = t^2 - 1$$

$$y = c_1 t + c_2 (t^2 - 1) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

## método de redução de ordem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Dado  $y_1$

procuramos  $y_2 = uy_1$

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

$$y_2'' = u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1'' = 2u'y_1' + uy_1''$$

Substituímos na eq.

$$y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0$$

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(t)(u'y_1 + uy_1') + q(t)(uy_1) = 0$$

$$u''y_1 + u'(2y_1' + y_1 p(t)) + u(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1) = 0$$

$$y_1 u'' + (2y_1' + y_1 p(t))u' = 0 \quad \begin{matrix} \text{2ª ordem em } u \\ \text{1ª ordem em } v = u' \end{matrix}$$

$\Rightarrow p, q, y_1$  sã sol. da homog.



$$v' + \left( 2 \frac{y_1'}{y_1} + p \right) v = 0$$

$$v = e^{-\int (2 \frac{y_1'}{y_1} + p) dt} = e^{-2 \ln |y_1|} e^{-\int p dt} = \frac{e^{-\int p(t) dt}}{y_1^2}$$

$$v = u'$$

$$\Rightarrow u = \int v dt = \int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{y_1^2} dt$$

$$\Rightarrow y_2 = u y_1$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

## Problemas

12/10/2023

Série 2

(2)

$$(a) y'' - 2y' + 5y = 0$$

Encontrar polinômio característico ( $y = e^{\lambda t}$ )

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 5)e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 2i$$

$$y(t) = c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = a \quad (\lambda - a) = 0$$

$$y(t) = c_1 e^{at}$$

$$(a-b)^2 = 0 \quad \lambda = b$$

$$y(t) = c_1 e^{bt} + c_2 t e^{bt}$$

$$(\lambda - c)^2 = 0$$

$$y(t) = c_1 e^{ct} + c_2 t e^{ct}$$

$$\lambda = a \pm ib$$

$$y(t) = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt)$$

(5)

$$(b) y'' + \alpha y = 0$$

$$y(0) = y(2\pi)$$

$$y'(0) = y'(2\pi)$$

rel. cond.

$$\lambda^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow (\lambda + i\sqrt{\alpha})(\lambda - i\sqrt{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\alpha}$$

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{\alpha} t) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha} t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = c_1$$

$$y(2\pi) = c_1 \cos(2\pi\sqrt{\alpha}) + c_2 \sin(2\pi\sqrt{\alpha}) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = c_1 \cos(2\pi\sqrt{\alpha}) + c_2 \sin(2\pi\sqrt{\alpha}) \\ c_2 = c_2 \sin(2\pi\sqrt{\alpha}) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(2\pi\sqrt{\alpha}) = 1 \\ \sin(2\pi\sqrt{\alpha}) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 2\pi\sqrt{\alpha} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \neq \alpha = k^2, k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \neq$$

$$y'(t) = -\sqrt{\alpha} c_1 \sin(\sqrt{\alpha} t) + \sqrt{\alpha} c_2 \cos(\sqrt{\alpha} t)$$

$$y'(0) = \sqrt{\alpha} c_2 \quad y'(2\pi) = -\sqrt{\alpha} c_1 \sin(2\pi\sqrt{\alpha}) + \sqrt{\alpha} c_2 \cos(2\pi\sqrt{\alpha})$$

$$\sqrt{\alpha} c_2 = -\sqrt{\alpha} c_1 \sin(2\pi\sqrt{\alpha}) + \sqrt{\alpha} c_2 \cos(2\pi\sqrt{\alpha}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin(2\pi\sqrt{\alpha}) = 0 \\ \cos(2\pi\sqrt{\alpha}) = 1 \end{array} \right.$$



## Equação diferencial de ordem superior não homogênea

- 1º: encontrar a solução do problema homogênea
- 2º: método dos aniquiladores para encontrar  $y_p$
- 3º: aceitar os coeficientes da solução particular
- 4º:  $y_g = y_h + y_p$

6

a)  $y'' - 2y' + y = t$   $y' = Dy$

$D \rightarrow$  operador derivada

$$(D^2 - 2D + 1)y = t$$

$$D^2(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

1º Encontrar sol. homogênea

Pol. caract.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$G) (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2º Encontrar sol. particular

$$(D^2 - 2D + 1)y = t$$

$$D^2(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$G) \lambda = 0 \vee \lambda = 1$$

$$y_p = c_3 + c_4 t, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

já tratamos em  $y_h$

$$y'p(t) = c_4 \quad y''p(t) = 0$$

$$0 - 2c_4 + c_3 + c_4 t = t \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 - 2c_4 = 0 \\ c_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 2 \\ c_4 = 1 \end{cases}$$

$$4^\circ y_g = y_h + y_p = c_1 e^t + c_2 t e^t + 2 + t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

b)  $y'' + y = \cos t$

1º pol. caract.  $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

$$y_h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$2^\circ (D^2 + 1)y = \cos t \Leftrightarrow (D^2 + 1)(D^2 + 1)y = 0$$

$$P.C.: (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

$$y_p(t) = c_3 t \cos t + c_4 t \sin t, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$  continuar...





$$d) y'' + y - 2y = e^t + \cos t$$

$$r = 0: \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = 1$$

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow (D^2 + D - 2)y = e^t + \cos t \Leftrightarrow (D - 1)(D^2 + 1)(D^2 + D - 2)y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (D^2 + 1)(D - 1)(D - 1)(D + 2)y = 0$$

$$y_p(t) = c_3 \cos t + c_4 \sin t + c_5 L e^t$$

→ continuar

# Sistemas lineares de eqs. diferenciais

12/10/2023

Capítulo 3  
Se sei no 2º MAP

Capítulo 1:

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \quad \text{eq. linear homogênea} \rightarrow y(t) = K e^{-at} \quad \forall K \in \mathbb{R}$$

Capítulo 2: aumentamos a ordem

Capítulo 3: ordem 1, mas com mais variáveis

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \right.$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A \vec{x} \quad \begin{matrix} n \times n & n \times 1 \\ n \times 1 \end{matrix}$$

Sistemas não-homogêneos gerais:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t) \vec{x} + \vec{g}(t)$$



$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

Procuramos soluções da forma  $\vec{x} = e^{\lambda t} \vec{v}$  para alguns  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Substituímos no sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} (e^{\lambda t} \vec{v}) = \lambda e^{\lambda t} \vec{v}$$

$$e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} v_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t} v_n \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = A(e^{\lambda t} \vec{v}) = e^{\lambda t} A\vec{v} \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} \vec{v} = e^{\lambda t} A\vec{v} \Leftrightarrow \lambda \vec{v} = A\vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

$\lambda$  - valor próprio de  $A$

$\vec{v}$  - vetor próprio de  $A$  para  $\lambda$

ex:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

valores próprios:  $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \dots = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2)$$

vetores próprios:

$$\lambda_1 = 1$$

$$(A - I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \cdot \frac{1}{3}, L_3 \cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + \frac{1}{2}y - 1z = 0$$

$$y - 4z = 0$$

$$z \text{ livre } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y + z \\ 4z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ 4z \\ z \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_1 = 3$$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & -5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + \frac{1}{2}y - 2z = 0 \quad y - 2z = 0 \quad z \text{ livre}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y + 2z \\ z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_1 = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5/3 & -5/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 y - 4/3 z \\ z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_3 = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução geral do problema é

$$\vec{x} = c_1 e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

ex:

$$x'' - 3x' + 2x = 0$$

pol. caract:  $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1 \vee r_2 = 2$   
 soma raízes      produto raízes

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

ou: através de um sistema equivalente  $\rightarrow$  para vermos de onde vem o nome pol. caract. dá muito mais trabalho

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x'' = 3x' - 2x = 3x_2 - 2x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

valores próprios

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_1 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\boxed{\lambda_2 = 2}$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -2x + y = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \forall c_i \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow x' \end{matrix}$$

Se houver valores próprios complexos  $\alpha \pm i\beta$

com vetores próprios complexos  $\vec{v}_1 \pm i\vec{v}_2$

$$\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{e^{(\alpha-i\beta)t}} (\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = (e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t)) (\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = (*)$$

$$(*) = \underbrace{(e^{\alpha t} \cos(\beta t) \vec{v}_1 - e^{\alpha t} \sin(\beta t) \vec{v}_2)}_{\vec{x}_1} + i \underbrace{(e^{\alpha t} \cos(\beta t) \vec{v}_2 + e^{\alpha t} \sin(\beta t) \vec{v}_1)}_{\vec{x}_2}$$

$\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$  são linearmente independentes

A solução geral é  $c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2, \forall c_i \in \mathbb{R}$

ex:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

valores próprios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 2 \text{ (simple)} \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ (dupla)}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2}$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -x + y = 0 \\ -y = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_1 = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \lambda_3 = 1}$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Não há mais soluções lin. indep. da forma  $e^{\lambda t} \vec{v}$

$$\vec{x}_2 = e^{2t} \vec{v}$$

$$\vec{x}_3 = t e^{2t} \vec{v}$$



E solução?

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A \vec{x}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} (e^{\lambda t} \vec{v}) = e^{\lambda t} \vec{v} + t e^{\lambda t} \vec{v}$$

$$A \vec{x} = A (e^{\lambda t} \vec{v}) = e^{\lambda t} A \vec{v} = t e^{\lambda t} \lambda \vec{v}$$

Não há soluções da forma  $e^{\lambda t} \vec{v}$

Procuramos soluções da forma  $\vec{x}_3 = t e^{\lambda t} \vec{v} + e^{\lambda t} \vec{w}$  para algum  $\vec{w}$

$$\frac{d\vec{x}_3}{dt} = \frac{d}{dt} (t e^{\lambda t} \vec{v} + e^{\lambda t} \vec{w}) = e^{\lambda t} \vec{v} + t \lambda e^{\lambda t} \vec{v} + \lambda e^{\lambda t} \vec{w}$$

$$A \vec{x}_3 = A (t e^{\lambda t} \vec{v} + e^{\lambda t} \vec{w}) = t e^{\lambda t} \lambda \vec{v} + e^{\lambda t} A \vec{w}$$

$\vec{w}$  tem de satisfazer:

$$e^{\lambda t} \vec{v} + t \lambda e^{\lambda t} \vec{w} = e^{\lambda t} A \vec{w} \Leftrightarrow (A - \lambda I) \vec{w} = \vec{v}$$

vetor próprio

$\vec{w}$  - vetor próprio generalizado

$$\vec{x}_2 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para  $\vec{w}$ :

$$[A - I | \vec{v}_2] \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} y=1 \\ z=0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ por exemplo} \quad \vec{x}_3 = t e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução geral:  $\vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + c_3 \vec{x}_3, \forall c_i \in \mathbb{R}$

## Problemas

13/10/2023

Serie 2

6)  $y'' + y = \cos t$

$$r^2 + 1 = 0 \quad r_1 = i \quad r_2 = -i$$

$$y_g = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_p' = c_3 \cos t - c_4 \sin t + c_5 \sin t - c_6 \cos t = (c_3 + c_5) \cos t + (c_4 - c_6) \sin t$$

$$y_p'' = -c_3 \sin t - (c_4 - c_6) \cos t + c_5 \cos t + c_6 \sin t = (-c_3 + c_6) \sin t + (-c_4 + c_5) \cos t$$

$$y_p'' + y_p = \cos t \Leftrightarrow (-c_3 + c_6) \sin t + (-c_4 + c_5) \cos t + (c_3 + c_5) \cos t + (c_4 - c_6) \sin t = \cos t$$

$$\Leftrightarrow 2c_5 \cos t - 2c_3 \cos t = \cos t \Rightarrow \begin{cases} 2c_5 = 1 \\ -2c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_5 = \frac{1}{2} \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$$y = y_p + y_g = \frac{1}{2} t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

arc



$$e^t + \cos t$$

$$(D-1)(D^2+1)(e^t + \cos t) = 0$$

$$⑧ \quad y'' - \frac{1}{e^t+1} y' - \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^2} y = \frac{2e^t}{e^t+1}$$

$$⑤ \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$y_1 = e^t + 1, \quad y_2 = \frac{1}{e^t+1}$$

$$y_p = M_1 y_1 + M_2 y_2$$

$$\begin{cases} M_1 y_1 + M_2 y_2 = 0 \\ M_1 y_1' + M_2 y_2' = g(t) \end{cases}$$

$$y_1' = e^t, \quad y_2' = -\frac{e^t}{(e^t+1)^2}$$

$$g(t) = \frac{2e^t}{e^t+1}$$

como chegar a:

$$y_p' = M_1' y_1 + M_1 y_1' + M_2' y_2 + M_2 y_2'$$

supondo isto:

$$M_1' y_1 + M_2' y_2 = 0$$

$$M_1' (e^t+1) + M_2' \frac{1}{e^t+1} = 0$$

$$M_1' e^t - M_2' \frac{e^t}{(e^t+1)^2} = \frac{2e^t}{e^t+1} \quad \left( \Rightarrow \frac{(e^t+1)}{e^t} \right)$$

$$y_p'' = M_1' y_1' + M_1 y_1'' + M_2' y_2' + M_2 y_2''$$

$$M_1' y_1' + M_2' y_2' = g(t)$$

$$M_1' (e^t+1) - M_2' \frac{1}{e^t+1} = 2$$

$$\begin{bmatrix} e^t+1 & \frac{1}{e^t+1} \\ e^t+1 & -\frac{1}{e^t+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1' \\ M_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$M_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{e^t+1} \\ 2 & -\frac{1}{e^t+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t+1 & \frac{1}{e^t+1} \\ e^t+1 & -\frac{1}{e^t+1} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{2}{e^t+1}}{-2} = \frac{1}{e^t+1}$$

$$M_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^t+1 & 0 \\ e^t+1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = -e^t+1$$

$$M_2 = \int (e^t-1) dt = -e^t-t$$

$$M_1 = \int \frac{1}{e^t+1} dt = \int \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{e^t=2}{dt=\frac{1}{2}dx} = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \log|x| - \log|1+x| = \log\left(\frac{e^t}{e^t+1}\right)$$

$$y_p = \log\left(\frac{e^t}{e^t+1}\right) (e^t+1) - \frac{e^t+t}{e^t+1}$$

$$y = y_p + y_g = \log\left(\frac{e^t}{e^t+1}\right) (e^t+1) - \frac{e^t+t}{e^t+1} + c_1 (e^t+1) + c_2 \frac{1}{e^t+1}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

deixar e descrever c e c2 com y(0)=y'(0)=0

⑥

$$① \quad y'' + y' - 2y = e^t + \cos t$$

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow r_1 = -2 \vee r_2 = 1$$

$$y_g = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$(D^2+D-2)y = e^t + \cos t \quad \Leftrightarrow (D-1)(D^2+1)(D^2+D-2)y = 0$$

$$(r-1)(r^2+1)(r^2+r-2) = 0 \quad r_1 = 1 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = -1 \quad r_4 = 1 \quad r_5 = -2$$

$$y_p = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t + c_4 t e^t + c_5 e^{-2t}$$



$$y_p = c_2 \cos t + c_3 \sin t + c_4 t e^t$$

$$y_p' = -c_2 \sin t + c_3 \cos t + c_4 e^t + c_4 t e^t$$

$$y_p'' = -c_2 \cos t - c_3 \sin t + 2c_4 e^t + c_4 t e^t$$

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = e^t + \cos t$$

$$-c_2 \cos t - c_3 \sin t + 2c_4 e^t - c_2 \sin t + c_3 \cos t + c_4 e^t + c_4 t e^t - 2c_2 \cos t - 2c_3 \sin t - 2c_4 t e^t = e^t + \cos t$$

$$\Rightarrow (-3c_2 + c_3) \cos t + (-3c_3 - c_2) \sin t + (3c_4 - 2c_4 t) e^t = e^t + \cos t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3c_2 + c_3 = 1 \\ -3c_3 - c_2 = 0 \\ 3c_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10c_3 = 1 \\ c_2 = -3c_3 \\ c_4 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = \frac{1}{10} \\ c_2 = -\frac{3}{10} \\ c_4 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y = -\frac{3}{10} \cos t + \frac{1}{10} \sin t + \frac{1}{3} t e^t + c_1 e^{-2t} + c_2 e^t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

# 17/10/2023

## Sistemas de equações lineares

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A \vec{x}$$

Procuramos soluções  $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$

$\Rightarrow \lambda$  é valor próprio de  $A$   
 $\vec{v}$  é vetor próprio de  $A$  (para  $\lambda$ )

- Pode não ser possível arranjar  $n$  vetores próprios lin. indep.
- Se  $\lambda$  for valor próprio duplo mas só houver um vetor próprio  $\vec{v}$  para  $\lambda$  lin. indep.

$$\vec{x}_1 = e^{\lambda t} \vec{v}$$

Para a 2ª solução:

$$\vec{x}_2 = t e^{\lambda t} \vec{v} + e^{\lambda t} \vec{w}$$

$\vec{w}$  - vetor próprio generalizado

$$(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0} \quad (\vec{v} \text{ é vetor próprio})$$

$$(A - \lambda I) \vec{w} = \vec{v} \quad (\vec{w} \text{ é vetor próprio generalizado})$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I) \vec{w} \neq \vec{0} \quad (A - \lambda I)^2 \vec{w} = \vec{0}$$

- Se  $\lambda$  for valor próprio triplo mas só houver um vetor próprio  $\vec{v}$

$$m.a.(\lambda) = 3 \quad m.g.(\lambda) = 1$$

$$1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$$



$$\vec{x}_1 = e^{\lambda t} \vec{v} \quad \vec{x}_2 = t e^{\lambda t} \vec{v} + e^{\lambda t} \vec{w} \quad \vec{w} - \text{veter próprio generalizado } (A - \lambda I)\vec{w} = \vec{v}$$

$$\vec{x}_3 = \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \vec{v} + t e^{\lambda t} \vec{w} + e^{\lambda t} \vec{z} \quad \vec{z} - \text{veter próprio generalizado de 2ª ordem}$$

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\vec{v} &= \vec{0} & (\vec{v} - \text{v.p.}) \\ (A - \lambda I)\vec{w} &= \vec{v} & (\vec{w} - \text{v.p. gen.}) \\ (A - \lambda I)\vec{z} &= \vec{w} & (\vec{z} - \text{v.p. gen. 2ª ordem}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{z} &\neq \vec{0} \\ (A - \lambda I)^2 \vec{z} &\neq \vec{0} \\ (A - \lambda I)^3 \vec{z} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

n=1

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{lin. 1ª ordem homogênea}$$

$$x(t) = K e^{at} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad ? \rightarrow \vec{x}(t) = K e^{At}$$

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

É preciso definir  $e^{At}$ .

## Exponencial de Matrizes

n=1

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad x \in \mathbb{R}$$

A n x n

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \quad n \times n$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ex:

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k}{k!} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{para } n \geq 1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^0 = I$$

$$e^{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = e^A e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = e^A I = e^A$$

= I



$$e^{\mathbb{I}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{I}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{I}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} = e\mathbb{I} \quad e^{\mathbb{I}} = e\mathbb{I}$$

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}t} = e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_n t \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \Rightarrow \vec{x}(t) = e^{At} \vec{v} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad At = \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}^k}{k!}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda t)^2 & 2\lambda t^2 \\ 0 & (\lambda t)^2 \end{bmatrix} \quad \lambda t^2 + \lambda t^2$$

$$\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} (\lambda t)^2 & 2\lambda t^2 \\ 0 & (\lambda t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda t)^3 & 3\lambda t^2 + t^3 \\ 0 & (\lambda t)^3 \end{bmatrix} \quad (\lambda t)^2 t + 2\lambda t^2 \cdot \lambda t$$

$$\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (\lambda t)^k & k\lambda^{k-1}t^k \\ 0 & (\lambda t)^k \end{bmatrix} \quad (k \geq 1)$$

prova: (indução)

$$P(1) \text{ v. } P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda t)^k & k\lambda^{k-1}t^k \\ 0 & (\lambda t)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} =$$

(hipótese de indução)

$$= \begin{bmatrix} (\lambda t)^{k+1} & (k+1)\lambda^k t^{k+1} \\ 0 & (\lambda t)^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$(\lambda t)^k t + k\lambda^{k-1}t^k \lambda t$$

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\begin{bmatrix} (\lambda t)^k & k\lambda^{k-1}t^k \\ 0 & (\lambda t)^k \end{bmatrix}}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\lambda^{k-1}t^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

prova: identifique e o termo com k



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} t = t e^{\lambda t}$$

mudança de índice:  $m = k-1$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} & \frac{t^3}{6} e^{\lambda t} & \frac{t^4}{24} e^{\lambda t} & \dots \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} & \frac{t^3}{6} e^{\lambda t} & \dots \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{v}$  é solução do sistema?

$$\frac{d\vec{x}}{dt} \stackrel{?}{=} A\vec{x}$$

$$\frac{d}{dt} [e^{At} \vec{v}] = \left[ \frac{d}{dt} e^{At} \right] \vec{v} = \left[ \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right] \vec{v} = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{(At)^k}{k!} \right] \vec{v} =$$

$$= \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(At)^{k-1}}{k!} A \right] \vec{v} = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} A \right] \vec{v}$$

$I \rightarrow At \rightarrow (At)^2 \rightarrow \dots$   
 $k=0 \quad k=1 \quad k=2$

$$= \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} A \right] \vec{v} = \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(At)^m}{m!} A \right] \vec{v} = e^{At} A \vec{v} = A e^{At} \vec{v} = A \vec{x}$$

( $m=k-1$ )

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \Rightarrow \vec{x}(t) = e^{At} \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

• A é diagonalizável?

(há 3 v.p. linearmente independentes?)

valores próprios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1 =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$$

|                             | m.g.   | m.a. |                        |
|-----------------------------|--------|------|------------------------|
| $\lambda_1 = 0$             | 1      | 1    | $\vec{v}_1$            |
| $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ | 1 ou 2 | 2    | $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ |
|                             | 2 ou 3 | 3    |                        |

$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$





Se  $\sum m_i g(\lambda) = \sum m_i a(\lambda)$  a matriz é diagonalizável  
vetores próprios:

$$[\lambda_1 = 0] \quad A - 0I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x+y=0 \\ z=0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda_2 = \lambda_3 = 2] \quad A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  - base de  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow A$  é diagonalizável

# Problemas

19/10/2023

Série 2

2) b)  $y'' - \frac{1}{e^t+1} y' - \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^2} y = \frac{2e^t}{e^t+1}$

1ª Encontrar solução do problema homogêneo  
 $y_1 = e^t + 1$   $y_2 = \frac{1}{e^t + 1}$  são soluções do P.H

2ª Método de variação dos parâmetros

Assumir uma solução do P.H:

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$y' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \quad u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

Assumimos que é 0.

$$y'(t) = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

$$y''(t) = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

Vamos usar esta solução na eq. inicial:

$$\frac{2e^t}{e^t+1} = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' = \frac{1}{e^t+1} (u_1' y_1' + u_1 y_1'') - \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^2} (u_1' y_1' + u_1 y_1'')$$

Por  $u_1$  e  $u_2$  em evidência:

$$\frac{2e^t}{e^t+1} = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' = \frac{1}{e^t+1} y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' = 0$$

$$\begin{cases} \frac{2e^t}{e^t+1} = u_1' y_1' + u_1' y_2' \\ u_1 y_1 + u_2 y_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$y_1' = e^t \quad y_2' = -\frac{e^t}{(e^t+1)^2}$$

$$(1) \begin{cases} u_1 e^t + u_2 \frac{e^t}{(e^t+1)^2} = \frac{2e^t}{e^t+1} \\ u_1 (e^t+1)^2 = -u_2 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} 2u_1 e^t = \frac{2e^t}{e^t+1} \\ u_1 (e^t+1)^2 = -u_2 \end{cases}$$

$$u = \int u_1 dt = \int \frac{1}{e^t+1} dt = \int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{1}{x} - \int \frac{1}{x+1} = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C = \ln \left( \frac{e^t}{e^t+1} \right) + C$$



# Revisões

## 1ª ordem:

• Lineares:  $y' + a(t)y = b(t)$

→ separável: separarmos e primitivamos

→ não separável: usar fator integrante  $\mu(t)$  tal que  $\mu(t)y' + a(t)\mu(t)y = \frac{d}{dt}[\mu(t)y] = b(t)\mu(t) = \frac{d}{dt}[\mu(t)y]$

• Não lineares:

→ separáveis: separarmos e primitivamos

→ não separáveis: Exatas ou redutíveis a exatas

## Independência linear de funções

$y_1$  e  $y_2$  são lin. indep. 2 funções  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$  em todos os pontos

$y_1, y_2$  e  $y_3$  são lin. indep. 3 ou mais funções  $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \neq 0$  pode ser 0 em pontos isolados

## Existência e Unicidade

problema valor inicial  $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

### Teorema de Picard:

Se  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  forem contínuas num retângulo aberto que contenha o ponto  $(t_0, y_0)$  então existe solução para o P.V.I e essa solução é única.

## Ordem Superior

→ Homogêneas: encontrar o P.C. e a solução vai ser  $e^{\lambda t}$  e  $\lambda$  são as raízes do P.C.

→ Não homogêneas: 1ª encontrar a solução do problema homogêneo  
2ª olhar para o termo da direita:  $C \in \mathbb{R}, e^{\lambda t}, \cos(\lambda t), e^{at}, e^{at} \sin(\lambda t)$   
usar método aniquiladores  
•  $A(t), |h(t)|$   
 $B(t)$  e método de variação dos parâmetros



# Problemas

20/10/2023

Série 3

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

1)

$$a) A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$A^3 = A^2 A = A^1 = A$$

$$A^4 = A^3 A = A^2 = A$$

b) Suponha que  $A^n = A$

$$A^{n+1} = A^n A = A^2 = A$$

$$c) (Ae)^n = A^n e^n$$

$$(Ae)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ae)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Ae)^n}{n!} = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e^A - 1 \\ 0 & 1 & 0 & e^A - 1 \\ 0 & 0 & 1 & e^A - 1 \\ 0 & 0 & 0 & e^A \end{bmatrix}$$

ii)

$$a) A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 3 & 3^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 3^2 & 3^3 \end{bmatrix}$$

$$b) \text{Suponha que } A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & n \cdot 3^{n-1} & 3^n \end{bmatrix}$$

$$A^{n+1} = A^n A =$$

$$c) (Ae)^n = A^n e^n$$

$$(Ae)^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & n \cdot 3^{n-1} & 3^n \end{bmatrix}$$

$$e^{Ae} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ae)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Ae)^n}{n!} = I + \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n-1}}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \end{bmatrix} =$$

$$= I + \begin{bmatrix} e^{2e} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3e} - 1 & 0 \\ 0 & e^{3e} & e^{3e} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2e} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3e} & 0 \\ 0 & e^{3e} & e^{3e} \end{bmatrix}$$



$$(PAP^{-1})^n = P A^n P^{-1}$$

$$P A P^{-1} P A P^{-1} = P A^2 P^{-1}$$

$$P A^n P^{-1}$$

$$b) A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{6} & \frac{t^2}{2} & t & 1 & 0 \\ \frac{t^4}{24} & \frac{t^3}{6} & \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{bmatrix}$$

— 11 —

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y=0 \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x+y=0 \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# sistemas lineares de equações

26/10/2023

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

$n \times n$   $n \times 1$   $n \times 1$

Se  $\vec{x} = e^{\lambda t} \vec{v}$  for solução,  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  e  $\vec{v}$  é vetor próprio.

Outro método:

A solução é  $\vec{x}(t) = e^{At} \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

*solução geral*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \vec{x}_0$$

*solução particular*

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$



Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_A = ?$$

A é diagonalizável? (Há 3 vetores próprios linearmente independentes)

valores próprios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$$

| $\lambda$   | m.g.   | m.a. |                        |
|-------------|--------|------|------------------------|
| $\lambda=0$ | 1      | 1    | $\vec{v}_1$            |
| $\lambda=2$ | 2 ou 2 | 2    | $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ |
|             | 2 ou 3 | 3    |                        |

$$1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$$

Se  $\sum m.a.(\lambda) = \sum m.g.(\lambda)$ , A é diagonalizável

Se os  $\lambda$  forem todos diferentes, A é diagonalizável.

vetores próprios:

$$[\lambda=0] \quad A - 0I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad x+y=0 \quad z=0 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda=2] \quad A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -x+y=0 \quad x-y=0 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  Há 3 vetores próprios linearmente independentes

$\Rightarrow$  A matriz é diagonalizável

A é semelhante a uma matriz diagonal:

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

S - matriz de mudança de base

$\Lambda$  - matriz diagonal

Novo base:  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3$



Na nova base, a transformação tem matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \Lambda \quad (\text{diagonal})$$

$\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3$

$$(A - 0I)\vec{v}_1 = \vec{0} \rightarrow A\vec{v}_1 = \vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$(A - 2I)\vec{v}_2 = 2\vec{v}_2 \rightarrow A\vec{v}_2 = 2\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$(A - 2I)\vec{v}_3 = 2\vec{v}_3 \rightarrow A\vec{v}_3 = 2\vec{v}_3 = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$$

$$S^{-1}AS = \Lambda$$

$$A = SAS^{-1}$$

$$Ae^{At} = S(\Lambda e^{At})S^{-1}$$

$$e^{Ae^{At}} = e^{S(\Lambda e^{At})S^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[S(\Lambda e^{At})S^{-1}]^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S(\Lambda e^{At})^k S^{-1}}{k!} = S \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda e^{At})^k}{k!} \right] S^{-1} = *$$

$$[S(\Lambda e^{At})S^{-1}]^k = [S(\Lambda e^{At})S^{-1}][S(\Lambda e^{At})S^{-1}] \dots [S(\Lambda e^{At})S^{-1}] = S(\Lambda e^{At})^k S^{-1}$$

$$* = S e^{\Lambda e^{At}} S^{-1}$$

$$A = SAS^{-1} \Rightarrow e^{Ae^{At}} = S e^{\Lambda e^{At}} S^{-1}$$

$$e^{Ae^{At}} = S e^{\Lambda e^{At}} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \dots = \begin{bmatrix} e^{2t} + 1 & \frac{e^{2t} - 1}{2} & 0 \\ \frac{e^{2t} - 1}{2} & e^{2t} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Solução geral do sistema:

$$\vec{x}(t) = e^{Ae^{At}} \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

E se a matriz não for diagonalizável?

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Valores próprios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$





| $\lambda$   | m.g.   | m.a |             |
|-------------|--------|-----|-------------|
| $\lambda=2$ | 1      | 1   | $\vec{v}_1$ |
| $\lambda=1$ | ① ou 2 | 2   | $\vec{v}_2$ |
|             | ② ou 3 | 3   |             |

Mesmo que A não seja diagonalizável, vamos ter:

$$A = S \cdot J \cdot S^{-1}$$

(J é "o mais diagonal possível")

J - forma canônica de Jordan

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• - 0 ou 1  
 0  $\rightarrow$  se na coluna de S houver vetor próprio  
 1  $\rightarrow$  se houver vetor próprio generalizado  
 isto só funciona se o vetor generalizado estiver exatamente a direita do vetor próprio usado

S - com vetores próprios em colunas

J - com os valores próprios na diagonal principal (pela mesma ordem das colunas de S)

vetores próprios:

$$(\lambda=2) \quad A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -x + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ x \end{bmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda=1) \quad A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} z = 0 \\ x + z = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A não é diagonalizável.

Para a 3ª coluna de S, fazemos os vetores próprios generalizados

$$(A - I)\vec{w} = \vec{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} z = 0 \\ x + z = 1 \\ z = 0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ , a transformação fica:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= 2\vec{v}_1 = 2\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{w} \\ A\vec{v}_2 &= \vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 0\vec{w} \end{aligned}$$

$$A\vec{w} = ? \quad (A - I)\vec{w} = \vec{v}_2 \Rightarrow A\vec{w} = \vec{v}_2 + \vec{w} = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + 1\vec{w}$$



$$A = S \Lambda S^{-1}$$

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & t e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix}^{-1} = \dots$$

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = e^{At} \vec{v}$$

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (2 - \lambda)^3$$

| m.g.                | m.c |
|---------------------|-----|
| $\lambda = 2, 2, 2$ | 3   |

$v_1$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet -0 \text{ ou } 1$$

generalizadas

vetores próprios

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y + z = 0 \\ z = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vetores próprios generalizados:

$$(A - 2I) \vec{w} = \vec{v}_1$$

vetor próprio

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y + z = 1 \\ z = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

so  $\vec{w}$  é um vetor próprio generalizado

v.p. generalizadas de 2ª ordem:

$$(A - 2I) \vec{z} = \vec{w}$$

v.p. generalizado

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y + z = 0 \\ z = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1} = \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & t e^{2t} & \frac{t^2}{2} e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & t e^{2t} \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix}^{-1} = \dots$$

bloco de jordan



$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

# sistemas lineares de eqs.

26/10/2023

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

$n \times 1$     $n \times n$     $n \times 1$

Solução geral:  $\vec{x}(t) = e^{At} \vec{v}$     $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = \vec{0} \quad \text{homogênea}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = \vec{g}(t) \quad \text{não homogênea}$$

Fator integrante:  $\mu(t) = e^{\int A dt} = e^{-At}$

$$e^{-At} \frac{d\vec{x}}{dt} - e^{-At} A\vec{x} = e^{-At} \vec{g}(t)$$

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} \vec{x}] = e^{-At} \vec{g}(t)$$

$$e^{-At} \vec{x} = \int e^{-At} \vec{g}(t) dt + \vec{v} \quad (\vec{v} \in \mathbb{R}^n)$$

$$e^{At} \cdot e^{-At} = e^{At - At} = e^{\vec{0}} = I$$

$$\vec{x}(t) = \underbrace{e^{At} \int e^{-At} \vec{g}(t) dt}_{\vec{x}_p} + \underbrace{e^{At} \vec{v}}_{\vec{x}_h} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Princípio de  
sobreposição  
de soluções

Solução geral  
do sistema  
não-homogêneo

Fórmula de variação dos Parâmetros

## Teorema de Existência e Unicidade de Picard

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = f(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

$$f: \underbrace{U}_{\substack{\subset \mathbb{R}^{n+1} \\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n}} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Se  $f$  for de classe  $C^1$  numa vizinhança de  $(t_0, \vec{x}_0)$  então existe solução local única nessa vizinhança



ex:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} t e^{x_1} \\ x_1 e^t - x_2 \end{bmatrix} \\ \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(t, x_1, x_2) = (\overset{f_1}{t e^{x_1}}, \overset{f_2}{x_1 e^t - x_2})$$

$$t_0 = 0 \quad \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = e^{x_1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = x_1 e^t$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = e^t$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$$

Se a classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$  o teorema garante solução local única.

# Transformação de Laplace

## Capítulo 4

Para certas

$$f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t)$$

definimos

$$F = \mathcal{L}[f]: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$F(s)$$

dada por:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

(para os  $f$  e  $s$  para os quais o integral existir)

## Integral Impróprio

ex:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_0^{\infty} *$$

$$\int_1^{\infty} dx = +\infty$$



o integral é divergente

$$* = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{A} + 1 \right] = 1$$

o integral converge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ diverge}$$



by Staples



$$y'' + 2y' + y = 3e^t$$

$$\mathcal{L}[y'' + 2y' + y] = \mathcal{L}[3e^t]$$

ex:

$$f(t) = 1$$

converge se  $\text{Re } s > 0$

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{t=A} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} -\frac{1}{s} (e^{-sA} - 1) = -\frac{1}{s} (0 - 1) = \frac{1}{s} \text{ se } a = \text{Re } s > 0$$

$$(s = a + bi) \quad e^{-sA} = e^{-(a+bi)A} = e^{-aA} (\cos(-bA) + i \sin(-bA))$$

limitações

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \quad (\text{válida para } \text{Re } s > 0)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \quad \text{Existe se } \text{Re}(s-a) > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a} \quad (\text{válida para } \text{Re } s > a)$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \int_0^{\infty} \sin(at) e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \sin(at) e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \sin(at) \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=A} - \int_0^A a \cos(at) \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin(aA) e^{-sA}}{-s} + \frac{a}{s} \int_0^A \cos(at) e^{-st} dt \right] = \frac{a}{s} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \cos(at) \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=A} - \int_0^A \sin(at) \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= \frac{a}{s} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \cos(aA) \frac{e^{-sA}}{-s} - \int_0^A \sin(at) \frac{e^{-st}}{-s} dt \right] =$$

$$= \frac{a}{s} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \cos(aA) \frac{e^{-sA}}{-s} + \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \int_0^A \sin(at) e^{-st} dt \right] =$$

$$= \frac{a}{s} \left[ \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \sin(at) e^{-st} dt \right]$$

$$L = \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} L \Leftrightarrow \left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) L = \frac{a}{s^2} \Leftrightarrow \mathcal{L}[\sin(at)](s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{Re } s > 0$$



$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \dots = \frac{a}{s} \mathcal{L}[\cos(at)]$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{a^2 + s^2} \quad \text{Re } s > 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t](s) &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \underbrace{t}_{u'} \underbrace{e^{-st}}_{v'} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{t}_{u'} \underbrace{\frac{e^{-st}}{-s}}_{v'} \bigg|_{t=0}^{t=A} - \int_0^A \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\frac{e^{-st}}{-s}}_{v'} dt \right] \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} \underbrace{A e^{-sA}}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right] \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} \underbrace{A e^{-sA}}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{s} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} dt}_{\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}} \right] \quad \text{se } \text{Re } s > 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} A e^{-sA} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{e^{sA}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{s e^{sA}} = 0$$

$$\mathcal{L}[t^2](s) = \frac{1}{s^3} \quad (\text{Re } s > 0)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n](s) &= \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \underbrace{t^n}_{u'} \underbrace{e^{-st}}_{v'} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{t^n}_{u'} \underbrace{\frac{e^{-st}}{-s}}_{v'} \bigg|_{t=0}^{t=A} - \int_0^A \underbrace{n t^{n-1}}_{u'} \underbrace{\frac{e^{-st}}{-s}}_{v'} dt \right] \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} A^n e^{-sA} \right] + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt \\ &\quad \rightarrow 0 \quad \text{se } \text{Re } s > 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] = \dots = \frac{n!}{s^n} \mathcal{L}[1] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{válido para } \text{Re } s > 0)$$

## Propriedades da Transf. Laplace

### Linearidade

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{L}[f_1] + c_2 \mathcal{L}[f_2]$$

Em geral,  $\mathcal{L}[fg] \neq \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$

$$\text{ex: } \mathcal{L}[t^2] \neq \mathcal{L}[t] \mathcal{L}[t] \\ = \frac{2}{s^3} \neq \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2}$$

### Translação

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$$

$$\begin{aligned} \text{porque: } \mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) &= \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = \\ &= \mathcal{L}[f](s-a) \end{aligned}$$



ex:  $\mathcal{L}[te^{at}](s) = \mathcal{L}[t](s-a) = \frac{1}{s^2} \Big|_{s-a} = \frac{1}{(s-a)^2}$  (para  $\text{Re}(s-a) > 0$ )

# Problemas

29/10/2023

Serie 3

2) a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}t^2e^t & te^t & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{bmatrix}$

3)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$   $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$   $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\vec{x}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$

$\lambda_1 = -1$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$2x + y = 0$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 3$

$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$-2x + y = 0$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$A = S \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} S^{-1}$

$e^{At} = S e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} t} S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} S^{-1} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-t} - e^{3t}}{2} & \frac{-e^{-t} + e^{3t}}{4} \\ -e^{-t} + e^{3t} & \frac{e^{-t} - e^{3t}}{2} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-t} - e^{3t}}{2} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{e^{-t} - e^{3t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-t} - e^{3t}}{2} + \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ e^{3t} - e^{-t} - e^{-t} + e^{3t} & e^{-t} - e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ 2e^{3t} & -e^{-t} \end{bmatrix}$



$$\textcircled{4} \quad \frac{dx}{dt} = Ax \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = S \Lambda S^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y &= 2x \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = S e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} t} S^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & \frac{e^{3t} - e^t}{2} & \frac{e^t - e^{3t}}{2} \\ 0 & e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

1/1

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 \end{aligned}$$

$$S = [v_1 \ v_2]$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}S = \begin{bmatrix} l_1 v_1 & l_1 v_2 \\ l_2 v_1 & l_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AS = A[v_1 \ v_2] = [Av_1 \ Av_2] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2]$$

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 l_1 v_1 & \lambda_2 l_1 v_2 \\ \lambda_1 l_2 v_1 & \lambda_2 l_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} S^{-1}$$





# Transformação de Laplace

14/11/2023

$$f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \begin{matrix} t \in \mathbb{R} \\ s \in \mathbb{C} \end{matrix}$$

para os  $s \in \mathbb{C}$  tais que o integral exista.

## Propriedades:

- Linearidade:  $\mathcal{L}[f+g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$   
 $\mathcal{L}[cf] = c \mathcal{L}[f]$

$$\mathcal{L}[fg] \neq \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$$

por exemplo:

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}[t] \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2} \neq \frac{2}{s^3}$$

- translação:  $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-a)$

ex:

$$\mathcal{L}[te^{at}](s) = \mathcal{L}[t](s-a) = \left. \frac{1}{s^2} \right|_{s-a} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

- derivada da transformação:  $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -(\mathcal{L}[f(t)])'(s)$

porque

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = \left( \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right)'(s) = \int_0^{+\infty} -t f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[-tf(t)](s)$$

ex:

$$\mathcal{L}[te^{at}] = -(\mathcal{L}[e^{at}])' = -\left( \frac{1}{s-a} \right)' = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n (\mathcal{L}[f(t)])^{(n)}(s)$$

ex:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L}[e^{-t}]$$

$$\mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s+1}$$



# Transformação de derivadas

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \underbrace{f'(t)}_u \underbrace{e^{-st}}_v dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ f(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=R} + \int_0^R f(t) (-s) e^{-st} dt \right]$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ f(R) e^{-sR} - f(0) + s \int_0^R f(t) e^{-st} dt \right]$$

$$\mathcal{L}\{f'\} = s \mathcal{L}\{f\} - f(0) \quad (\text{se } f \text{ tiver limite finito no infinito})$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = \mathcal{L}\{(f')'\} = s \mathcal{L}\{f'\} - f'(0) = s(s \mathcal{L}\{f\} - f(0)) - f'(0) =$$

$$= s^2 \mathcal{L}\{f\} - s f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Ex:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 3 \mathcal{L}\{y'\} + 2 \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s+1}$$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - \underbrace{s y(0)}_0 - \underbrace{y'(0)}_1 - 3(s \mathcal{L}\{y\} - \underbrace{y(0)}_0) + 2 \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2 - 3s + 2) \mathcal{L}\{y\} - 1 = \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)} = \frac{s+2}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)} = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

$$A(s-1)(s-2) + B(s+1)(s-2) + C(s+1)(s-1) = s+2$$

$$s=1 \rightarrow -2B = 3 \rightarrow B = -\frac{3}{2} \quad s=2 \rightarrow 3C = 4 \rightarrow C = \frac{4}{3}$$

$$s=-1 \rightarrow 6A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1/6}{s+1} + \frac{-3/2}{s-1} + \frac{4/3}{s-2} \right] = \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+1} \right] - \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-1} \right] + \frac{4}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-2} \right] =$$



$$= \frac{1}{6} e^{-t} - \frac{3}{2} e^t + \frac{4}{3} e^{2t}$$

Y?

## Inversas de transb. Laplace

ex:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2s+1}{(s^2+1)(s-2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-2} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+1} \right] = *$$

$$A(s^2+1) + (Bs+C)(s-2) = 2s+1$$

$$s=2 \rightarrow 5A = 5 \rightarrow A=1$$

$$(s^2) \rightarrow A+B=0 \rightarrow B=-1$$

$$1 \rightarrow A-2C=1 \rightarrow C=0$$

$$* = e^{2t} - \cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s-1)^2} \right] = e^t \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \right] = e^t t$$

translação:

$$\mathcal{L}^{-1} [e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)](s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s-a)] = e^{at} \mathcal{L}^{-1} [F(s)]$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s-1)^2} \right] = e^t \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{s^2} \right] = e^t \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \right] \right) = e^t (1+t)$$

"  $\frac{(s-1)+1}{(s-1)^2}$

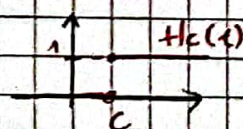
$$s \rightarrow s+1$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right] = ? \text{ ainda não podemos resolver}$$

## Funções por treços

### Função de Heaviside

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$



$$\mathcal{L} [H_c(t)] = \int_0^{\infty} H_c(t) e^{-st} dt = \int_c^{\infty} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-s(u+c)} \frac{du}{du} =$$

$(c < 0) \mathcal{L} [H_c(t)] = \mathcal{L} \left[ 1 - \frac{1}{s} \right]$   $u = t - c$



$$= e^{-sc} \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-su} du = e^{-sc} \mathcal{L}[1] = \frac{e^{-sc}}{s}$$

$$\mathcal{L}[H_c(t)f(t-c)] = e^{-sc} \mathcal{L}[f(t)]$$

porque:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H_c(t)f(t-c)] &= \int_0^{+\infty} H_c(t)f(t-c)e^{-st} dt = \\ &= \int_c^{+\infty} f(t-c)e^{-st} dt \stackrel{u=t-c}{=} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+c)} du = e^{-sc} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su} du = \\ &= e^{-sc} \mathcal{L}[f] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-sc}F(s)] = H_c(t) \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t-c)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2}\right] = \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t-1)\right) H_1(t) = (t-1)_{+} H_1(t) = (t-1)H_1(t)$$

## Problemas

14/11/2023

Horário de aulas: quarta-feira: 14:30-15:30 2-N4.26

### Serie 3

ii)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$   $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$   $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   $\vec{x} = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, c_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -x+y+z=0 \Leftrightarrow x=y+z \quad \begin{bmatrix} y+z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad -x+y+z=1 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = e^{S \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} t} S^{-1} = S e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} t} S^{-1}$$

$$e^{At} = S e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} t} S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & t e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -t e^{2t} & t e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ -t e^{2t} & t e^{2t} & e^{2t} + t e^{2t} \end{bmatrix}$$





$$\vec{x}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{A \cdot 0} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

②

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + t^6 \\ y' = -x + 2y + t^5 \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases} \quad \vec{y}(t)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^6 \\ t^5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \vec{g}(s) ds$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -x + 2y = 0 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad -2 + 2y = 1 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = S e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t} S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^{0t} & t e^{0t} \\ 0 & e^{0t} \end{bmatrix} S^{-1} = S \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 2t+1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1-2s+4s & 4t-4s \\ -t+s & 2t-2s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^6 \\ s^5 \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{bmatrix} 2t+1 \\ t+1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} (-3-2t)s^6 + 4ts^5 + 2s^5 \\ (-t-2)s^6 + s^5 + (2t+1)s^5 \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{bmatrix} 2t+1 \\ t+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(3+2t)\frac{s^7}{7} + \frac{4}{3}t^2 + \frac{s^6}{6} \\ -(t+2)\frac{s^7}{7} + \frac{s^6}{6} + (2t+1)\frac{s^6}{6} \end{bmatrix}$$

#### Serie 4

②

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathcal{L}[\cosh(bt)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2}\right] = \frac{1}{2} (\mathcal{L}[e^{bt}] + \mathcal{L}[e^{-bt}]) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+b} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{(s+b) + (s-b)}{s^2 - b^2} \right) = \frac{s}{s^2 - b^2} \end{aligned}$$



$$c) \mathcal{L}[e^{at} \cosh(bt)] = \mathcal{L}[\cosh(bt)](s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$$

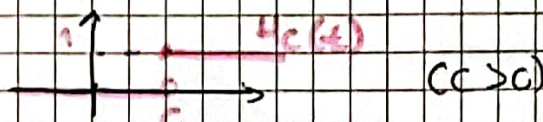
$$\int_0^{\infty} e^{at} \cosh(bt) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \cosh(bt) e^{-(s-a)t} dt$$

$$k) \mathcal{L}[H_1(t) + 3e^{-t}e^{-t}] = \mathcal{L}[H_1(t)] + 3\mathcal{L}[e^{-t}e^{-t}] =$$

$$= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{3}{e^2} \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{3}{e^2} \frac{1}{s+1}$$

## Função de Heaviside

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}[H_c(t)] = \frac{e^{-sc}}{s}$$

$$\mathcal{L}[H_c(t)f(t-c)] = e^{-sc} \mathcal{L}[f(t)]$$

ex:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = H_2(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[y'' + 2y' + 2y] = \mathcal{L}[H_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$s^2 \mathcal{L}[y] - s\overbrace{y(0)}^0 - \overbrace{y'(0)}^1 + 2(s\mathcal{L}[y] - \overbrace{y(0)}^0) + 2\mathcal{L}[y] = \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$(s^2 + 2s + 2) \mathcal{L}[y] = \frac{e^{-2s}}{s} + 1$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{e^{-2s}}{s(s^2 + 2s + 2)} + \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}[\dots]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2s + 2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] e^{-t} = (\sin t) e^{-t}$$

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

fica só o s e o -1 para para e<sup>0t</sup>  
 $s^2 + 2s + 2 = (s^2 + 2s + 1) + 1$

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

translação:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] e^{at}$$



$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s(s^2+2s+2)}\right] = H_2(t) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\right](t-2) = (*)$$

$$\mathcal{L}[H_c(t)] = \frac{e^{-sc}}{s}$$

$$\mathcal{L}[H_c(t)F(t-c)] = e^{-sc} \mathcal{L}[F(t)]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-sc}F(s)] = H_c(t) \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t-c)$$

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

$$A(s^2+2s+2) + (Bs+C)s = 1$$

$$s=0 \Rightarrow 2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$(*) \rightarrow A+B=0 \rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$(*) \rightarrow 2A+C=0 \rightarrow C = -1$$

$$\begin{aligned} (*) &= H_2(t) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2}{s} + \frac{-1/2s-1}{s^2+2s+2}\right](t-2) = H_2(t) \left(\frac{1}{2} + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/2(s+1)-1/2}{(s+1)^2+1}\right]\right)(t-2) \\ &= H_2(t) \left(\frac{1}{2} + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/2s-1/2}{s^2+1}\right]e^{-t}\right)(t-2) = H_2(t) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t\right)e^{-t}\right)(t-2) \\ &= H_2(t) \left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} \cos(t-2) - \frac{1}{2} \sin(t-2)\right)e^{-(t-2)}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[fg] \neq \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$$

produto usual

$$f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

Produto usual:

$$fg(t) = f(t)g(t)$$

~~Produto de Convolação~~

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$$

Propriedades

Distributividade

$$f * (g+h) = f * g + f * h$$

$$(g+h) * f = g * f + h * f$$



## Comutatividade

$$f * g = g * f$$

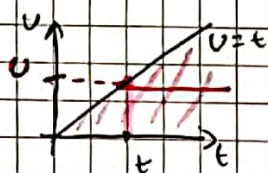
porque

$$g * f(t) = \int_0^t g(t-u) f(u) du = \int_{\substack{v=t-u \\ \Leftrightarrow u=t-v}}^0 g(v) f(t-v) \frac{dv}{dv} dv = \\ = \int_t^0 g(v) f(t-v) dv = f * g(t)$$

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$$

porque

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g] &= \int_0^{\infty} (f * g)(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(t-u) g(u) du \right] e^{-st} dt \\ &= \int_{\substack{t=0 \\ u=0}}^{\infty} f(t-u) g(u) e^{-st} du dt = \int_0^{\infty} \int_u^{\infty} f(t-u) g(u) e^{-st} dt du = \\ &= \int_0^{\infty} g(u) \left[ \int_u^{\infty} f(t-u) e^{-st} dt \right] du = \\ &= \int_0^{\infty} g(u) \left[ \int_0^{\infty} f(v) e^{-s(u+v)} \frac{dt}{dv} dv \right] du = \\ &= \int_0^{\infty} g(u) e^{-su} \left[ \int_0^{\infty} f(v) e^{-sv} dv \right] du = \left[ \int_0^{\infty} f(v) e^{-sv} dv \right] \left[ \int_0^{\infty} g(u) e^{-su} du \right] = \\ &= \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g] \end{aligned}$$



$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[FG] = \mathcal{L}^{-1}[F] * \mathcal{L}^{-1}[G]$$

ex:

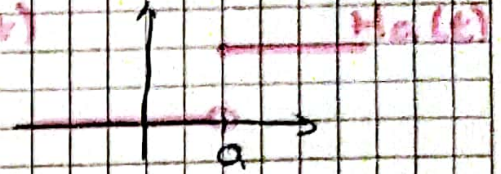
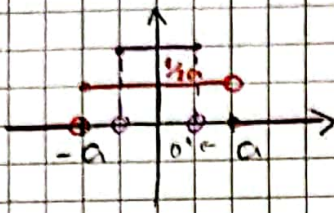
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2+1} \right] * \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2+1} \right] = \\ &= \underbrace{\sin(t)}_f * \underbrace{\sin(t)}_g = \int_0^t \sin(t-u) \sin u du = \\ &= \int_0^t (\sin t \cos u - \cos t \sin u) \sin u du = \\ &= \sin t \int_0^t \cos u \sin u du - \cos t \int_0^t \sin^2 u du = \\ &= \sin t \left[ \frac{\sin^2 u}{2} \right]_{u=0}^{u=t} - \cos t \left[ \frac{u - \sin u \cos u}{2} \right]_{u=0}^{u=t} = \end{aligned}$$



$$= \sin t \left[ \frac{\sin^2 t}{2} \right] - \cos t \left[ \frac{t - \sin t \cos t}{2} \right] = \sin t \cdot \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{t \cos t}{2}$$

(a>0)

$$\delta_a(t) = \frac{H_a(t) - H_a(t)}{2a}$$



**Definição de Dirac.**

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \delta_a(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

Não é uma função real (chama-se função generalizada ou distribuição)

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a \rightarrow 0^+} \delta_a(t) e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \frac{1}{2a} e^{-st} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{2a} \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=-a}^{t=a} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2a} \frac{e^{-sa} - e^{sa}}{(-s)} \right) \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-se^{-sa} - se^{sa}}{-2s} = \frac{-s-s}{-2s} = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}[1] = \delta(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = \mathcal{L}^{-1}[F \cdot 1] = \mathcal{L}^{-1}[F] * \mathcal{L}^{-1}[1] = \mathcal{L}^{-1}[F] * \delta$$

$\delta * f = f$   
 $f * \delta = f$   
 $\delta$  é a identidade  
do produto de  
convolução



# Superfícies em $\mathbb{R}^3$

21/11/2023

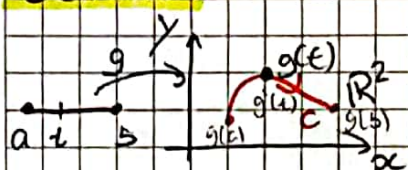
## Capítulo 5

Superfícies:

- com parametrizações
- como gráficos de funções
- como conjuntos de nível

# Parametrizações

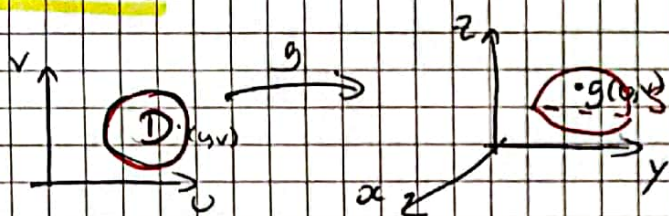
## Curvas



$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua

$g'(t)$  é tangente à curva em cada ponto

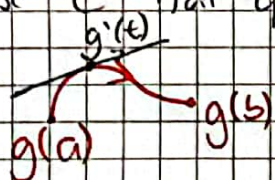
## Superfícies



$g: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  contínua

$g(u, v)$

Uma curva é regular se tiver uma parametrização  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  tal que  $g'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$

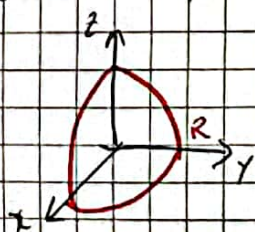


Ex:

Superfície esférica centro na origem, raio  $R$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

parametrização:



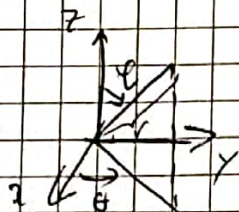
$r = R$



by Staples



coordenadas esféricas:  $(r, \theta, \varphi)$



$$g(\theta, \varphi) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$$

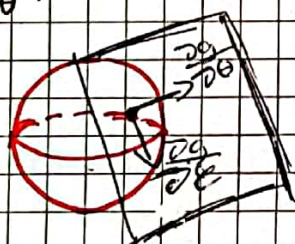
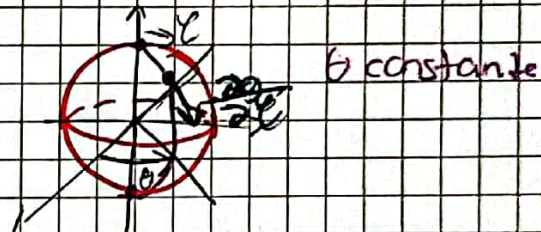
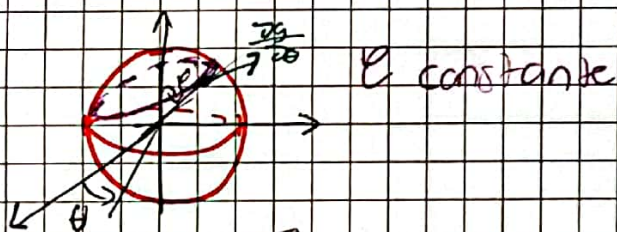
$$g: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Para  $(\theta, \varphi) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, -R \sin \varphi)$$

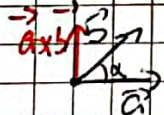
vectores tangentes  
à superfície



Se  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  e  $\frac{\partial g}{\partial \varphi}$  forem linearmente independentes, definem um plano tangente em cada ponto.

São linearmente independentes se e só se

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \text{ for sempre não nulo}$$



$$\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \sin \alpha$$

Uma superfície  $S$  é **regular** se tiver uma parametrização

$g: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$  seja sempre não nulo  
(para qualquer  $(u, v) \in \text{int } D$ )



Se  $S$  é regular;

$\frac{\partial g}{\partial u}$  e  $\frac{\partial g}{\partial v}$  são sempre linearmente indep. e definem um plano tangente.

$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$  é normal à superfície

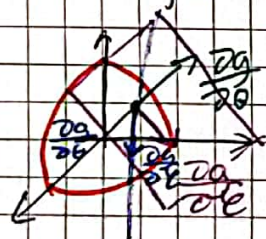
Os pontos regulares de uma superfície qualquer são aqueles em que

$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$  é não nulo.

Ex: (continuação)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) \\ -R \sin \varphi \cos \theta & R \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \end{vmatrix} = \\ &= (1,0,0) \begin{vmatrix} R \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ R \cos \varphi \cos \theta & -R \sin \varphi \end{vmatrix} - (0,1,0) \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ R \cos \varphi \cos \theta & -R \sin \varphi \end{vmatrix} + \\ &+ (0,0,1) \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \cos \theta & R \sin \varphi \cos \theta \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix} = (-R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta - \\ &-R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, -R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, -R^2 \sin \varphi \cos \varphi) = (0,0,0) \text{ imp.} \\ &\Rightarrow \text{A superfície é regular} \end{aligned}$$

vetor normal em cada ponto



Neste ponto

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \left(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, 0\right) \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, -\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$$

Espaço tangente em  $P = g\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$$T_P S = \left\{ c_1 \left(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, 0\right) + c_2 \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, -\frac{R\sqrt{2}}{2}\right) : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Plano tangente em  $P$

$$P + T_P S = \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}\right) + c_1 \left(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, 0\right) + c_2 \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, -\frac{R\sqrt{2}}{2}\right) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

expressão paramétrica do plano



## Espaço normal em $\mathbb{R}^3$

$$T_P^\perp S = \left\{ c \left( -R^2 \frac{\sqrt{2}}{2}, -R^2 \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{R^2}{2} \right) : c \in \mathbb{R} \right\}$$

## Reta normal em $\mathbb{R}^3$

$P + T_P^\perp S = \dots$  expressão paramétrica da reta

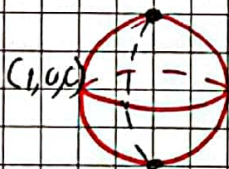
Para a expressão algébrica do plano:

$$\begin{cases} x = \frac{R}{2} + c_1 \left( -\frac{R}{2} \right) + c_2 \frac{R}{2} \\ y = \frac{R}{2} + c_1 \left( \frac{R}{2} \right) + c_2 \frac{R}{2} \\ z = R \frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 \left( -\frac{R\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = R + c_2 R \\ z = R \frac{\sqrt{2}}{2} - c_2 \frac{R\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y = R + \frac{2}{R\sqrt{2}} \left( R \frac{\sqrt{2}}{2} - z \right) R$$

$ax + by + cz = d$  eq. algébrica do plano

Com esta parametrização, podemos calcular as equações tangente e normal em cada ponto  $g(t, \theta)$  desde que  $(\theta, \phi) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[$



## Como gráficos de funções

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



$$z = f_1(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$f_1: \{x^2 + y^2 \leq R^2\} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$z = f_2(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$f_2: \{x^2 + y^2 \leq R^2\} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$g(x, y, z) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) = g(x, y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \left( 1, 0, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)$$

$$g: \{x^2 + y^2 \leq R^2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \left( 0, 1, -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)$$

vetores tangentes



per exemplo, para  $P = (0, 0, R)$  obtemos  $(1, 0, 0)$   
 $(0, 1, 0)$

vetor normal:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \left( \frac{2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \neq (0, 0, 0) \text{ e é super regular}$$

no ponto  $(0, 0, R)$  obtemos o vetor normal  $(0, 0, 1)$

# Problemas

21/11/2023

Serie 4

5)  $f(s) = \frac{e^{-3s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$   $\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F] = H_c(t) \mathcal{L}^{-1}[F](t-c)$

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = H_3(t) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right](t-3) = \frac{1}{3} H_3(t) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right](t-3) =$$

$$= \frac{1}{3} H_3(t) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+4-s^2-1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right](t-3) = \frac{1}{3} H_3(t) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right](t-3) =$$

$$= \frac{1}{3} H_3(t) \left( \sin(t-3) - \frac{1}{2} \sin(2t-6) \right) =$$

$$= \frac{1}{6} H_3(t) (2\sin(t-3) - \sin(2t-6))$$

6)  $y'' + y = \sin t$   $y(0) = 0$   $y'(0) = 1$   $\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)$

$$\mathcal{L}[y'' + y] = \mathcal{L}[\sin t] \Rightarrow s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s^2+1) \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+1} + 1 \Leftrightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2}\right] + \sin t \Leftrightarrow y = \sin t * \sin t + \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}[FG] = \mathcal{L}^{-1}[F] * \mathcal{L}^{-1}[G]$$

$$f * g = \int_0^t f(t-u)g(u)du$$

$$\sin t * \sin t = \int_0^t \sin(t-u)\sin u du = \sin t \int_0^t \cos(u)\sin u du - \cos t \int_0^t \sin^2 u du =$$

$$\sin(t-u)\sin u = (\sin t \cos(u) + \sin(-u)\cos t)\sin u =$$

$$= \sin t \cos u \sin u - \cos t \sin^2 u$$

$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u = \sin^2 u + \cos^2 u - \cos^2 u = \cos^2 u - \cos(2u) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 u = 1 - \sin^2 u - \cos(2u) \Leftrightarrow 2\sin^2 u = 1 - \cos(2u) \Leftrightarrow \sin^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{2}$$



$$* = \sin t \left[ \frac{\sin^2 u}{2} \right]_0^t - \frac{\cos t}{2} \int_0^t 1 + \cos(2u) du =$$

$$= \sin t \frac{\sin^2 t}{2} - \frac{\cos t}{2} \left[ u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right]_0^t = \sin t \frac{\sin^2 t}{2} - \frac{\cos t}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right)$$

$$= \sin t \frac{\sin^2 t}{2} - \frac{t}{2} \cos t + \frac{\cos^3 t}{2} \sin t = \frac{\sin t}{2} - \frac{t}{2} \cos t$$

$$y = \frac{3}{2} \sin t - \frac{t}{2} \cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs} F] = H_c(s) \mathcal{L}^{-1}[F](t-c)$$

$$\mathcal{L}[e^{at} F] = \mathcal{L}[F](s-a)$$

$$(2) \quad (a) \quad y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi) \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}[y'' + 2y' + 2y] = \mathcal{L}[\delta(t-\pi)] \Leftrightarrow s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0) + 2s \mathcal{L}[y] - 2y(0) + 2 \mathcal{L}[y] = e^{-\pi s}$$

$$= e^{-\pi s} \Leftrightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2} + \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} \quad \therefore y = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2 + 1} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right]$$

$$\Leftrightarrow y = H_\pi(t) (e^{-t} \sin t) + e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t \quad \mathcal{L}[\cos(2t)] = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow y = H_\pi(t) e^{\pi-t} \sin(t-\pi) + e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-t} (H_\pi(t) e^\pi \sin(t-\pi) + \cos t + \sin t) \quad \Leftrightarrow y = e^{-t} (\sin t (1 - H_\pi(t) e^\pi) + \cos t)$$

### Serie 5

$$(6) \quad \Phi(u, v) = (u-v, u+v, uv) \quad \mathbb{D} = \mathcal{D}(u, v): u^2 + v^2 \leq 1 \quad \text{circle } r=1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (1, 1, v) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-1, 1, u)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & v \\ -1 & 1 & u \end{vmatrix} = u\vec{i} - v\vec{j} + \vec{k} + \vec{i} - \vec{j} - u\vec{j} = (u-v, -u-v, 2)$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{(u-v)^2 + (-u-v)^2 + 4} = \sqrt{2(u^2 + v^2) + 4}$$

$$\iint_{\mathbb{D}} \sqrt{2(u^2 + v^2) + 4} \, du \, dv$$

$$\begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2r^2 + 4} \, r \, dr \, d\theta = \frac{2\pi}{4} \int_0^1 4r \sqrt{r^2 + 4} \, dr = \frac{\pi}{2} \frac{2}{3} [(2r^2 + 4)^{3/2}]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{3} (6^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{\pi}{3} (6\sqrt{6} - 8)$$



# superfícies em $\mathbb{R}^3$

24/11/2023

- com parametrizações
- como gráficos funções
- como conjuntos nível

## Parametrização

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad D \subset \mathbb{R}^2 \quad g(u, v)$$

ex:

sup. esférica raio  $R$  centro origem

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} g(\theta, \varphi) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi) \\ g: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

$$\frac{dg}{d\theta}$$

vetores tangentes à superfície em cada ponto

$$\frac{dg}{d\varphi}$$

$$\frac{dg}{d\theta} \times \frac{dg}{d\varphi} \rightarrow \text{normal à superfície}$$

$\rightarrow S$  é regular se  $\frac{dg}{d\theta} \times \frac{dg}{d\varphi} \neq 0$  em todos os pontos

Neste exemplo só podemos determinar os vetores tangentes e normais se  $(\theta, \varphi) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[$

## Gráfico Função

ex:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$\Rightarrow z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$z = f_1(x, y)$$

$$(x, y, z) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

$$f_1: \{x^2 + y^2 \leq R^2\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$$

$$x = f_1(y, z)$$



$$x = f_2(y, z)$$



$$z = f_1(x, y)$$



$$z = f_2(x, y)$$



# Conjunto nível

$$F(x, y, z) = C$$

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$\nabla F$  é normal em cada ponto

ex:

sup. esférica e o conjunto de nível

$$F(x, y, z) = R^2$$

$\nabla F = (2x, 2y, 2z)$  é um vetor normal  
(e os vetores tangentes são perpendiculares)

# Áreas de superfícies

para curvas

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

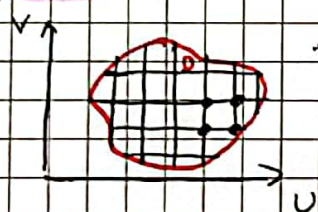
a b



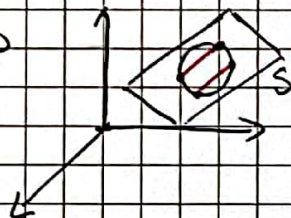
Queremos decomposições cada vez mais finas

comprimento:  $\text{compr}(C) = \int_a^b \|g'(t)\| dt$

para superfícies



g



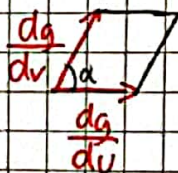
$$g(u, v)$$

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

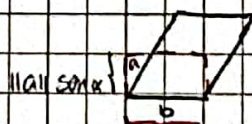
Com decomposições cada vez mais finas, obtemos melhores aproximações para a área

No limite obtemos:  $\text{Área}(S) = \iint_D \| \frac{dg}{du} \times \frac{dg}{dv} \| du dv$

Cada retângulo tende para um paralelogramo



Área?



Área do paralelogramo:  $\|b\| \|a\| \sin \alpha = \|a \times b\|$



ex: Superfície esférica raio R centro na origem

parametrização

$$\hookrightarrow g(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$$

$$g: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

vetores tangentes

$$\hookrightarrow \frac{dg}{d\theta} = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

$$\frac{dg}{d\varphi} = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, -R \sin \varphi)$$

vetores normais

$$\hookrightarrow \frac{dg}{d\theta} \times \frac{dg}{d\varphi} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \begin{vmatrix} R \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \sin \theta & 0 \\ R \cos \varphi \cos \theta & -R \sin \varphi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -R \sin \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix} \right) = (-R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, -R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, -R^2 \sin \varphi \cos \varphi)$$

vetor normal em cada ponto

$$\hookrightarrow \left\| \frac{dg}{d\theta} \times \frac{dg}{d\varphi} \right\| = \sqrt{R^4 \sin^4 \varphi \cos^2 \theta + R^4 \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + R^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} =$$

$$= \sqrt{R^4 \sin^4 \varphi + R^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = \sqrt{R^4 \sin^2 \varphi} = R^2 \sin \varphi$$

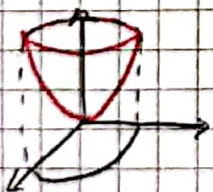
$$\text{Área}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} [-R^2 \cos \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -R^2(-1-1) d\theta = \int_0^{2\pi} 2R^2 d\theta = 4\pi R^2$$

Área  $\pi R^2$   ~~$\pi R^2$~~   $\left[ \begin{matrix} 2\pi R^2 \\ 2\pi R^2 \end{matrix} \right]$

ex:

Área parabolóide  $z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$



parametrização

$$\hookrightarrow (x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2) = g(x, y)$$

$$g: \{x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

w

$$\frac{dg}{dx} =$$

$$\frac{dg}{dy} =$$

$$\frac{dg}{dx} \times \frac{dg}{dy} =$$



→ com coordenadas cilíndricas:

$$(p, \theta, z) \quad g(p, \theta) = (p \cos \theta, p \sin \theta, p^2)$$

$$\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \\ z = p^2 \end{cases}$$

$$g: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\frac{dg}{dp} = (\cos \theta, \sin \theta, 2p)$$

$$\frac{dg}{d\theta} = (-p \sin \theta, p \cos \theta, 0)$$

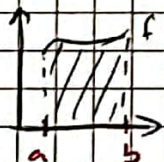
$$\frac{dg}{dp} \times \frac{dg}{d\theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & \sin \theta & 2p \\ -p \sin \theta & p \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-2p^2 \cos \theta, -2p^2 \sin \theta, p)$$

$$\left\| \frac{dg}{dp} \times \frac{dg}{d\theta} \right\| = \sqrt{4p^4 \cos^2 \theta + 4p^4 \sin^2 \theta + p^2} = \sqrt{4p^4 + p^2} = p \sqrt{4p^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} p \sqrt{4p^2 + 1} \, d\theta \, dp = \int_0^1 2\pi p \sqrt{4p^2 + 1} \, dp = \pi \int_0^1 2p (4p^2 + 1)^{1/2} \, dp = \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 8p (4p^2 + 1)^{1/2} \, dp = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{(4p^2 + 1)^{3/2}}{3/2} \right]_{p=0}^{p=1} = \frac{\pi}{3} [5^{3/2} - 1] = \frac{\pi}{3} [5\sqrt{5} - 1] \end{aligned}$$

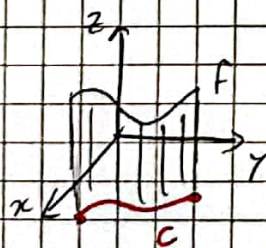
## Comprimentos de curvas

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$



$$\text{comp} = \int_a^b \|g'(t)\| \, dt$$

é um caso particular de um integral de linha de uma função escalar

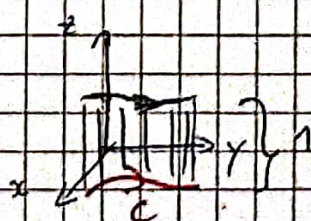


→ Área e o integral de linha  $\int_C f \, dg$

$$\begin{aligned} g: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f: C &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\int_C f \, dg = \int_a^b f(g(t)) \|g'(t)\| \, dt$$

$$\text{comp} = \int_C 1 \, dg$$

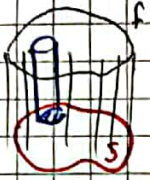




# Integrais de superfície

$S$  com parametrização

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g(u, v)$$



$$f: S \rightarrow \mathbb{R}$$

O integral de superfície dá o volume entre a superfície e o gráfico

$$\iint_S f \, ds = \iint_D f(g(u, v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du \, dv$$

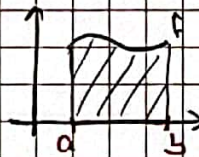
Área de  $S$  é um caso particular:  $A(S) = \iint_S 1 \, ds$

# Integrais de superfície 28/11/2023

Para curvas:

$C$  com parametrização

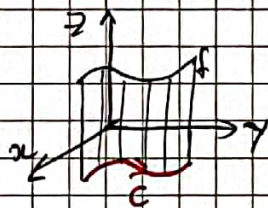
$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$



$$\int_a^b f(x) \, dx$$

## Integral de funções escalares

$$f: C \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\int_C f \, dg = \int_a^b f(g(t)) \|g'(t)\| \, dt$$

## Integral de superfície de funções escalares

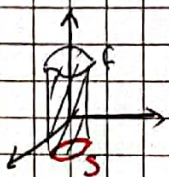
$S$  com parametrização

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}^3$$



$$f: S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\iint_S f \, ds = \iint_D f(g(u, v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du \, dv$$

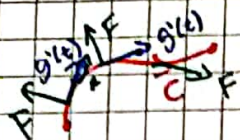




Para curvas:

$$F: c \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\int_c F dg = \int_a^b F(g(t)) \cdot g'(t) dt$$



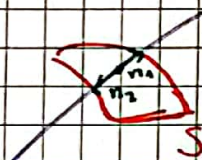
trabalho de F no movimento ao longo da curva  
(interessa o sentido)

Para superfícies:

$$\iint_S F \cdot n \, ds = \iint_D F(g(u,v)) \left( \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) du dv$$

direção normal

(integral de superfície no sentido da normal unitária n)



Fluxo de F ao longo de S



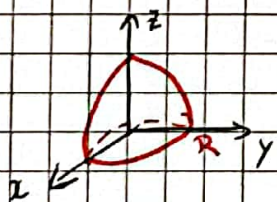
(representa o trabalho de F quando o movimento atravessa S)

Ex:

Fluxo de  $F(x,y,z) = (x,y,z)$  ao longo da meia superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (z \geq 0)$$

no sentido da normal unitária exterior



parametrização:

$$g(\theta, \varphi) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$$

$$g: [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

para  $(\theta, \varphi) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, -R \sin \varphi)$$

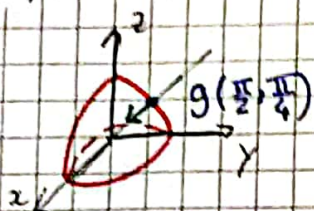
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} = (-R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, -R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, -R^2 \sin \varphi \cos \varphi)$$

vetor normal

exterior?



Podemos escolher um ponto



neste ponto:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} = \left( 0, -\frac{R^2}{4}, -\frac{R^2}{2} \right)$$

normal interior

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(g(u,v)) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \right) d\phi d\theta =$$

porque queremos a normal exterior

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi) \cdot$$

$$(-R^2 \sin^2 \phi \cos \theta, -R^2 \sin^2 \phi \sin \theta, -R^2 \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi) \cdot$$

$$(R^2 \sin^3 \phi \cos \theta, R^2 \sin^3 \phi \sin \theta, R^2 \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (R^3 \sin^3 \phi \cos^2 \theta + R^3 \sin^3 \phi \sin^2 \theta + R^3 \sin \phi \cos^2 \phi) d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R^3 \sin \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} [ -R^3 \cos \phi ]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} d\theta = \int_0^{2\pi} [ -R^3 (0 - 1) ] d\theta =$$

$$= 2\pi R^3$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D \mathbf{F}(g(u,v)) \left( \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) du dv$$

unitária

vetor normal (pode não ser unitário)

Se vimos como integral de superfície da função escalar  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \iint_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(g(u,v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du dv =$$

$$= \iint_D \mathbf{F}(g(u,v)) \frac{\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\|} \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du dv$$

ex:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad z \geq 0 \quad (\text{normal unitária exterior})$$



sem parametrização:

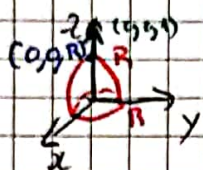
$$\iint_S F \cdot n \, dS$$

A superfície é o conjunto de nível  $G = R^2$  de  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Um vetor normal é  $\nabla G = (2x, 2y, 2z)$

Uma normal unitária é

$$\frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4R^2}} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$$



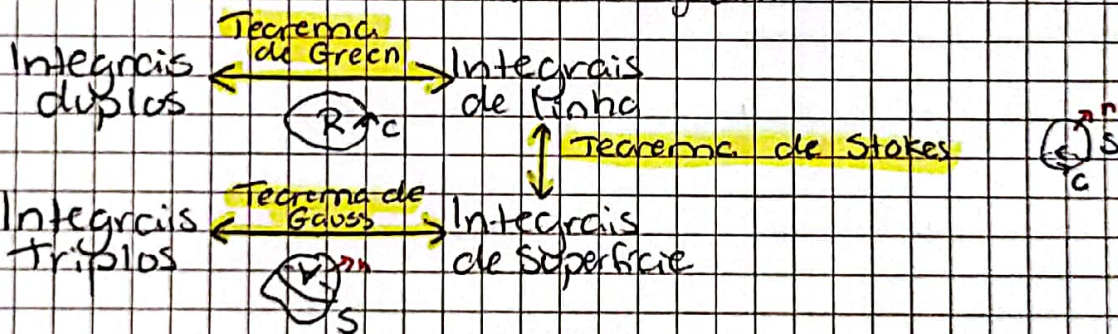
Em  $(0, 0, R)$  o vetor é  $(0, 0, 1)$

exterior

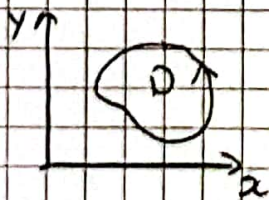
$$\iint_S (x, y, z) \cdot \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right) dS = \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} dS = \iint_S R dS =$$

$$= R \iint_S 1 dS = R \text{ Área}(S) = R \cdot 2\pi R^2 = 2\pi R^3$$

4  $\pi R^2$  → área passada  
mas é metade logo  $2\pi R^2$



## Teorema de Green



$C$  - curva fechada percorrida uma vez no sentido direto limitado numa região  $D$

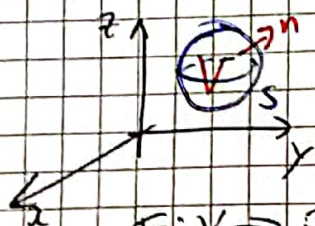
$F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  classe  $C^1$   
 $F = (P, Q)$

Então,

$$\oint_C F \, dg = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy$$



# Teorema de Gauss (ou divergência)



S - superfície fechada englobando um volume V

n - normal unitária exterior

$F: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$

Então, 
$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V (\underbrace{\text{div } F}_{\text{divergência}}) \, dx \, dy \, dz$$

onde

$$\text{div } F = \text{div}(F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

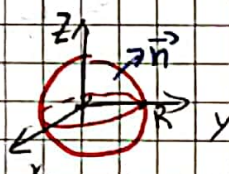
Ex:

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

S - superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

n - normal unitária exterior



Pelo teorema,

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \text{div } F \, dx \, dy \, dz = *$$

$$\text{div } F = \text{div}(x, y, z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\begin{aligned} * &= \iiint_V 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = 3 \, \text{vol}(V) = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \\ &= 4\pi R^3 \end{aligned}$$

nota -  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  escalar

Gradiente

$$\text{grad}(\varphi) = \nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vetorial  
 $F = (F_1, F_2, F_3)$

divergência

$$\text{div } F = \nabla F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$



rotacional

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

# Problemas

28/11/2023

Série 5

10)  $P(1,0,0)$

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

$$g(u,v) = (u, v, 1 - \sqrt{u^2 + v^2}) \quad \text{vetores tangentes}$$

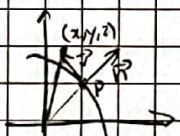
$$\frac{\partial g}{\partial u} = \left( 1, 0, -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \left( 0, 1, -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{vmatrix} = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right) \rightarrow \text{norma } \sqrt{1 + \frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{u^2 + v^2}} = \sqrt{2}$$

ser 0 (se o c' uma  
diferencial de uma regular  
e vet or normal  
o sup.)

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} (1,0) = (1,0,1) = \vec{n}$$

$$r: (1,0,0) + t(1,0,1) = (1+t, 0, t), t \in \mathbb{R}$$



$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x,y,z) - P \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-1,y,z) \cdot (1,0,1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 + 0 + z = 0 \Leftrightarrow x+z = 1$$

$$(x,y,z) = P + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = (x,y,z) - P$$

$$\text{plano tangente} \Rightarrow (x,y,z) = (1,0,0) + c_1(1,0,-1) + c_2(0,1,0)$$

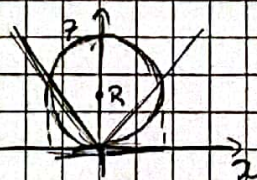
$$\begin{cases} x = 1 + c_1 \\ y = c_2 \\ z = -c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x-1 \\ y = c_2 \\ z = -x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = c_2 \\ z+x = 1 \end{cases}$$

substituir  $u=t, v=0$  em  $\frac{\partial g}{\partial u}$   $\rightarrow$  sub  $u=1, v=0$  em  $\frac{\partial g}{\partial u}$

9)  $z^2 = x^2 + y^2 \quad z \geq 0$   
 $x^2 + y^2 - z^2 \leq 2Rz \quad R > 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz + R^2 \leq R^2$$

$$x^2 + y^2 + (z-R)^2 \leq R^2$$



$$z^2 + z^2 \leq 2Rz \Leftrightarrow z^2 \leq Rz \Leftrightarrow z^2 - Rz \leq 0 \quad z(z-R) = 0 \Leftrightarrow z=0 \vee z=R$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$$

$\rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow z \geq 0 \rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$g(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$$



arc



$$\frac{\partial g}{\partial u} = \left( 1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \left( 0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \right)$$

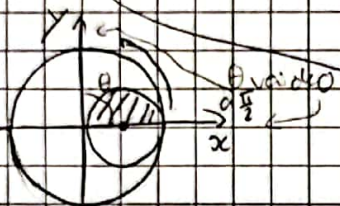
$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{vmatrix} = \left( -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right)$$

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| = \sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{u^2+v^2} + 1} = \sqrt{2}$$

$$\iint_{\sqrt{u^2+v^2} \leq R} \sqrt{2} \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{2} \, r \, dr \, d\theta = 2\sqrt{2}\pi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R = \sqrt{2}\pi R^2$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

8)  $x^2 + y^2 = 2$  (circle)  $\Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$



polar

$$r^2 = r \cos \theta$$

$$r^2 - r \cos \theta = 0 \Leftrightarrow r(r - \cos \theta) = 0 \quad 0 \leq r \leq \cos \theta$$

$$(r, \theta): 0 \leq r \leq \cos \theta; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$g(u, v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \left( 1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \left( 0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1 \right)$$

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \, du \, dv &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \, dr \, d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} -2r(1-r^2)^{-1/2} \, dr \, d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \left[ \sqrt{1-r^2} \right]_0^{\cos \theta} \, d\theta = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$A(S_1) = 4 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2\pi - 4$$

$$A(S_2) = 4\pi - 2\pi A_1 = 2\pi + 4$$

$$\frac{A(S_2)}{A(S_1)} = \frac{\pi + 2}{\pi - 2}$$



# Teorema da Divergência

05/12/2023

(GAUSS)



$S$  - superfície regular fechada englobando um volume  $V$

$F: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$

$n$  - normal unitária exterior

Então, 
$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

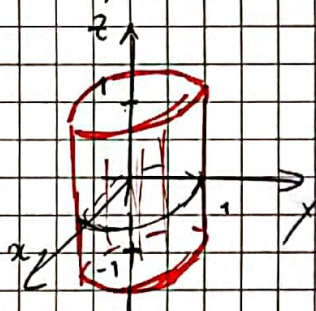
$F = (F_1, F_2, F_3)$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

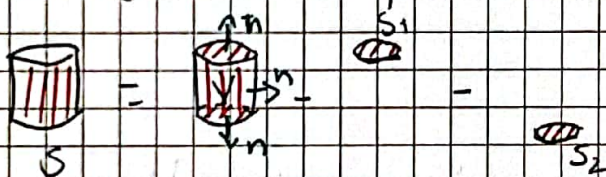
ex:

Calcular o fluxo de  $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, z)$  ao longo da sup. cilíndrica

$x^2 + y^2 = 1, z \in [-1, 1]$



Como  $S$  não é fechada, não podemos usar diretamente o problema



$$\iint_S F \cdot n \, dS = \underbrace{\iint_{S \cup S_1 \cup S_2} F \cdot n \, dS}_{3\pi} - \iint_{S_1} F \cdot n \, dS - \iint_{S_2} F \cdot n \, dS$$

$$\iint_{S \cup S_1 \cup S_2} F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div}(xy^2, x^2y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = y^2 + x^2 + 1$$

$$\iiint_V (1 + x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

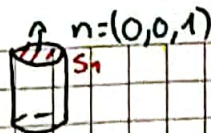
em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 (1 + \rho^2) \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = 2\pi \cdot 2 \int_0^1 (\rho + \rho^3) \, d\rho = 4\pi \left[ \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \\ &= 4\pi \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] = 3\pi \end{aligned}$$



$$\iint_{S_1} F \cdot n \, ds$$

normal unitária exterior



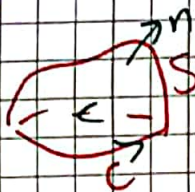
$$= \iint_{S_1} (xy^2, x^2y, z)(0, 0, 1) \, ds = \iint_{S_1} z \, ds = \iint_S 1 \, ds = \text{Área}(S_1) = \pi$$

$$\iint_{S_2} F \cdot n \, ds$$



$$= \iint_{S_2} (xy^2, x^2y, z)(0, 0, -1) \, ds = \iint_{S_2} -z \, ds = \iint_S 1 \, ds = \text{Área}(S_2) = \pi$$

## Teorema de Stokes



$S$  - superfície regular orientável apoiada numa curva  $C$  fechada, regular, simples

$F: S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$

$$\text{Então, } \iint_S (\text{rot } F) \cdot n \, ds = \oint_C F \cdot dg$$

O sentido da normal e da curva têm de ser compatíveis de acordo com a regra da mão direita

### Curva regular:

tem uma parametrização  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

de classe  $C^1$  e tal que  $g'(t) \neq 0$  ( $t \in ]a, b[$ )

### Curva fechada:

$$g(a) = g(b)$$



simples

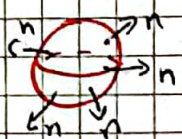


não simples

### Curva simples

não se cruza sobre si própria ( $g$  é injectiva em  $]a, b[$ )

$S$  é orientável se existir uma normal unitária contínua  $n: S \rightarrow \mathbb{R}^3$



(tem duas faces)

Ex: de não orientável

Banda de Möbius



sup. cilíndrica orientável





se tem uma face não orientável

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

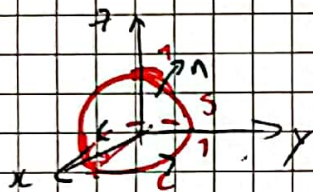
ex:

$$F(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$$

Calcular o fluxo de rot F através da meia superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$$

no sentido da normal exterior



S é regular, orientável

$$G: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = (x, y, z)$$

normal unitária exterior  
contínua  
⇒ orientável

F é de classe  $C^1$

C - fechada, regular, simples

Podemos aplicar o teorema

$$\iint_S (\text{rot } F) \cdot n \, dS = \oint_C F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(t)) g'(t) \, dt =$$

parametrização de C:

$$g(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$$g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

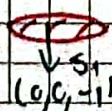
$$g'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) \, dt = \int_0^{2\pi} -1 \, dt =$$

$$= -2\pi$$

Com o teorema da divergência:





$$\iint_S (\text{rot } F) \cdot n \, ds = \iint_{S \cup S_1} (\text{rot } F) \cdot n \, ds - \iint_{S_1} (\text{rot } F) \cdot n \, ds =$$

$$= \underbrace{\iint_{S \cup S_1} (\text{rot } F) \cdot n \, ds}_{=0} - \iint_{S_1} (\text{rot } F) \cdot n \, ds = *$$

$$\text{div rot } F = 0$$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$\text{rot } F = (0 - 0, 0 - 2e^{xz}, -1 - 1) = (0, -2e^{xz}, -2)$$

$$* = \iint_{S_1} (0, -2e^{xz}, -2) \cdot (0, 0, -1) \, ds = - \iint_{S_1} 2 \, ds = -2 \text{Area}(S_1) = -2\pi$$

## T. Stokes

$$\iint_S (\text{rot } F) \cdot n \, ds = \oint_C F \cdot dg$$

Se quisermos

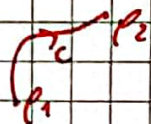
$\iint_S F \cdot n \, ds$ , não podemos usar o teorema de Stokes diretamente

Se  $F = \text{rot } A$  para algum  $A$

$$\text{então } \iint_S F \cdot n \, ds = \iint_S (\text{rot } A) \cdot n \, ds = \oint_C A \cdot dg$$

Se existir,  $A$  é um **potencial vetorial** para  $F$

Se  $F = \nabla \varphi$ ,  $F$  é um campo conservativo  
 $\varphi$  é um potencial escalar para  $F$



$$\int_C F \cdot dg = \varphi(p_2) - \varphi(p_1)$$

**$F = \nabla \varphi \Rightarrow F$  campo fechado (derivadas cruzadas iguais)**

$\Leftrightarrow$  domínio é simplesmente conexo ou  $\text{rot } F = 0$

**$F = \text{rot } A \Rightarrow \text{div } F = 0$**

$\Leftrightarrow$  domínio é simplesmente conexo

$$\text{rot } A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$



$$F = (y, -z, e^{xy})$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y} (-z) + \frac{\partial}{\partial z} (e^{xy}) = 0$$

domínio é  $\mathbb{R}^3$ , simpl. conexo

$\Rightarrow$  existe um potencial vetorial  $A$

Para descobrir  $A$ , resolvemos  $\operatorname{rot} A = F$

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = -z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = e^{xy} \end{cases}$$

Para potenciais escalares:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 \end{cases}$$

Se quisermos por exemplo  $A_1 = 0$ ,

da 2ª eq,  $A_3 = \int z \, dz = \frac{z^2}{2} + c_1(y, z)$

da 3ª eq,  $A_2 = \int e^{xy} \, dz = \frac{e^{xy}}{y} + c_2(y, z)$

da 1ª eq,  $\frac{\partial c_1}{\partial y} - \frac{\partial c_2}{\partial z} = y$

Se pusermos por exemplo  $c_2 = 0$

$$c_1 = \int y \, dy = \frac{y^2}{2} + c_3(z)$$

podemos pôr  $c_3 = 0$

$$A = \left( 0, \frac{e^{xy}}{y}, \frac{z^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)$$



# Problemas

05/12/2023

Série 5 - Intégrais de Surface

(3) a)  $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, -1)$   
 $z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 0 \leq z \leq 1$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$g(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1\right) = -\vec{r} \quad 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\sqrt{u^2 + v^2} \leq 1} (0, 0, -1) \cdot \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1\right) du dv =$$

$$= \iint_{\sqrt{u^2 + v^2} \leq 1} 1 \, du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr d\theta = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi$$

b)  $\vec{F}(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{z}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{z}}{2}\right)$

$$x = r \cos \theta = u$$

$$y = r \sin \theta = v$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\sqrt{u^2 + v^2} \leq 1} \left(-\frac{\sqrt{z}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{z}}{2}\right) \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, -1\right) du dv =$$

$$= -\frac{\sqrt{z}}{2} \iint_{\sqrt{u^2 + v^2} \leq 1} \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - 1\right) du dv = -\frac{\sqrt{z}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left(\frac{r \cos \theta}{r} - 1\right) dr d\theta =$$

$$= -\frac{\sqrt{z}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos \theta - 1) d\theta = -\frac{\sqrt{z}}{4} [\sin \theta - \theta]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{z}}{2} \pi$$

(6)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2 + y^2)^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$m(x, y, z) = \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)^3}$$

$$\iint_S m(x, y, z) \, dS$$

$$z = (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^2 = r^4$$

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta, 4r^3)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = (-4r^4 \cos \theta, -4r^4 \sin \theta, r)$$

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{16r^8 \cos^2 \theta + 16r^8 \sin^2 \theta + r^2} = \sqrt{16r^8 + r^2}$$



by Similes

Scanned with CamScanner



$$\iint_S m(x, y, z) \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+16r^6} \sqrt{16r^6+r^2} \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1+16r^6} \sqrt{1+16r^6} \, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r + 16r^7 \, dr = 2\pi \left( \frac{1}{2} + 2 \right) = 5\pi$$

Sei 6

②  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$   $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$

$\vec{F}(x, y, z) = (1, 1, z(x^2 + y^2)^2)$   $\vec{n}$  exterior

$S_1 = \text{"tampa de cima"} = x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$

$S_2 = \text{"tampa de baixo"} = x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz$

sub  $S_2$

$$\iiint_V (x^2 + y^2)^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \, dr \, d\theta \, dz = 2\pi \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

$x = r \cos \theta$   
 $y = r \sin \theta$   
 $z = z$

do det da jacobiano da transformação

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{\pi}{3} - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$

$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} z(x^2 + y^2)^2 \, dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 + r^2)^2 \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r (1 + r^2)^2 \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{3}$

$\vec{F} \cdot \vec{n} = (1, 1, z(x^2 + y^2)^2) \cdot (0, 0, 1)$

$g(u, v) = (u, v, 1) \quad \frac{\partial g}{\partial u} = (1, 0, 0) \quad \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 1, 0) \quad \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 0, 1)$

$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$

$\vec{F} \cdot \vec{n} = (1, 1, z(x^2 + y^2)^2) \cdot (0, 0, -1) = -z(x^2 + y^2)^2$

$-\iint_{S_2} z(x^2 + y^2)^2 \, dS = -\iint_{S_2} 0 \, dS = 0$

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - 0 = 0$



(c)  $F(x, y, z) = (xz + y^2 + x, yz^3 + y, x^2 z^4)$

$S = S_1 \cup S_2$

$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$

$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, z \geq 1\}$

$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{-\pi}^{\pi} \vec{F} \, dg$

$t \in [0, 2\pi]$   
 $g(t) = (\cos t, \sin t, 0)$        $g'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$\int \vec{F} \, dg = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt =$

$= \int_0^{2\pi} -\sin t \cos t + \sin t \cos t \, dt = 0$

# Séries de Fourier

12/12/2023

## Séries de Taylor

Para certas funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (a \in \mathbb{R})$$

Dada  $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$  definimos os coeficientes de Fourier:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (n=0, 1, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

A série de Fourier de  $f$  é

$$SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

## Convergência da Série de Fourier

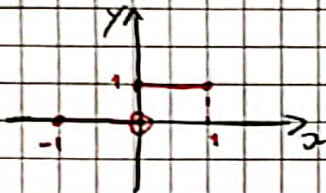
Se  $f$  é seccionalmente contínua em  $[-l, l]$  (com um número finito de descontinuidades).



$$SF(x) \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ é contínua em } x \in ]-l, l[ \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se } f \text{ não é contínua em } x \in ]-l, l[ \\ \frac{f(-l^+) + f(l^-)}{2} & \text{se } x = l \end{cases}$$

ex:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in ]-1, 0[ \\ 1, & x \in ]0, 1[ \end{cases} \quad l = 1$$



seccionalmente contínua  
 $\Rightarrow$  tem série de Fourier convergente

$$(n \geq 1) \quad a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_0^1 \cos(n\pi x) dx =$$

$$= \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n\pi} (\sin(n\pi) - 0) = 0$$

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1$$

$$(n \geq 1) \quad b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right) dx = \int_0^1 \sin(n\pi x) dx =$$

$$= -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$$



$$\sin(n\pi) = 0$$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$$

A série fica  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi x)$

A série converge para:

$$\begin{cases} 0, & x \in ]-1, 0[ \\ 1, & x \in ]0, 1[ \\ \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{f(-1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$



Em  $x = \frac{1}{2}$  :  $Sf\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$  porque  $f$  é contínua em  $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \text{ (par)} \\ \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right), & n = 2k+1 \text{ (ímpar)} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} (-1)^k = \frac{1}{2}$$

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{2k+1} = 4 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots \right)$$

ex:

$f(x) = x, x \in [-1, 1]$   $\ell = 1$

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

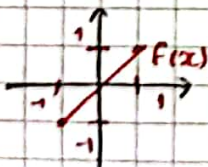
$$n \geq 1 \quad a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \int_{-1}^1 x \cos(n\pi x) dx = \frac{x \sin(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) dx = 0 - \frac{1}{n\pi} \left[ -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{(n\pi)^2} [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] = 0$$

$$n \geq 1 \quad b_n = \int_{-1}^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{x \cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) + \cos(-n\pi)) - \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \right]_{-1}^1 = \frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

A série fica:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x)$

A série converge para:  $f(x) = x$  se  $x \in ]-1, 1[$

$$\frac{f(1-) + f(-1+)}{2} = 0 \text{ se } x = \pm 1$$



Em  $x = \frac{1}{2}$  :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

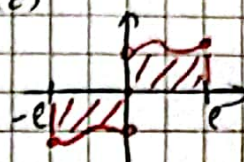
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} (-1)^k = \frac{1}{2}$$

$= (-1)^k$  para  $n = 2k+1$  (ímpar)



Se  $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$  for ímpar ( $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in [-l, l]$ )

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \underbrace{f(x)}_{\text{ímpar}} \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{\text{par}} dx = 0$$



$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \underbrace{f(x)}_{\text{ímpar}} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{\text{ímpar}} dx =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{\text{par}} dx$$



par:  $f(x) = f(-x)$

Se  $f$  é ímpar,  $a_n = 0$  e obtemos uma série de senos.

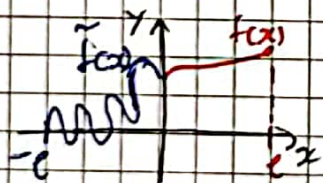
Se  $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$  é par então

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{\text{par}} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{\text{ímpar}} dx = 0$$

Se  $f$  é par,  $b_n = 0$  e obtemos uma série de cossenos.

Se for dada:  $f: [c, l] \rightarrow \mathbb{R}$ , não existe diretamente série de Fourier.



Se obtivermos uma extensão  $\tilde{f}: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ , já há série de Fourier.

Se escolhermos uma extensão par para  $f$ :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [c, l] \\ f(-x), & x \in [-l, -c] \end{cases}$$

obtemos uma série de cossenos para  $\tilde{f}$  (e para  $f$  em  $[c, l]$ )

Se escolhermos uma extensão ímpar para  $f$ :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [c, l] \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & x \in [-l, -c] \end{cases}$$



não tem extensão ímpar a  $[-l, l]$

obtemos uma série so de senos.



ex:

$$f(x) = 1 \quad f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Como uma soma de cossenos:  
(extensão par)

$$b_n = 0 \quad a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \dots$$

Como uma soma de senos:  
(extensão ímpar)

$$a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx$$

# Problemas

12/12/2023

Série 6

①

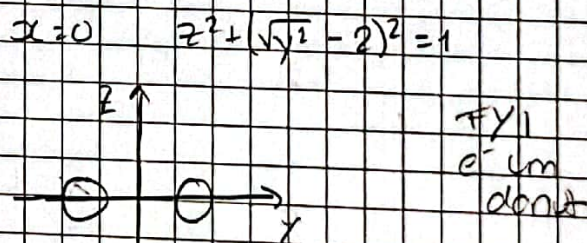
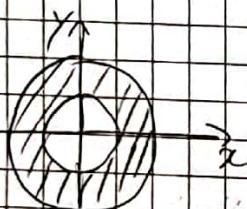
$$F(x, y, z) = (y, 0, z) \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1, z \geq 0\}$$

$\vec{n}$  - 3ª componente positiva

$$a) \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$z = \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2} \quad 1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 \geq 0 \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 \leq 1$$

$$-1 < \sqrt{x^2 + y^2} - 2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3$$



$S_1 = \text{"Fameta de S"}$

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$$

$$\iiint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \text{div } \vec{F} \, dx \, dy \, dz = 0$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 2 \iint_{S_1} dS = 2 A(S_1) = 2(9\pi - \pi) = 16\pi$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (y, 0, z) \cdot (0, 0, -1) = -z$$

normal exterior embaixo



b)  $\vec{V}(x,y,z) = (\phi(x,y,z), 0, 0)$  rot  $\vec{V} = \vec{F}$   $\phi(2,0,0) = 0$

rot  $\vec{V} = \left(0, \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \phi = C + f(x,y) \quad C \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2 \Rightarrow \phi = 2y + f_2(x,z)$

$\phi = 2y + C$

$0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

$\vec{V} = (-2y, 0, 0)$

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{g} = \int_{C_1} \vec{V} \cdot d\vec{g} + \int_{C_2} \vec{V} \cdot d\vec{g} = *$

$g_1(t) = (\cos t, -\sin t, 0)$

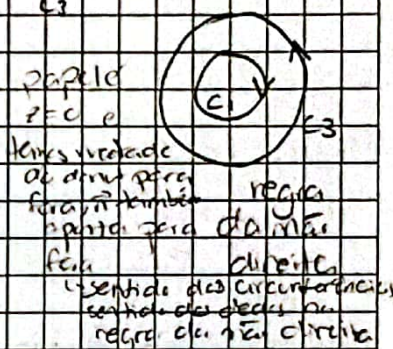
$g_1'(t) = (-\sin t, -\cos t, 0)$

$g_2(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$

$g_2'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 0)$

$* = \int_0^{2\pi} (2\sin t, 0, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) \, dt +$

$+ \int_0^{2\pi} (-6\sin t, 0, 0) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0) \, dt = \int_0^{2\pi} 16 \sin^2 t \, dt \dots$



## Série 7

(2)

$g(x) = 1 - |x|$  em  $[-1, 1]$

(a)  $a_n = \int_{-1}^1 g(x) \cos(n\pi x) \, dx = 2 \int_0^1 (1-x) \cos(n\pi x) \, dx =$   $g(x)$  é par

$= \frac{2}{n\pi} [\sin(n\pi x)]_0^1 - 2 \left( \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right)_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x) \, dx =$

$= \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x) \, dx = -\frac{2}{(n\pi)^2} [\cos(n\pi x)]_0^1 = -\frac{2}{(n\pi)^2} ((-1)^n - 1)$

$a_0 = \int_{-1}^1 1 - |x| \, dx = 2 \int_0^1 1 - x \, dx = 1$

$b_n = \int_{-1}^1 g(x) \sin(n\pi x) \, dx = 0$

impar como o integrando é simétrico = 0

$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(n\pi)^2} ((-1)^n - 1) \cos(n\pi x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(n\pi x) =$



$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x)$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \gamma(-) \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)\pi x) \stackrel{x=0}{=} \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \gamma(-)$$

$$E: g(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \gamma(-) \stackrel{1}{=} \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \gamma(-) \gamma = \frac{\pi^2}{8}$$

a série em  $x=0$  converge para  $g(0)$

## Equações Diferenciais

15/12/2023

### Particulares

As funções podem depender de mais uma variável e aparecem derivadas parciais  $u(x, y)$

### Equações de 1ª ordem lineares

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = d(x, y)$$

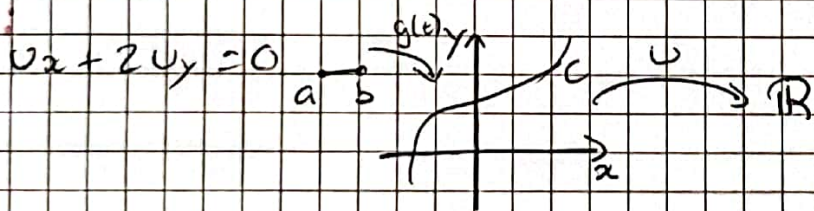
$d(x, y) = 0 \Rightarrow$  homogêneas

### Método das curvas características

Notação:  $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$$

Ex:



Queremos descobrir as curvas  $c$  no plano onde  $u$  é constante:

$$g(t) = (x(t), y(t))$$

Queremos  $u(g(t))$  seja constante  
 $u(x(t), y(t)) = u$

$$\frac{du}{dt} = 0$$

$$\frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = t + c_1 \\ y(t) = 2t + c_2 \end{cases} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$g(t) = (t + c_1, 2t + c_2) \quad t \in \mathbb{R}$$

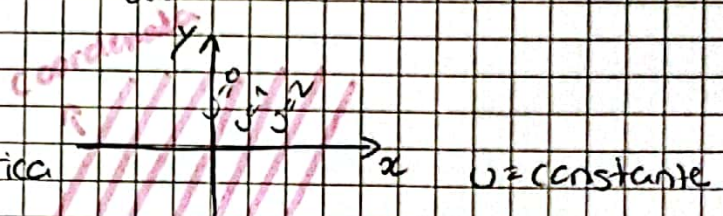
$\Rightarrow y = y(x)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (\text{quando } \frac{dx}{dt} \neq 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y(x) = 2x + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

em cada curva característica temos  $u$  constante



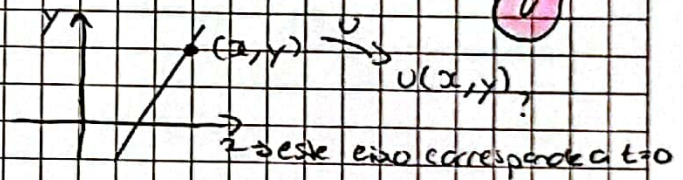
# Problema de Cauchy

$$u_x + 2u_y = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = 0$$

$$u(x, 0) = \frac{x}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2 \\ \frac{du}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t + c_1(s) \\ y = 2t + c_2(s) \\ u = c_3(s) \end{cases} \quad (*)$$



$$(x, y) \rightarrow (s, t)$$

Para  $t=0$

$$\begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ u = s \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} s = c_1(s) \\ 0 = c_2(s) \\ s = c_3(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = 2t \\ u = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{y}{2} \\ s = \end{cases}$$

$$(x, y) \rightarrow (s, t)$$

$$\begin{aligned} u(s, t) &= s \\ u(x, y) &= ? \end{aligned}$$

$$2^a \text{ eq } t = \frac{y}{2}$$

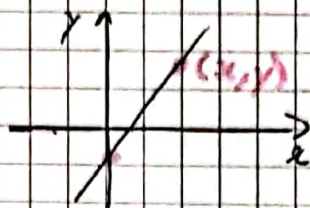
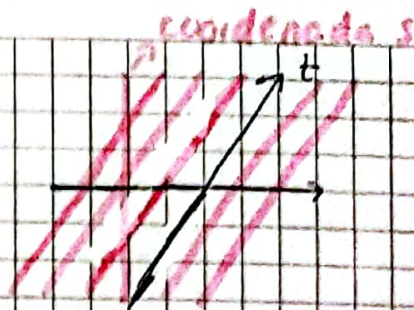
$$1^a \text{ eq } s = x - t = x - \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = x - \frac{y}{2} \quad \text{solução final}$$



$$\begin{cases} u_x + 2u_y = 0 \\ u(0, y) = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2 \\ \frac{du}{dt} = 0 \end{cases}$$



Analicamente:

$$\begin{cases} x = t + c_1(s) \\ y = 2t + c_2(s) \\ u = c_3(s) \end{cases}$$

Para  $t=0 \Rightarrow$   $\begin{cases} x=0 \\ y=s \\ u=s \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 = c_1(s) \\ s = c_2(s) \\ s = c_3(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + s \\ u = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ s = y - 2x = y - 2x \end{cases}$$

$$u(x, y) = y - 2x$$

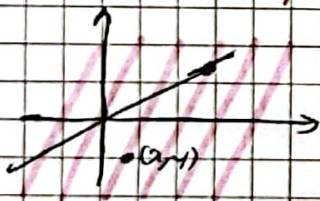
se fosse:  $u(0, y) = y^2$

para  $t=0$ :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=s \\ u=s^2 \end{cases}$$

ficava:  $u(x, y) = s^2 = (y - 2x)^2$

se fosse:  $u(s, s) = s$



Para  $t=0$ :

$$\begin{cases} x=s \\ y=s \\ u=1 \end{cases}$$

O sistema ficava:

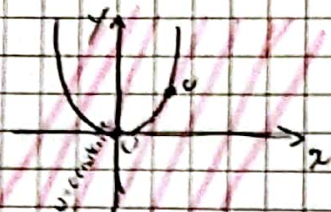
$$\begin{cases} s = c_1(s) \\ s = c_2(s) \\ s = c_3(s) \end{cases} \begin{cases} x = t + s \\ y = 2t + s \\ u = s = 2x - y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y - x &= t \\ y - 2x &= s - 2s = -s & s &= 2x - y \end{aligned}$$

Constante a curva das condições iniciais, pode não haver solução para o problema (ou só haver numa subregião de  $\mathbb{R}^2$ )

Se fosse  $u(x, s^2) = s$  não há solução para a equação





$$y = x^2$$

Só garantimos solução se a curva dos valores iniciais intersectar cada curva característica só uma vez

ex:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -y \\ u(s,s) = s^3 \end{cases}$$

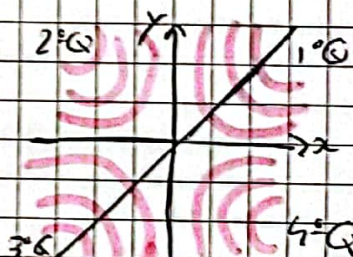
curvas características:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -y \\ \frac{du}{dt} = u \end{cases} \quad \text{⊗} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y}{x}$$

separáveis

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x} dx \quad \ln|y| = -\ln|x| + c$$

$$y = \frac{k}{x}$$



⊗

$$\begin{cases} x = c_1(s)e^t \\ y = c_2(s)e^{-t} \\ u = c_3(s)e^t \end{cases}$$

Para  $t=0$ :

$$\begin{cases} x = s \\ y = s \\ u = s^3 \end{cases} \quad \begin{matrix} s = c_1(s) \\ s = c_2(s) \\ s^3 = c_3(s) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = se^t \\ y = se^{-t} \\ u = s^3 e^t \end{cases}$$

$$u = s^3 e^t = x^2 y = (se^t)^2 (se^{-t})$$

$$\begin{aligned} xy = s^2 &\rightarrow s = \pm \sqrt{xy} \\ \frac{x}{y} = e^{2t} &\rightarrow t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

Só existe inversa se  $xy > 0$  (1ºQ e no 3ºQ)

Se fosse  $u(0,0) = s$

$$\begin{cases} x = se^t \\ y = se^{-t} \\ u = se^t = x \end{cases}$$

Se fosse  $u(s,s) = s^2$

$$u = s^2 e^t = s(se^t) = \sqrt{xy} \quad \&$$



## Homogenea:

$$a(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y) u = 0$$

Para resolver:

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = b(x,y)$$

$$\frac{du}{dt} = -c(x,y)u$$

$$x = \dots c_1(s)$$

$$y = \dots c_2(s)$$

$$u = \dots c_3(s)$$

Usamos a curva das condições iniciais para descobrir  $c_1(s)$ ,  $c_2(s)$  e  $c_3(s)$

Invertamos o sistema para descobrir  $t$  e  $s$  em função de  $x$  e  $y$

Substituímos  $t$  e  $s$  na equação de  $u$  para obter  $u(x,y)$

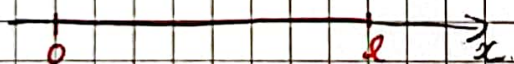
## Eq. diferencial parcial 2º ordem

(Sei até cap. 8.3 inclusive)

### 2º ordem

### Equação do calor

Barra de metal de comprimento  $l$



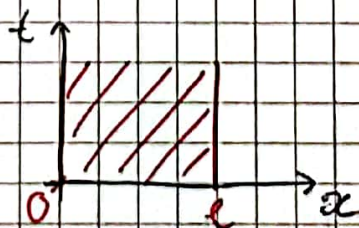
$u(x, t)$  - temperatura no ponto  $x \in [0, l]$  no instante  $t$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$\alpha$  - coeficiente de difusão térmica

$$x \in [0, l]$$

$$t \geq 0$$



Condição inicial:  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $x \in [0, l]$

Condições de Dirichlet:  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) (homogênea)



## Condições de fronteira

## método de separação de variáveis

$$u(x,t) = X(x) T(t)$$

Substituindo na equação:

$$X T' = \alpha^2 X'' T$$

Se quisermos soluções não nulas:

$$\frac{X T'}{X T} = \alpha^2 \frac{X'' T}{X T} \quad \downarrow X T \neq 0$$

$$\alpha \neq 0, \quad \underbrace{\frac{1}{\alpha^2}}_{\text{não depende de } \alpha} \underbrace{\frac{T'}{T}}_{\text{não depende de } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{não depende de } x}$$

(mandar as constantes para o lado da equação mais simples)

Constante:  $-\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

(pois que cada lado só depende de uma variável)

$$\begin{cases} T' = -\lambda \alpha^2 T & (I) \\ X'' = -\lambda X & (II) \end{cases}$$

(I) eq. lin homogênea 1ª ordem

$$T(t) = C e^{-\lambda \alpha^2 t}, C \in \mathbb{R}$$

$$(II) X'' - \lambda X = 0$$

$$\text{pol. característica: } r^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow r = \pm \sqrt{-\lambda}$$

1º caso  $\lambda < 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R} \Rightarrow 2$  raízes reais diferentes

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}, C_i \in \mathbb{R}$$

(condições de Dirichlet)

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0$$

$$X(0) T(t) = X(\ell) T(t) = 0, \forall t \geq 0 \text{ e } T(t) \neq 0$$

$$\Rightarrow X(0) = X(\ell) = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda} \ell} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} \ell} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = e^{-\sqrt{\lambda}l} \cdot e^{\sqrt{\lambda}l} = 0$$

Pelo que se  $\det = 0$  entramos numa contradição

$$e^{-\sqrt{\lambda}l} = e^{\sqrt{\lambda}l}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\lambda}l = 0$$

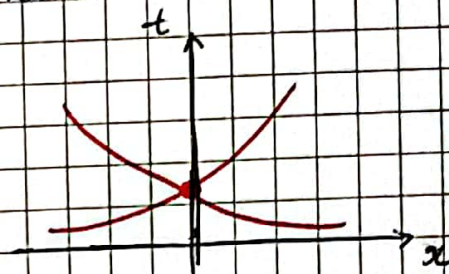
(impossível)

(já assumimos  $\lambda < 0$  e  $l > 0$ )

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$\Rightarrow$  Não há soluções não nulas para este caso



só são iguais quando  $x=0$

2º caso  $\lambda = 0$

Há 1 raiz real dupla  $r=0$

$$x(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x}, c_i \in \mathbb{R}$$

(condições de fronteira)

$$x(0) = c_1 = 0 \quad \text{e} \quad x(l) = c_1 + c_2 l = 0$$

$\Downarrow$   
 $c_1$  e  $c_2$  são iguais a zero

logo neste caso não há soluções não nulas

3º caso  $\lambda > 0$  Há duas raízes complexas conjugadas

$$r = \pm \sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda} \quad \text{por isso igualamos a equação a } -\lambda$$

$$x(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), c_i \in \mathbb{R}$$

$$x(0) = c_1 = 0$$

$$x(l) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \vee \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$$

$\downarrow$   
 solução nula novamente

Só haverá solução não nula para  $\sqrt{\lambda}l = k\pi, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$$

$$k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad \begin{cases} T_k(t) = e^{-\lambda_k \alpha^2 t} = e^{-\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right)^2 t} \\ X_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \end{cases}$$

Queremos  $T(t)X(x) \neq 0$

$$k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow U_k(x, t) = T_k(t) X_k(x) = e^{-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} t} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$



Solução geral é:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} t} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad \forall C_k \in \mathbb{R}$$

com a condição inicial  $u(x,0) = f(x)$

Se fosse dado por exemplo

$$u(x,0) = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 5 \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad \text{desenvolver a soma explicitamente}$$

$$= \underbrace{C_1}_{C_1=2} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \underbrace{C_2}_{C_2=0} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \underbrace{C_3}_{C_3=5} \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \dots$$

$C_1 = 2, C_3 = 5$  e  $C_k = 0$  para  $k \neq 1$  e  $k \neq 3$

A solução final fica:

$$u(x,t) = 2 e^{-\frac{\pi^2 \alpha^2}{l^2} t} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 5 e^{-\frac{9\pi^2 \alpha^2}{l^2} t} \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right)$$

Se fosse dado  $u(x,0) = e^x$  (por exemplo)

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \underbrace{e^x}_{\text{escrever como soma de senos}}$$

$f(x) = e^x$  séries de Fourier de senos em  $[0, l]$  (com extensão ímpar)

$$C_k = b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx$$



# Problemas

19/12/2023

## Série 8 - Equações de Primeira Ordem

③ 10)  $U_x + U_y = U^2$  com  $U(x, 0) = 1$  Para  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = U^2$$

$$\begin{cases} x = t + c_1 \\ y = t + c_2 \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = U^2 \Rightarrow \frac{1}{U^2} \frac{du}{dt} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{U} = t + c_3 \Rightarrow U = -\frac{1}{t + c_3}$$

$$\begin{cases} x = t + c_1 \\ y = t + c_2 \\ U = -\frac{1}{t + c_3} \end{cases}$$

integrar das duas lados em ordem a t

$$\begin{cases} x(s, t) = t + c_1(s) \\ y(s, t) = t + c_2(s) \\ U(s, t) = -\frac{1}{t + c_3(s)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s, 0) = s \\ y(s, 0) = 0 \\ U(s, 0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s, 0) = c_1(s) \\ y(s, 0) = c_2(s) \\ U(s, 0) = -\frac{1}{c_3(s)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1(s) = s \\ c_2(s) = 0 \\ -\frac{1}{c_3(s)} = 1 \Rightarrow c_3(s) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s, t) = t + s \\ y(s, t) = t \\ U(s, t) = -\frac{1}{t - 1} \end{cases}$$

$$U(x, y) = -\frac{1}{1 - y}$$

$y > 1$  ou  $y < 1 \Rightarrow$  pc cond inicial  $y \neq 0$  ( $U(x, 0)$ )

## Série 8 - Equações de Segunda Ordem

④ 1)  $f(x) = x$  em  $[0, 2\pi]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ 1-x & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{n x}{2}\right) dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos\left(\frac{n x}{2}\right) dx = \frac{4}{n^2 \pi} (1 - (-1)^n)$$

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi} (1 - (-1)^n) \cos\left(\frac{n x}{2}\right) = \pi - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right)$$



$$5) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - tu \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0$$

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$XT' = X''T - tXT \Rightarrow XT' + tXT = X''T \Rightarrow \frac{T' + tT}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & ① \\ T' + (t + \lambda)T = 0 & ② \end{cases}$$

$$② \quad T' = -(t + \lambda)T \Rightarrow T(t) = K e^{(-\frac{t^2}{2} + \lambda t)}$$

$$① \quad \text{case 1: } \lambda < 0$$

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{\lambda}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$\begin{cases} c_1 \sqrt{\lambda} - c_2 \sqrt{\lambda} = 0 \\ c_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}x} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\text{case 2: } \lambda = 0$$

$$X(x) = c_1 x + c_0$$

$$X'(x) = c_1$$

$$c_1 = 0$$

$$X(x) = c_0$$

$$T(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$u(x, t) = c_0 e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\text{case 3: } \lambda > 0$$

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X'(0) = c_2 \sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X'(\pi) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda = \left(\frac{n}{2}\right)^2, n \in \mathbb{N}$$

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \quad T_n(t) = e^{-\left(\frac{t^2}{2} + \left(\frac{n}{2}\right)^2 t\right)}$$

$$u_n(x, t) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) e^{-\left(\frac{t^2}{2} + \left(\frac{n}{2}\right)^2 t\right)}$$

$$u(x, t) = c_0 e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n}{2}x\right) e^{-\left(\frac{t^2}{2} + \left(\frac{n}{2}\right)^2 t\right)}$$

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n}{2}x\right) = f(x)$$

$$u(x, t) = \pi e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) e^{-\left(\frac{t^2}{2} + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)}$$

$$c_0 = \pi$$

$$c_{2n} = 0$$

$$c_{2n-1} = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2}$$



# Série 8 - Equações de Primeira Ordem

④ 
$$\begin{cases} u_x - u_y = 0 \\ u(x, \frac{1}{x}) = f(x) \end{cases} \quad x > 0, y > 0$$

$y = \frac{1}{x}$

$$\frac{dx}{dt} = 1$$
  

$$\frac{dy}{dt} = -1$$

$y = y(x)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$y = -x + C, C \in \mathbb{R}$

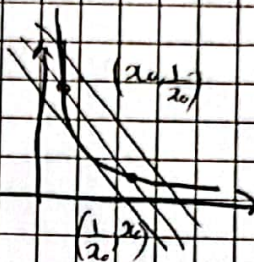
valor fixo no ponto  $(x_0, y)$

$1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$

$y = -x + 2$

$$\frac{du}{dt} = 0$$

u sempre constante



$u(x_0, \frac{1}{x_0}) = u(\frac{1}{x_0}, x_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x_0) = f(\frac{1}{x_0})$

$f(x) = f(\frac{1}{x}) \quad x > 0$

$(x_0, \frac{1}{x_0})$

$y = -x + C$

$\frac{1}{x_0} = -x_0 + C \Leftrightarrow C = x_0 + \frac{1}{x_0}$

$y = -x + x_0 + \frac{1}{x_0}$

$y = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} = -x + x_0 + \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow 1 = -x^2 + (x_0 + \frac{1}{x_0})x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - (x_0 + \frac{1}{x_0})x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - x_0)(x - \frac{1}{x_0}) = 0$

|     |                        |    |
|-----|------------------------|----|
| 1   | -(x_0 + \frac{1}{x_0}) | 1  |
| x_0 | x_0                    | -1 |
| 1   | -\frac{1}{x_0}         | 0  |